

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 11 (1965)  
**Heft:** 4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** ANWENDUNGEN DES SCHAUDERSCHEN FIXPUNKTSATZES AUF  
GEWISSE NICHTLINEARE INTEGRALGLEICHUNGEN  
**Autor:** Ehrmann, H. / Lahmann, H.-E.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-39979>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# ANWENDUNGEN DES SCHAUDERSCHEN FIXPUNKTSATZES AUF GEWISSE NICHTLINEARE INTEGRALGLEICHUNGEN

VON H. EH RMANN und H.-E. LAHMANN

1. *Einleitung.* Die vorliegende Arbeit soll zeigen, dass einige in Spezialfällen der nichtlinearen Integralgleichungen bzw. der Gleichungen mit vollstetigen Operatoren bekannte Sätze, deren Beweis mit Hilfe der Theorie des topologischen Abbildungsgrades oder der Leray-Schauderschen «Theorie der a-priori-Schranken» durchgeführt worden ist, allein durch Anwendung des Schauderschen Fixpunktsatzes beweisbar sind. Dabei ergeben sich entweder Verallgemeinerungen der Sätze oder Vereinfachungen der Beweise. Nur an einer Stelle (Abschnitt 6), wo neben der Existenz auch die Eindeutigkeit einer Lösung bewiesen werden soll, wird statt des Schauderschen Satzes der Banachsche Fixpunktsatz für kontrahierende Abbildungen benutzt.

In Abschnitt 2 wird der Schaudersche Fixpunktsatz formuliert, wie er für das Folgende verwendet wird.

Abschnitt 3 enthält den Beweis eines Existenzsatzes für Gleichungen der Gestalt  $Kfu = u$  mit einem linearen, vollstetigen, normalen Operator  $K$  und einem im allgemeinen nichtlinearen Operator  $f$ , die beide in einem (i. allg. komplexen) Hilbertraum operieren. Dabei ist das Verhalten von  $f$  auf einer Kugel  $\|u\| = C$  entscheidend für die Lösbarkeit.

Hieraus folgt ein allgemeiner Satz von Krasnoselski [11], den dieser unter Verwendung topologischer Methoden wie der Homotopieinvarianz des topologischen Abbildungsgrades beweist. Der in Abschnitt 4 bewiesene Satz 2 enthält eine kleine Verschärfung.

Die Anwendung von Satz 1 auf nichtlineare Integralgleichungen vom Hammersteinschen Typ mit symmetrischem Kern <sup>1)</sup>  $K(x, y)$  liefert weiter einen einfachen Beweis eines Satzes von Dolph [4], der von diesem mit Hilfe der Leray-Schauderschen « Methode der a-priori-Schranken » bewiesen wurde [3]. Die Möglichkeit, den betreffenden Satz unmittelbar mit Hilfe des Schauderschen Fixpunktsatzes zu beweisen, liegt darin begründet, dass der betreffende Satz über a-priori-Schranken, wie H. Schaefer [6] gezeigt hat, aus dem Schauderschen Satz folgt. In Abschnitt 5 wird gezeigt, dass auch umgekehrt der Schaudersche Fixpunktsatz bei vollstetigen Operatoren eine elementare Folgerung des Leray-Schauderschen Satzes ist. Beide Sätze sind in diesem Sinne äquivalent.

In Abschnitt 6 wird ein Existenz- und Eindeigkeitssatz mit Hilfe kontrahierender Abbildungen bewiesen. Der Satz verallgemeinert einen entsprechenden Satz von Dolph für nichtlineare Hammersteinsche Integralgleichungen auf Gleichungen mit normalen Operatoren, wobei gleichzeitig der Beweis wesentlich vereinfacht wird.

In 7 wird schliesslich ein Existenzsatz für nichtlineare Gleichungen mit Operatoren in Banachräumen bewiesen, der eine leichte Verallgemeinerung eines Satzes darstellt, den Krasnoselski [11] aus dem sogenannten « Antipodensatz » von Ljusternik, Schnirelmann und Borsuk folgert. Hier gelingt der Beweis ebenfalls allein mit Hilfe des Schauderschen Fixpunktsatzes ohne Bezug auf die zum Beweis des Antipodensatzes und der Folgerung benötigte Anwendung der Theorie des Abbildungsgrades.

