

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 11 (1965)  
**Heft:** 2-3: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Rubrik:** SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE SUISSE

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE SUISSE

*Frühjahrssitzung in Bern, 7. Juni 1964*

Am 3. Juni 1964 fand im mathematischen Institut der Universität Bern die Frühjahrssitzung der Gesellschaft statt. Herr Dr. J. P. Sydler, Direktor der Bibliothek der ETH, hielt einen Vortrag über «Aperçus sur la vie et l'œuvre de Jacob Steiner». Anschliessend begaben sich die Teilnehmer zum gemeinsamen Mittagessen nach Utzenstorf, dem Geburtsort Jakob Steiners. Zum Abschluss wurde gemeinsam die J. Steiner-Gedenktafel an der Kirche besucht.

## APERÇUS SUR LA VIE ET SUR L'ŒUVRE DE JAKOB STEINER

par J.-P. SYDLER

Jakob Steiner, dont vous m'avez demandé d'honorer aujourd'hui la mémoire, est mort il y a un peu plus de cent ans ici, à Berne, le 1<sup>er</sup> avril 1863. Au lieu de chercher moi-même une épithète élogieuse pour ce grand savant, permettez-moi de rappeler quelques citations: Pour Otto Hesse: «Steiner gilt für den ersten Geometer seiner Zeit.» Geiser dit: «Wenn in einem späteren Zeitalter ein Geometer alle seine Zeitgenossen und Mitmenschen an Fülle der Erfindungskraft und Meisterschaft der Darstellung übergläntzt, so wird man ihn den wiedererstandenen Steiner nennen.» Geiser dit encore, à l'exhumation des restes de Steiner: «Wir haben in ihm den grössten Geometer unseres Zeitalters besessen, auf dessen Schöpfungen noch künftige Jahrhunderte in Forschung und Lehre weiterbauen werden.» Quant à Jakobi, il écrit: «Er hat nicht nur die Synthese gefördert, sondern auch für alle andere Zweige der Mathematik ein Muster einer vollkommenen Methode und Durchführung aufgestellt.» Cremona parle du «Sphinx célèbre» et Klöden, directeur de la Gewerbeschule de Berlin, ira même jusqu'à écrire: «Es ist in der Tat nicht zuviel gesagt, wenn man behauptet, dass nach dieser Arbeit der Verlust der Bücher des Apollonius v. Perga von den Berührungen verschmerzt werden kann, da hier mehr gegeben wird, als dort verloren.»

Rappelons enfin que, sur la carte de fête du premier congrès international de mathématiques à Zurich, on a représenté les portraits des plus grands mathématiciens suisses des trois siècles passés: les Bernoulli, Euler et Steiner.

Je ne saurais avoir la prétention de vous montrer en un court exposé toutes les faces du génie d'un homme qui suscite tant d'éloges et c'est pourquoi je me bornerai à quelques aperçus de sa vie et de son œuvre.

Steiner est né le 18 mars 1796 à Utzensdorf, petit village qui nous est aussi connu grâce à un contemporain de Steiner, Albert Bitzius, dit Jérémias Gotthelf. Steiner est né dans une famille de condition modeste et son éducation fut très rudimentaire. A 14 ans, il savait à peine lire et écrire; par contre, il montrait une disposition très nette pour le calcul et organisa même un petit commerce, en faisant de tête les tractations des paysans au marché. En 1814, malgré l'opposition de ses parents, il se rend à Yverdon où Pestalozzi l'accepte gratuitement dans son institut. Steiner se met au travail avec une espèce de fureur. Les cours de mathématiques de Maurer et de Leuzinger l'en-thousiasment. Bützberger a tracé un portrait du jeune Steiner de ces années: on le voit se battre avec les polygones, en étudier toutes les propriétés, intersections, rapports, points singuliers. Au bout de cinq semaines, il résoud les problèmes désignés comme difficiles. Tout ne vient d'ailleurs pas par inspiration, comme le révèle sa remarque: «Gefunden Samstag den 10. Christmonat 1814, 3+3+4 St. daran gesucht, des Nachts um 1 Uhr gefunden.» Cette obstination porte ses fruits. Après un an et demi, il est engagé comme maître de mathématiques à l'institut. Trois ans plus tard, en 1818, il part pour Heidelberg avec un bon certificat de Pestalozzi. Il y reste cinq semestres, donnant des leçons particulières pour payer ses études à l'université. Tout à coup, un peu trop précipitamment, il part pour Berlin où un ami lui a conseillé de se présenter pour une place au Gymnase Werden. Mais il lui faut d'abord subir les examens habituels. Si son travail de mathématiques est très bien noté, les remarques de Hegel sur celui de philosophie sont déplorables. Il est cependant autorisé à donner provisoirement des cours de mathématiques aux degrés inférieurs, après avoir passé un examen oral où sa précision est louée, mais où on constate beaucoup de lacunes, même en mathématiques. Pourtant, dix-huit mois plus tard, il est congédié, car on ne peut pas lui confier l'enseignement d'une autre discipline. Il doit alors donner des leçons particulières pour subsister. Il passe d'ailleurs pour un excellent professeur privé et compte parmi ses élèves le prince Auguste et le fils de Wilhelm von Humboldt. Steiner se plaint de ne pouvoir consacrer tout le temps qu'il désire à ses recherches. Cependant ses travaux de géométrie commencent à faire parler de lui, puisque Crelle se décide en 1826 à publier son *Journal für die reine und angewandte Mathematik*,

