Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 11 (1965)

Heft: 4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR QUELQUES APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES D'UNE INÉGALITÉ RELATIVE AUX FONCTIONS CONVEXES

Autor: Steinig, J.

Kapitel: 1. Introduction

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-39980

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SUR QUELQUES APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES D'UNE INÉGALITÉ RELATIVE AUX FONCTIONS CONVEXES

par J. STEINIG

1. INTRODUCTION

On sait que les hauteurs $(h) = (h_1, h_2, h_3)$ d'un triangle et les rayons $(r) = (r_1, r_2, r_3)$ de ses cercles exinscrits sont liés par la relation

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}, \tag{1}$$

qui peut s'écrire aussi

$$M_{-1}(h) = M_{-1}(r).$$

$\mathrm{M}_u(x)$ désigne ici la moyenne d'ordre u des nombres réels positifs $(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, définie par

$$M_u(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^u\right)^{1/u} & \textit{pour } u \neq 0 \\ \left(\displaystyle\prod_{i=1}^{[n]} x_i\right)^{1/n} & \textit{pour } u = 0; \end{cases}$$

c'est une fonction continue et croissante de u sur l'intervalle $(-\infty, +\infty)$.

M. A. Mąkowski a donné une généralisation de (1) en démontrant dans [1] les inégalités

$$\begin{cases} M_u(h) \leqq M_u(r) \ \textit{pour } u > -1 \\ M_u(h) \geqq M_u(r) \ \textit{pour } u < -1. \end{cases} \tag{2}$$

Nous nous proposons de démontrer ici quelques autres résultats du même genre à l'aide de l'inégalité de Karamata.

2. L'inégalité de Karamata

Rappelons brièvement en quoi consiste cette inégalité. Si les nombres réels $(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $(x') = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ satisfont aux trois conditions

$$\text{(I)} \quad x_1 \geqq x_2 \geqq \ldots \geqq x_n \ , \ x'_1 \geqq x'_2 \geqq \ldots \geqq x'_n ,$$

$$\text{(II)} \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu \leqq x'_1 + x'_2 + \ldots + x'_\nu \ (1 \leqq \nu < n) ,$$

$$\text{(III)} \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_n = x'_1 + x'_2 + \ldots + x'_n ,$$

nous dirons avec les auteurs de [2] que (x') majore (x), et écrirons $(x) \prec (x')$.

M. J. Karamata a démontré [3] que si $(x) \prec (x')$, alors

$$\phi(x_1) + \phi(x_2) + \ldots + \phi(x_n) \leqq \phi(x'_1) + \phi(x'_2) + \ldots + \phi(x'_n) \quad (3)$$

pour toute fonction ϕ continue et convexe dans un intervalle comprenant (x) et (x'). Si ϕ est deux fois dérivable et $\phi'' > 0$, il n'y a égalité dans (3) que lorsque $(x) \equiv (x')$. L'inégalité (3) est évidemment renversée si ϕ est concave, car $-\phi$ est alors convexe.

M. M. Petrović a montré dans [4] que si la fonction $f(x)$ possède au voisinage de $x = 0$ un développement en série de puissances $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$, avec $a_k \geqq 0$ pour $k \geqq 2$, alors

$$f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) \leqq f(x_1 + x_2 + x_3) + 2f(0) ,$$

et M. le Professeur Karamata nous a indiqué que c'est précisément la lecture de cet article qui lui donna l'idée de l'inégalité (3).

3. Quelques applications

Soit $A_1 A_2 A_3$ un triangle quelconque et a_i le côté opposé au sommet A_i, alors que m_i désigne la médiane passant par A_i et r_i le rayon du cercle exinscrit tangent à a_i.