## 2. J. Schauder [2] bewies den folgenden Fixpunktsatz:

Bildet ein Operator  $T$  eine konvexe, abgeschlossene Teilmenge  $M$  eines Banachraumes stetig in sich ab und ist  $TM$  kompakt, so enthält  $M$  einen Fixpunkt  $u^* = Tu^*$ .

---

<sup>1)</sup> In diesem Fall sind die Eigenwerte von  $K$  reell. Satz 1 umfasst auch Operatoren  $K$  mit komplexen Eigenwerten. Ausserdem enthält er im wesentlichen einen auf andere Art unter der einschneidenden Voraussetzung der Fréchet-Differenzierbarkeit der Operatoren bewiesenen Existenzsatz [10].

Hieraus folgt insbesondere, dass jeder vollstetige Operator  $T$  auf einem Banachraum  $B$  mit Werten in  $B$ , der die Kugel  $K$ ,  $\|u\| \leq C$ , in sich abbildet,

$$(2.1) \quad \|Tu\| \leq C \quad \text{für} \quad \|u\| \leq C,$$

einen Fixpunkt  $u^* = Tu^*$  in  $K$  besitzt.

Statt (2.1) genügt es jedoch, zu fordern, dass

$$(2.2) \quad \|Tu\| \leq C \quad \text{für} \quad \|u\| = C$$

gilt <sup>1)</sup>. Wir geben einen anderen einfachen Beweis:

Wegen der Vollstetigkeit von  $T$  gilt

$$(2.3) \quad \|Tu\| \leq D \quad \text{für} \quad \|u\| \leq C$$

mit einer Konstanten  $D$ .

Der Operator  $S$ ,

$$(2.4) \quad Su = \begin{cases} u & \text{für} \quad \|u\| \leq C \\ C \frac{u}{\|u\|} & \text{für} \quad \|u\| > C \end{cases}$$

ist stetig und beschränkt. Daher ist der Operator  $TS$  vollstetig.  $TS$  bildet die Kugel  $K_1$ ,  $\|u\| \leq D$ , wegen (2.2) und (2.3) in sich ab. Daher existiert nach dem Schauderschen Satz ein Fixpunkt  $u^* = TSu^*$  in  $K_1$ . Wegen (2.4) und (2.2) ist  $\|TSu^*\| = \|u^*\| \leq C$ , also  $u^*$  ein Fixpunkt von  $T$  in  $K$ .

3. Es gilt der folgende Satz.

*Satz 1.*  $K$  sei ein linearer, normaler, vollstetiger Operator auf einem Hilbertraum  $H$  und mit Werten in  $H$ .

Für sämtliche charakteristischen Zahlen  $\lambda$  von  $K$  gelte:

$$(3.1) \quad |\lambda - \mu| \geq \gamma \quad (\gamma > 0)$$

mit einer komplexen Zahl  $\mu$ .

<sup>1)</sup> H. SCHAEFER [7], S. 9, 10. M. A. KRASNOSELSKI [11], S. 124, schliesst dies aus der Homotopieinvarianz des Abbildungsgrades.



$f$  sei ein stetiger, beschränkter Operator auf  $H$  und mit Werten in  $H$ , und es gelte <sup>1)</sup>

$$(3.2) \quad ||(f - \mu I)u|| \leq \gamma ||u||$$

für alle  $u \in H$  mit  $||u|| = C, (C > 0)$ .

Dann besitzt die Gleichung

$$(3.3) \quad Kfu = u$$

eine Lösung  $u^* \in H$  mit  $||u^*|| \leq C$ .

*Beweis:* Nach [5], S. 232-233, existiert ein in  $H$  vollständiges Orthonormalsystem  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  aus Eigenvektoren und Nulllösungen <sup>2)</sup>, so dass jedes Element  $x \in H$  eine Darstellung

$$(3.4) \quad x = \sum_v \alpha_v \varphi_v$$

mit komplexen Konstanten  $\alpha_v$  besitzt. Aus (3.1) und (3.4) folgt

$$\begin{aligned} ||(I - \mu K)x||^2 &= ||\sum_v \alpha_v \left(1 - \frac{\mu}{\lambda_v}\right) \varphi_v||^2 = \sum_v |\alpha_v|^2 \left|1 - \frac{\mu}{\lambda_v}\right|^2 \geq \\ &\geq \gamma^2 \cdot \sum_v \left|\frac{\alpha_v}{\lambda_v}\right|^2 = \gamma^2 ||Kx||^2, \end{aligned}$$

also

$$(3.5) \quad ||(I - \mu K)x|| \geq \gamma ||Kx|| \quad \text{für} \quad x \in H.$$