certain qu'il est de pouvoir compter sur les contributions de deux savants: Steiner et Abel. Autre circonstance heureuse: On crée en 1826 la Gewerbeschule de Berlin et le directeur Klöden, partisan des méthodes de Pestalozzi, fait engager Steiner. Son enseignement est certainement excellent, mais son caractère laisse parfois à désirer. Klöden doit le prier, en 1831, «de ne pas employer d'expressions grossières, de ne pas se laisser aller à la colère, car il nuit ainsi à la réputation de l'école».

Nous voici arrivés en 1832, l'année où Steiner publie sa «Systematische Entwicklung» et nous nous trouvons au tournant de sa vie. Les événements s'enchaînent favorablement. En 1834, il est nommé professeur extraordinaire à l'Université de Berlin, poste qu'il occupera jusqu'à sa mort. En 1833 déjà, l'Université de Königsberg lui décerne le titre de docteur h. c.; en 1834 il devient membre de l'Académie des sciences de Berlin; en 1853, membre correspondant de l'Accademia dei Lincei, puis en 1854, membre correspondant de l'Académie des sciences de Paris.

Si sa renommée est assurée, il n'en a pas moins à faire face à d'autres soucis. Comme tout professeur, il combat pour améliorer sa situation, mais ne sera jamais nommé professeur ordinaire. Et surtout, sa santé laisse à désirer. En 1833 déjà, il doit demander deux mois de congé pour se remettre et plus tard, toujours plus fréquemment, il s'arrêtera pendant un semestre, si bien que sa vie se passera à Berlin durant l'hiver et de ville d'eau en ville de cure durant l'été: Vichy, Bad Gastein, Righi. Il revient de plus en plus souvent à Berne où il retrouve Schläfli et où il est même question pour lui d'une chaire à l'université. Il s'éteint à Berne le 1<sup>er</sup> avril 1863.

Telle fut, brièvement décrite, la vie de Steiner. Il nous faut encore voir un peu son caractère.

Son don le plus remarquable fut probablement sa vision de l'espace. Il devait se représenter les figures avec une précision et une plasticité incroyables et réussir à en déduire toutes sortes de conséquences. Souvent, dans sa correspondance avec Schläfli, il note qu'il n'a pas encore une vue très nette de certaines propriétés. Il ne s'agit pas de relations simples; cela concerne les genres de contact de cônes en des points multiples ou les relations entre les tangentes de courbes compliquées. Il est une phrase touchante de Steiner malade qui se rapporte à cette vision. Il se plaint à Schläfli de sa fatigue et dit qu'il s'endort «lorsqu'il ferme les yeux pour voir». Cette visualisation a évidemment ses dangers et ses limites. Steiner en était conscient et c'est pourquoi il soumettait volontiers ses résultats au contrôle des analystes, à Jakobi par exemple, à Schläfli surtout. Dans l'introduction à son mémoire sur les maxima, il écrit d'ailleurs:

«Séduits par la facilité que donne le calcul pour résoudre certaines classes de questions relatives aux maxima et minima, quelques

géomètres ont même conseillé l'abandon entier de la synthèse pour se livrer uniquement à la voie plus facile de l'analyse... Nous croyons que les deux méthodes, bien loin de s'exclure et de se repousser mutuellement, sont au contraire indispensables pour vaincre les grandes difficultés de la matière et conduire ainsi à la solution des nombreux problèmes qui restent encore à traiter; une fois le but atteint, il sera toujours temps de comparer entre elles ces deux méthodes et les services qu'elles auront pu rendre. »

