Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 11 (1965)

Heft: 4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR QUELQUES APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES D'UNE INÉGALITÉ RELATIVE AUX FONCTIONS CONVEXES

Autor: Steinig, J.

Bibliographie

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-39980

Or, on a manifestement $r_1 r_2 \geqq r_3^2$ et $4r_1 > r_1 - r_2$, et le produit de ces deux inégalités positives donne $4r_1^2 r_2 > r_3^2 (r_1 - r_2)$. Puisqu'on a encore $r_1 \geqq r_2$, aucun des termes du côté gauche de (9) n'est négatif, ce qui démontre cette inégalité.

Nous avons donc

$$M_0(r) \leqq M_0(m) \quad \text{et} \quad M_1(r) \geqq M_1(m),$$
$$r_3 \leqq m_1 \quad \text{et} \quad r_1 \geqq m_3;$$

c'est dire qu'il existe un t [1]), $0 < t < 1$, tel que $(m^t) \prec (r^t)$.

L'inégalité (7) se trouve ainsi démontrée, et il est facile de voir qu'il n'y a égalité que dans le cas d'un triangle équilatéral.

Pour conclure, remarquons qu'il ne peut exister d'inégalité générale entre $\frac{\sqrt{3}}{2} M_u(a)$ et $M_u(m)$; ceci est une conséquence immédiate d'un théorème d'Euler [6] qui affirme qu'on peut construire avec les médianes m_i du triangle $A_1 A_2 A_3$ un nouveau triangle dont les médianes sont alors $\frac{3}{4} a_i$. Par contre, on sait qu'il existe certaines égalités; on voit aisément avec (8) qu'on a toujours

$$\frac{\sqrt{3}}{2} M_2(a) = M_2(m) \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} M_4(a) = M_4(m).$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Makowski, « Inequalities for a Triangle », *El. Math.* 16 (1961), 60-61.

[2] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya. « Inequalities », *Cambridge University Press* (second edition, 1959), aux pages 45 et 89.

[3] J. Karamata, « Sur une inégalité relative aux fonctions convexes », *Publ. math. Univ. Belgrade*, 1 (1932), 145-148.

[4] M. Petrović, « Sur quelques fonctions des côtés et des angles d'un triangle », *Enseignement math.* 18 (1916), 153-163.

[5] F. Leuenberger, « Gegensätzliches Verhalten der arithmetischen und geometrischen Mittel », *El. Math.* 16 (1961), 127-129.

[6] Leonhardi Euleri, Opera Omnia, Series I, Vol. 4 (Commentationes Arithmeticae **3**), aux pages XXI et 298.

(Reçu le 30 juin 1964)

J. Steinig
5, rue Toeffer
Genève

1) La valeur exacte de t, comme celle de s, dépendra du choix de a); par exemple, $s > \frac{1}{4}$ lorsque $(a) = (3, 4, 5)$, au lieu que $s < \frac{1}{4}$ si $(a) = (2, 24, 24)$.

vide-leer-empty