Wegen (3.1) und der Vollstetigkeit des linearen Operators  $K$  ist  $\mu$  ein regulärer Punkt von  $K$ . Daher existiert  $(I - \mu K)^{-1}$  als linearer, beschränkter Operator auf  $H$ , und mit

$$y = (I - \mu K)x, \quad x = (I - \mu K)^{-1}y$$

folgt aus (3.5)

$$(3.6) \quad ||K(I - \mu K)^{-1}y|| \leq \frac{1}{\gamma} ||y|| \quad \text{für} \quad y \in H.$$

<sup>1)</sup>  $I$  = identischer Operator.

<sup>2)</sup>  $K\varphi_v = \frac{1}{\lambda_v} \varphi_v$ ; ist  $\varphi_v$  Nulllösung, so sei  $\lambda_v = \infty$ , also  $\frac{1}{\lambda_v} = 0$ .

Wegen der Vollstetigkeit von  $K$  und der Stetigkeit und Beschränktheit der Operatoren  $(I - \mu K)^{-1}$  und  $f - \mu I$  ist

$$T = K(I - \mu K)^{-1} (f - \mu I)$$

ein vollstetiger Operator auf  $H$ .

Aus (3. 6) und (3. 2) folgt

$$\|Tu\| \leq \|u\| \quad \text{für} \quad u \in H \quad \text{mit} \quad \|u\| = C.$$

Folglich existiert nach dem Schauderschen Fixpunktsatz<sup>1)</sup> eine Lösung  $u^*$  der Gleichung  $Tu = u$  mit  $\|u^*\| \leq C$ . Diese Gleichung ist aber wegen der Vertauschbarkeit von  $K$  mit seiner Resolventen  $(I - \mu K)^{-1}$  äquivalent der Ausgangsgleichung (3. 3), q. e. d.

*Folgerung:* Gilt statt (3. 2) die Ungleichung

$$(3. 2') \quad \|(f - \mu I)u\| \leq \alpha \|u\| + A, \quad (A \geq 0), \quad u \in H, \\ 0 < \alpha < \gamma$$

für  $\|u\| = \frac{A}{\gamma - \alpha} = C$ , so gilt die Aussage des Satzes ebenfalls;

denn aus (3. 6) und (3. 2') folgt

$$\|Tu\| = \|K(I - \mu K)^{-1}(f - \mu I)u\| \leq \frac{\alpha}{\gamma} \|u\| + \frac{A}{\gamma} = C \\ \text{für} \quad \|u\| = C.$$

Der Schaudersche Fixpunktsatz liefert wie oben die Behauptung.

4. Der Beweis von Satz 1 zeigt, dass die Aussage richtig bleibt, wenn man auf die Gültigkeit des Entwicklungssatzes verzichtet und statt (3. 1) nur fordert, dass  $\mu$  kein Punkt des Spektrums von  $K$  ist und (3. 2) mit

$$(4. 1) \quad \gamma \leq \frac{1}{\|L\|}, \quad L = K(I - \mu K)^{-1}$$

gilt.

<sup>1)</sup> Siehe Abschnitt 2.

Hieraus folgt ein Existenzsatz <sup>1)</sup> von Krasnoselski, den dieser mit Hilfe der Theorie des Abbildungsgrades beweist.

*Satz 2.* Es sei  $K(x, y)$  Element des  $L^2 \{[a, b] \times [a, b]\}$ ,  $f(x, y)$  eine stetige Funktion für  $a \leq x \leq b$ ,  $-\infty < y < \infty$ , die der Ungleichung

$$(4.2) \quad |f(x, y) - \mu y| \leq \beta |y| + \sum_{v=1}^n S_v(x) |y|^{1-p_v} + D(x)$$

genügt mit einem regulären Punkt  $\mu$  (der komplexen Zahlenebene) von  $K$ ,  $0 \leq \beta < \frac{1}{\|L\|}$  ( $L$  Operator wie in (4.1)),  $S_v(x) \in L^{2/p_v}$ ,  $0 < p_v < 1$ ,  $v = 1, \dots, n$ ,  $D(x) \in L^2[a, b]$ .