Non seulement il sent parfois la nécessité d'étayer ses résultats par des démonstrations plus sûres, mais il doute même que ses résultats soient justes. Il termine par exemple son travail sur les courbes à centres par les mots suivants:

« Ich will hier noch bemerken, dass ich einige in dieser Abhandlung aufgestellten Sätze nicht genügend bewiesen habe, sodass dieselben möglicherweise fehlerhaft sein können. Sollte dies der Fall sein, so mag die Neuheit und Schwierigkeit des Gegenstandes, zumal im Vergleich mit der von mir befolgten synthetischen Betrachtungsweise, mich einigermaassen entschuldigen. »

Mais si Steiner n'aime pas l'analyse, il semble adorer l'analyse combinatoire. Cela lui est peut-être resté de l'enseignement qu'il reçut à Yverdon, où on lui apprit à voir tous les détails des problèmes. Un exemple caractéristique apparaît dans son article sur les courbes du quatrième degré. Les 28 tangentes doubles peuvent être classées 4 à 4 en 315 groupes, de telle sorte que les 8 points de contact sont sur une conique. Les 378 points d'intersection de ces tangentes constituent 63 groupes de 6 points situés sur une conique. A chaque point d'intersection P correspondent deux points Q et R, intersection des cordes de contact. Les 18 points P, Q, R d'un même groupe sont sur une cubique. Chacune des 63 cubiques coupe la courbe de base en 12 points. Ces 756 points sont les points de contact des coniques surosculatrices qui touchent encore la courbe en un autre point. Et Steiner continue encore. J'avoue que cette débauche de résultats a un certain inconvénient: ils sont si touffus qu'on en oublie parfois la simplicité de leur origine et la lecture de certaines pages de Steiner en devient assez ardue.

Et pourtant ce besoin de synthèse est fondamental chez Steiner. Il écrit dans son *curriculum vitae*:

« Schon als Schüler drang sich mir, nachdem ich mehrere Lehrbücher der Geometrie kennen gelernt, die Zufälligkeit der Ordnung auf, die aus dem Bedürfnis des Zusammenhangs der einzelnen Sätze als Solcher entsprang; ich fand darin etwas Willkürliches, dass man die Notwendigkeit der Wissenschaft aus ihrem materiellen Inhalt nachwies, statt dass nach einem mich dunkel belebenden Gefühl die ganze Manifaltigkeit der Materie aus einer allgemeinen Einheit derselben folgen und demgemäß erschöpft werden müsste... »

» Als Lehrer stellte ich mir daher die Aufgabe, womöglich eine jede Desziplin nur als Resultate der Entwicklung dieses einzigen Gedankens an ihrem Orte heraustreten zu lassen. »

Et c'est vraiment toute sa vie qu'il consacrera à cette recherche de synthèse.

Mesdames et Messieurs, laissez-moi relever aussi un côté négatif du caractère de Steiner, qui touche d'ailleurs plus à la morale qu'à la science, mais qui déçoit un peu, comme toujours lorsque l'on cons-

