1. Introduction

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **11 (1965)**

Heft 4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **16.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

SUR QUELQUES APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES D'UNE INÉGALITÉ RELATIVE AUX FONCTIONS CONVEXES

par J. STEINIG

1. INTRODUCTION

On sait que les hauteurs $(h) = (h_1, h_2, h_3)$ d'un triangle et les rayons $(r) = (r_1, r_2, r_3)$ de ses cercles exinscrits sont liés par la relation

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}, \tag{1}$$

qui peut s'écrire aussi

$$M_{-1}(h) = M_{-1}(r).$$

$\mathrm{M}_u(x)$ désigne ici la moyenne d'ordre u des nombres réels positifs $(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, définie par

$$M_u(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^u\right)^{1/u} & \textit{pour } u \neq 0 \\ \left(\displaystyle\prod_{i=1}^{[n]} x_i\right)^{1/n} & \textit{pour } u = 0; \end{cases}$$

c'est une fonction continue et croissante de u sur l'intervalle $(-\infty, +\infty)$.

M. A. Mąkowski a donné une généralisation de (1) en démontrant dans [1] les inégalités

$$\begin{cases} M_u(h) \leqq M_u(r) \ \textit{pour } u > -1 \\ M_u(h) \geqq M_u(r) \ \textit{pour } u < -1. \end{cases} \tag{2}$$

Nous nous proposons de démontrer ici quelques autres résultats du même genre à l'aide de l'inégalité de Karamata.

2. L'inégalité de Karamata

Rappelons brièvement en quoi consiste cette inégalité. Si les nombres réels $(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $(x') = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ satisfont aux trois conditions

$$\text{(I)} \quad x_1 \geqq x_2 \geqq \ldots \geqq x_n \ , \ x'_1 \geqq x'_2 \geqq \ldots \geqq x'_n ,$$

$$\text{(II)} \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu \leqq x'_1 + x'_2 + \ldots + x'_\nu \ (1 \leqq \nu < n) ,$$

$$\text{(III)} \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_n = x'_1 + x'_2 + \ldots + x'_n ,$$

nous dirons avec les auteurs de [2] que (x') majore (x), et écrirons $(x) \prec (x')$.

M. J. Karamata a démontré [3] que si $(x) \prec (x')$, alors

$$\phi(x_1) + \phi(x_2) + \ldots + \phi(x_n) \leqq \phi(x'_1) + \phi(x'_2) + \ldots + \phi(x'_n) \quad (3)$$

pour toute fonction ϕ continue et convexe dans un intervalle comprenant (x) et (x'). Si ϕ est deux fois dérivable et $\phi'' > 0$, il n'y a égalité dans (3) que lorsque $(x) \equiv (x')$. L'inégalité (3) est évidemment renversée si ϕ est concave, car $-\phi$ est alors convexe.

M. M. Petrović a montré dans [4] que si la fonction $f(x)$ possède au voisinage de $x = 0$ un développement en série de puissances $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$, avec $a_k \geqq 0$ pour $k \geqq 2$, alors

$$f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) \leqq f(x_1 + x_2 + x_3) + 2f(0) ,$$

et M. le Professeur Karamata nous a indiqué que c'est précisément la lecture de cet article qui lui donna l'idée de l'inégalité (3).

3. Quelques applications

Soit $A_1 A_2 A_3$ un triangle quelconque et a_i le côté opposé au sommet A_i, alors que m_i désigne la médiane passant par A_i et r_i le rayon du cercle exinscrit tangent à a_i.