Dann existiert eine Lösung  $\psi(x) \in L^2[a, b]$  der Hammerstein'schen Integralgleichung

$$\psi(x) = \int_a^b K(x, z) f(z, \psi(z)) dz.$$

*Beweis:* Unter den obigen Voraussetzungen über  $S_v$  gilt  $S_v(x) |\psi(x)|^{1-p_v} \in L^2$ , wenn  $\psi(x) \in L^2$ . Weiter folgt nach der Hölderschen Ungleichung

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \|S_v(x) \cdot |\psi(x)|^{1-p_v}\|^2 &= \int_a^b |S_v(x)|^2 |\psi(x)|^{2(1-p_v)} dx \leq \\ &\leq \left\{ \int_a^b |S_v(x)|^{\frac{2}{p_v}} dx \right\}^{p_v} \cdot \left\{ \int_a^b |\psi(x)|^2 dx \right\}^{1-p_v} \leq M^2 \|\psi\|^{2(1-p_v)} \end{aligned}$$

mit

$$M^2 = \max_{v=1, \dots, n} \left\{ \int_a^b |S_v(x)|^{\frac{2}{p_v}} dx \right\}^{p_v}.$$

Nach Krasnoselski [11], Seite 30, wirkt der Operator  $f: f\psi = f(x, \psi(x))$  stetig und beschränkt in  $L^2$ .

<sup>1)</sup> M. A. KRASNOSELSKI [11], S. 165. Dort wird die Existenz einer Lösung für « hinreichend kleine  $\beta$  » bewiesen. An Stelle des Intervalls  $[a, b]$  kann eine messbare Menge  $G$  des  $n$ -dimensionalen Raumes treten.

Aus (4. 2) und (4. 3) folgt

$$\begin{aligned} \|f\psi - \mu\psi\| &\leq \beta \|\psi\| + \sum_{v=1}^n \|S_v(x) \cdot |\psi|^{1-p_v}\| + \|D(x)\| \leq \\ &\leq \beta \|\psi\| + M \sum_{v=1}^n \|\psi\|^{1-p_v} + \|D\| \leq \\ &\leq \left( \beta + \frac{Mn}{\|\psi\|^{\min p_v}} + \frac{D}{\|\psi\|} \right) \|\psi\| \leq \frac{1}{\|L\|} \|\psi\| \end{aligned}$$

für  $\|\psi\| = C$  bei einem hinreichend grossen  $C \geq 1$ .

Damit gilt (3. 2) mit  $\gamma = \frac{1}{\|L\|}$  und nach obiger Bemerkung die Behauptung.

5. Satz 3 (C. L. Dolph [4]). Es sei

$$K\varphi = \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy$$

ein vollstetiger, hermitescher Operator im  $L^2[a, b]$ ,

$$\dots \leq \lambda_{-2} \leq \lambda_{-1} < 0 < \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$$

die Folge der charakteristischen Zahlen  $\lambda_n$  von  $K$ .

Sei ferner  $f(x, y)$  eine stetige Funktion für  $a \leq x \leq b$ ,  $-\infty < y < \infty$ , für die positive Konstanten  $C, y_0$  und Zahlen  $\mu_n, \mu_{n+1}$  mit  $\lambda_n < \mu_n < \mu_{n+1} < \lambda_{n+1}$  existieren, so dass die Ungleichungen

$$\begin{aligned} (5.1) \quad &\mu_n y - C \leq f(x, y) \leq \mu_{n+1} y + C \quad \text{für } y > y_0 \\ &\mu_{n+1} y - C \leq f(x, y) \leq \mu_n y + C \quad \text{für } y < -y_0 \end{aligned}$$

gelten. Dann existiert eine Lösung  $\psi(x) \in L^2$  der Hammerstein'schen Integralgleichung

$$\psi(x) = \int_a^b K(x, y) f(y, \psi(y)) dy.$$

*Beweis:* Mit

$$\mu = \frac{\lambda_{n+1} + \lambda_n}{2}, \quad \gamma = \frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{2},$$

$$\alpha = \max (|\mu - \mu_n|, |\mu - \mu_{n+1}|) < \gamma \text{ folgt aus (5. 1)}$$

$$(5. 2) \quad |f(x, y) - \mu y| \leq \alpha |y| + C \quad \text{für} \quad |y| > y_0.$$

Wegen der Stetigkeit von  $f$  existiert daher eine Konstante  $C_1$ , so dass (5. 2) mit  $C_1$  statt  $C$  für alle  $y$  gilt.

Daraus folgt dann

$$\|f(x, y) - \mu y\| \leq \|\alpha |y| + C_1\| \leq \alpha \|y\| + A, \\ (A = C_1 \cdot \sqrt{b-a}).$$

Satz 1 mit Folgerung liefert die Behauptung.

Den Satz 3 bewies Dolph <sup>1)</sup> mit Hilfe der « Leray-Schauderschen Methode der a-priori-Schranken », während er oben unmittelbar mit Hilfe des Schauderschen Satzes bewiesen wurde. H. Schaefer [6] gab einen eleganten Beweis des von Dolph benutzten Spezialfalles dieser Methode, der nur den Fixpunktsatz von Schauder bzw. Tychonoff benutzt, und verallgemeinerte ihn gleichzeitig auf vollstetige Abbildungen in lokalkonvexen, vollständigen Hausdorffschen topologischen Vektorräumen.

Man kann nun auch ebenso leicht zeigen, dass umgekehrt aus dem betreffenden Satz der a-priori-Schranken der Schaudersche Fixpunktsatz folgt, so dass man diesen Spezialfall der Leray-Schauderschen Methode als eine blosse Umformulierung des Schauderschen Fixpunktsatzes ansehen kann.

Wir beschränken uns bei der Formulierung auf den in Hinblick auf Hammersteinsche Integralgleichungen allein interessierenden Fall von Banachräumen <sup>2)</sup>.

Wir setzen die Gültigkeit des folgenden Satzes voraus.

<sup>1)</sup> In [4], S. 295 weist Dolph auf die fundamentale Rolle der a-priori-Schranken hin. Siehe J. LERAY und J. SCHAUDER [3], S. 64, Théorème 1.

<sup>2)</sup> Es sei hier jedoch bemerkt, dass dieselbe Beweismethode auch bei lokalkonvexen, vollständigen, Hausdorffschen topologischen Vektorräumen angewandt werden kann.

*Satz A.* —  $A$  sei eine vollstetige Abbildung eines Banachraumes  $B$  in sich.

Dann gilt: Ist die Teilmenge

$$\{ x \in B : x = \lambda Ax, \quad 0 < \lambda < 1 \}$$

beschränkt, so ist die Gleichung

$$x = \lambda Ax$$

für jedes  $\lambda \in [0, 1]$  lösbar.

Hiermit beweisen wir den Schauderschen Fixpunktsatz:

*Satz B.* —  $T$  sei eine vollstetige Abbildung der abgeschlossenen Kugel

$$K_r = \{ x \in B : \|x\| \leq r \}$$

eines Banachraumes  $B$  in sich.

Dann existiert ein Fixpunkt  $x = Tx$  in  $K_r$ .

*Beweis:*  $\alpha$ ) Aus Satz A folgt unmittelbar: Ist  $A$  ein auf dem Banachraum  $B$  definierter vollstetiger Operator, der  $B$  in die Kugel  $K_r$  abbildet,  $AB \subset K_r$ , so besitzt  $A$  einen Fixpunkt  $x \in K_r$ .

$\beta$ ) Nun habe  $T$  die obigen Eigenschaften. Dann betrachten wir die Abbildung  $A = TS$  mit

$$(5.3) \quad Sx = \begin{cases} x & \text{für } \|x\| \leq r \\ r \frac{x}{\|x\|} & \text{für } \|x\| > r. \end{cases}$$

$S$  ist stetig und beschränkt, also  $A = TS$  vollstetig.  $A$  erfüllt die Voraussetzungen von  $\alpha$ ). Daher existiert ein Fixpunkt  $x = Ax$  in  $K_r$ , der wegen (5.3) Fixpunkt von  $T$  ist.

6. Es gilt der folgende Existenz- und Eindeutigkeitssatz.

*Satz 4.* Es erfülle  $K$  die Voraussetzungen des Satzes 1.  $f$  sei ein Operator auf dem Hilbertraum  $H$ , für den die Lipschitzbedingung

$$(6.1) \quad \|(f - \mu I)\varphi - (f - \mu I)\psi\| \leq \alpha \|\varphi - \psi\|, \quad \varphi, \psi \in H,$$

mit einer Konstanten  $\alpha < \gamma$  gilt, wobei  $\gamma$  die in (3.1) geforderte Eigenschaft habe.

Dann besitzt die Gleichung  $Kfu = u$  genau eine Lösung  $u^* \in H$ , gegen die die Iterationsfolge <sup>1)</sup>

$$u_{n+1} = Tu_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$T = K(I - \mu K)^{-1}(f - \mu I)$  bei einem beliebigen Anfangselement  $u_0 \in H$  konvergiert.

*Beweis:* Wie im Beweis von Satz 1 folgt

$$\|K(I - \mu K)^{-1}y\| \leq \frac{1}{\gamma} \|y\| \quad \text{für } y \in H.$$

Daher gilt mit (6. 1) für den Operator  $T$

$$\|T\varphi - T\psi\| \leq \frac{1}{\gamma} \|(f - \mu I)\varphi - (f - \mu I)\psi\| \leq \frac{\alpha}{\gamma} \|\varphi - \psi\|$$

für  $\varphi, \psi \in H$ . Wegen  $\frac{\alpha}{\gamma} < 1$  ist  $T$  kontrahierend. Daher folgt aus dem Banachschen Fixpunktsatz und der Äquivalenz der Gleichung  $Tu = u$  mit der Ausgangsgleichung  $Kfu = u$  die Behauptung.

*Bemerkung:*  $\alpha$ ) Wie im Abschnitt 4 genügt es, in Satz 4 zu fordern, dass die Gleichung (4. 1) gilt und  $\mu$  regulärer Punkt von  $K$  ist, d. h.  $(I - \mu K)^{-1}$  als linearer, beschränkter Operator auf  $H$  existiert. In diesem Fall kann auch die Bedingung der Vollstetigkeit durch die Stetigkeit von  $K$  und der Hilbertraum  $H$  durch einen allgemeineren Banachraum ersetzt werden.

$\beta$ ) Mit ähnlichen Überlegungen wie in Abschnitt 5 folgt aus Satz 4 leicht ein entsprechender Existenz- und Eindeigkeitsatz <sup>2)</sup> von Dolph [4], S. 291, für den Spezialfall nichtlinearer Integralgleichungen vom Hammersteinschen Typ, dessen wesentliche Voraussetzung die Ungleichung

$$\lambda_n < \mu_n \leq \frac{f(x, y_2) - f(x, y_1)}{y_2 - y_1} \leq \mu_{n+1} < \lambda_{n+1},$$

<sup>1)</sup> Anmerkung bei der Korrektur: Eine ausführliche Untersuchung dieses Iterationsverfahrens unter anderen Bedingungen wie Monotonieeigenschaften von  $K$  und  $f$  wurde bereits von I. I. Kolodner [13] durchgeführt.

<sup>2)</sup> Dolph beweist den Satz mit Hilfe eines Iterationsverfahrens mit veränderlichen Operatoren.

mit den in Abschnitt 5 definierten Zahlen  $\mu_v$  und  $\lambda_v$  ( $v=n, n+1$ ), ist.

7. Krasnoselski [11], S. 165-166, beweist den Satz 2 (Abschnitt 4) über die Existenz einer Lösung der Hammersteinschen Integralgleichung für hinreichend kleine  $\beta$  mit Hilfe einer Folgerung aus dem « Antipodensatz » von Ljusternik, Schnirelmann, Borsuk und Krasnoselski. Der Beweis dieses Satzes benutzt in wesentlichen Teilen die Theorie des topologischen Abbildungsgrades. Hier soll gezeigt werden, dass die betreffende Folgerung — sogar eine leichte Verallgemeinerung — schon mit dem Schauderschen Fixpunktsatz bewiesen werden kann.

*Satz 5.*  $A$  sei ein vollstetiger Operator auf einer Kugel  $K$ ,  $\|x\| \leq R$ , ( $R > 0$ ) eines Banachraumes  $B$  in  $B$ ,  $L$  ein linearer, vollstetiger Operator auf  $B$  in  $B$ .

Auf dem Rande von  $K$ , also für alle  $x \in B$  mit  $\|x\| = R$ , gelte

$$(7.1) \quad \|Ax - Lx\| \leq \|x - Lx\|.$$

Dann existiert ein Fixpunkt  $x = Ax \in K$ .

*Beweis:* 1. Fall: 1 sei Eigenwert von  $L$ . Dann existiert ein  $x$  mit  $\|x\| = R$  und  $x = Lx$ . Aus (7.1) folgt dann  $x = Ax$ .

2. Fall: 1 sei kein Eigenwert von  $L$ . Der auf  $B$  definierte Operator  $\tilde{A}$ ,

$$\tilde{A}x = \begin{cases} Ax & \text{für } \|x\| \leq R \\ \frac{\|x\|}{R} A\left(\frac{x}{\|x\|} R\right) & \text{für } \|x\| > R, \end{cases}$$

ist mit  $A$  vollstetig.

Für  $\|x\| \geq R$  gilt mit (7.1)

$$(7.2) \quad \|\tilde{A}x - Lx\| = \frac{\|x\|}{R} \left\| A\left(\frac{x}{\|x\|} R\right) - L\left(\frac{x}{\|x\|} R\right) \right\| \leq \|x - Lx\|.$$

Da 1 kein Eigenwert von  $L$  ist, existiert zu jedem  $y \in B$  genau ein  $x \in B$  mit  $y = (I - L)x$ , und für alle  $y \in B$  mit  $\|y\| = \|I - L\| \cdot R$  gilt



$$\|y\| = \|I - L\| \cdot R = \|(I - L)x\| \leq \|I - L\| \cdot \|x\|, \\ \text{also } R \leq \|x\|.$$

Daher folgt aus (7.2) mit  $y = (I - L)x$

$$(7.3) \quad \|(\tilde{A} - L)(I - L)^{-1}y\| \leq \|y\| \\ \text{für } \|y\| = \|I - L\| \cdot R.$$

$T = (\tilde{A} - L)(I - L)^{-1}$  ist als Produkt eines vollstetigen und eines stetigen, linearen Operators vollstetig auf  $B$  und bildet den Rand der Kugel  $K'$ ,  $\|y\| \leq \|I - L\| \cdot R$  wegen (7.3) in  $K'$  ab. Folglich existiert nach Schauder ein Fixpunkt  $y = Ty \in K'$ .

Es gilt daher  $(I - L)x = (\tilde{A} - L)x$ , also  $x = \tilde{A}x$ .

Ist  $\|x\| \leq R$ , so ist  $x = Ax$ ; ist  $\|x\| > R$ , so ist

$$x = \tilde{A}x = \frac{\|x\|}{R} A\left(\frac{x}{\|x\|} R\right),$$

$$\text{also } \frac{x}{\|x\|} R = A\left(\frac{x}{\|x\|} R\right) \quad \text{mit} \quad \left\| \frac{x}{\|x\|} R \right\| = R.$$

Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

8. Schlussbemerkungen: 1. Es bleibt die Frage offen, ob auch der «Antipodensatz» von Ljusternik, Schnirelmann, Borsuk und Krasnoselski [11], S. 124, mit Hilfe des Schauderschen Fixpunktsatzes ohne Anwendung der Theorie des topologischen Abbildungsgrades bewiesen werden kann. Dieser Satz besagt, dass für einen vollstetigen Operator  $A$  auf einem Banachraum, dessen Vektorfeld  $\phi = I - A$  in entgegengesetzten Punkten  $x$  und  $-x$  einer Kugeloberfläche  $\|x\| = R$  verschiedene Richtung hat,

$$\frac{\phi(-x)}{\|\phi(-x)\|} \neq \frac{\phi x}{\|\phi x\|},$$

und dort nirgends verschwindet, ein Fixpunkt  $x = Ax$ ,  $\|x\| < R$ , existiert.

2. Allgemeinere Abschätzungsbedingungen für die Funktion  $f(x, y)$  bei Hammersteinschen Integralgleichungen treten bereits bei Hammerstein [1] in der Form

$$\int_0^v f(x, y) dy \leq \gamma \frac{v^2}{2} + C, \quad \gamma < \lambda_1,$$

auf, wobei  $\lambda_1$  die kleinste charakteristische Zahl des symmetrischen, positiv definiten Kernes ist. Nach unserem Wissen ist eine Verallgemeinerung (Dolph [4], Krasnoselski [11] u. a.) in der Form

$$\mu_n v^2 - C_n \leq 2 \cdot \int_0^v f(x, y) dy \leq \mu_{n+1} v^2 + C_{n+1},$$

wobei  $\mu_n, \mu_{n+1}$  dieselbe Bedeutung wie in Abschnitt 5 haben, bisher nur gelungen, wenn der symmetrische Kern nicht zugleich unendlich viele positive und unendlich viele negative Eigenwerte hat.

3. Der Satz 1 unterscheidet sich von einigen entsprechenden Sätzen im Spezialfall Hammersteinscher Integralgleichungen noch dadurch, dass die Normbeschränkung von  $f - \mu I$  nur auf der Oberfläche einer Kugel verlangt wird. Da der Existenzsatz aber für Lösungen im Hilbertraum gilt, ist damit die Bedingung nicht auf ein endliches  $y$ -Intervall eingeschränkt.

Existenzsätze, in denen die Lösungen beschränkte, also insbesondere stetige Funktionen sind, benötigen im Grunde genommen nur das Anwachsen von  $f(x, y)$  in einem endlich-allerdings i. allg. vom Kern  $K(x, y)$  abhängigen  $y$ -Intervall. Über die Grösse dieses Intervalls kann man in gewissen Fällen Aussagen machen, vgl. J. Schröder [8] und E. Bohl [12], die den Schauderschen Fixpunktsatz auf Intervalle in halbgeordneten Banachräumen anwenden.

4. Vielfach ist der Schaudersche Fixpunktsatz und insbesondere der in Abschnitt 4 angewandte Banachsche Fixpunktsatz auch zur numerischen Abschätzung der Lösungen benutzt worden (vgl. etwa J. Schröder [8], L. Collatz [9], E. Bohl [12]). Grundsätzlich ist dies bei allen obigen Sätzen ebenfalls möglich.

Jedoch erhält man bei den Sätzen im Hilbertraum nicht die für numerische Zwecke i. allg. gewünschte Betragsabschätzung der Lösungen. Hierauf wurde in dieser Arbeit, die nur Existenzfragen behandelt, nicht eingegangen.

#### LITERATUR

- [1] HAMMERSTEIN, A., Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen. *Acta Math.*, 54, 117-176 (1930).
- [2] SCHAUDER, J., Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen. *Studia Math.*, 2, 171-180 (1930).
- [3] LERAY, J. und J. SCHAUDER, Topologie et équations fonctionnelles. *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.*, 51, 45-78 (1934).
- [4] DOLPH, C. L., Nonlinear integral equations of the Hammerstein type. *Trans. Am. Math. Soc.*, 66, 289-307 (1949).
- [5] RIESZ, F. und B. SZ.-NAGY, *Leçons d'analyse fonctionnelle*. 1955.
- [6] SCHAEFER, H., Ueber die Methode der a-priori-Schranken. *Math. Ann.*, 129, 415-416 (1955).
- [7] ——— Neue Existenzsätze in der Theorie nichtlinearer Integralgleichungen. *Berichte über die Verh. d. Sächs. Akad. d. Wiss. zu Leipzig, Math.-Nat. Klasse*, 101, Heft 7 (1955).
- [8] SCHRÖDER, J., Anwendung von Fixpunktsätzen bei der numerischen Behandlung nichtlinearer Gleichungen in halbgeordneten Räumen. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 4, 177-192 (1959).
- [9] COLLATZ, L., *The Numerical Treatment of Differential Equations*. 3. Aufl. Berlin 1960, insbes. Kap. 1, § 5.
- [10] EHRLMANN, H., Nichtlineare Integralgleichungen vom Hammerstein'schen Typ. *Math. Ztschr.*, 82, 403-412 (1963).  
On implicit function theorems and the existence of solutions of nonlinear equations. *L'Enseignement math.*, 9, 129-176 (1963).
- [11] KRASNOSELSKI, M. A., *Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations*. Oxford, 1964.
- [12] BOHL, E., Die Theorie einer Klasse linearer Operatoren und Existenzsätze für Lösungen nichtlinearer Probleme in halbgeordneten Banach-Räumen. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 15, 263-288 (1964).
- [13] KOLODNER, I. I., Equitations of Hammerstein type in Hilbert spaces. *Techn. Report 47*, Univ. of New Mexico, 1963.

Clausthal, den 19. November 1964.  
Institut für Mathematik  
der Technischen Hochschule Clausthal.