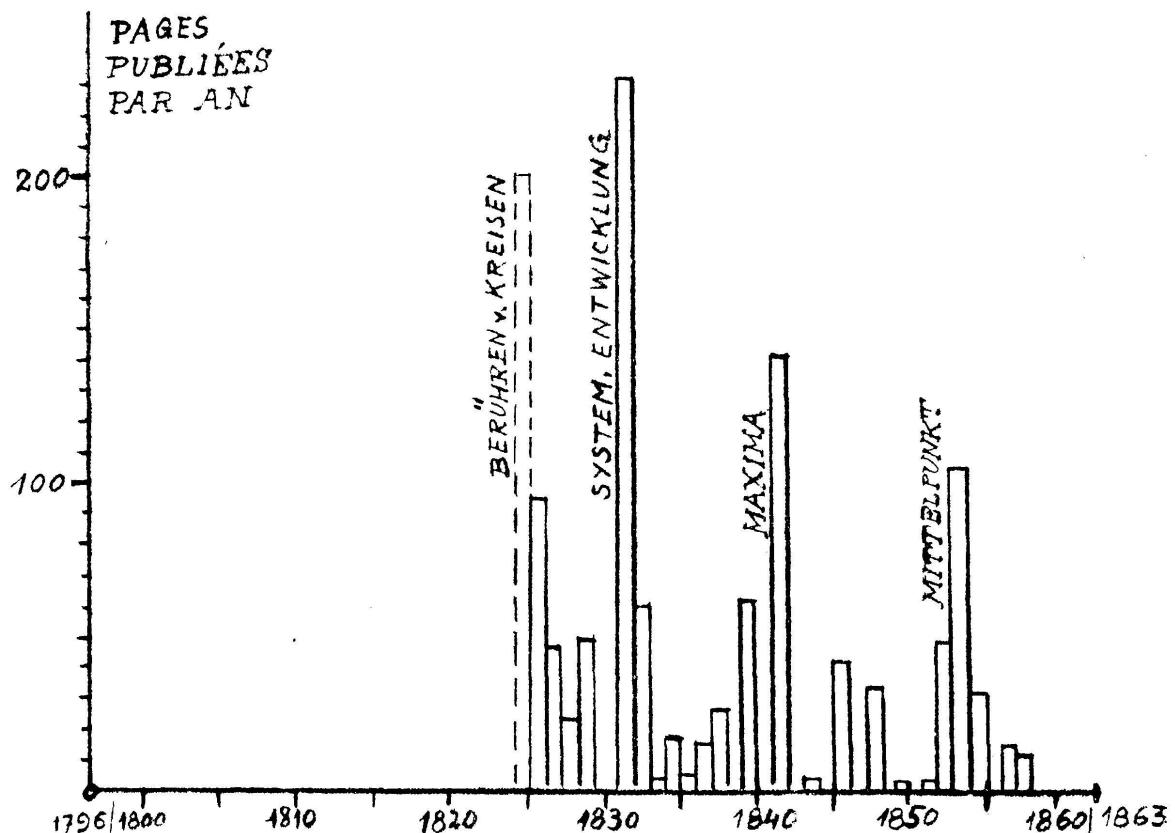


Fig. 1.

tate qu'un génie est aussi un homme et qu'il a aussi ses défauts. J'aimerais parler de sa susceptibilité et de son comportement avec les découvertes des autres. En effet, il a souvent eu des démêlés avec d'autres savants auxquels il reprochait de ne pas assez reconnaître ses mérites. Il est probable que la brouille qu'il eut avec Schlafli ait eu la même origine. Par contre, lui-même oublie assez souvent de citer ses sources. Par exemple, on lit dans une de ses notes de 1853: « Ein Engländer (Cayley) soll gefunden haben, dass  $f^3$  im Allgemeinen 27 Geraden enthält. » Une autre remarque montre aussi clairement qu'il connaissait les travaux de Sylvester et de Cayley, mais on ne trouve aucune citation dans le travail sur les surfaces du 3<sup>e</sup> degré qu'il publie l'année suivante. Il est certain aussi que Jakobi lui fit connaître les ouvrages de Poncelet. Ailleurs encore, Steiner indique

les relations de Plücker pour les courbes et s'en attribue la paternité. Il est possible que, dans la fièvre de ses découvertes, il ait effectivement oublié que certaines idées n'étaient pas de lui et il est fort possible qu'il les ait redécouvertes lui-même. Même en écartant tous les cas où un doute subsiste, l'œuvre originale de Steiner reste immense. Pour en avoir une idée, dessinons peut-être le diagramme de ses publications (fig. 1).

Sa première œuvre mûre pour la publication n'est peut-être pas une œuvre transcendante, mais elle est remarquable. Il s'agit de son *Allgemeine Theorie über das Berühren und Schneiden der Kreise und der Kugeln*. Comme vous le savez, cet ouvrage a eu une histoire étrange. Steiner en écrivit le manuscrit durant les années 1823-26. Or elle ne fut publiée qu'en 1931 par Fueter et Gonseth, lorsque l'on eut mis en valeur les papiers retrouvés à Berne. Autre singularité: Le titre original en était: *Das Schneiden (mit Einschluss der Berührung) der Kreise in der Ebene, das Schneiden der Kugeln im Raume, und das Schneiden der Kreise auf der Kugelfläche*. Mais dans le livre publié, on ne trouve plus trace du chapitre sur le contact des cercles sur la sphère. Cependant, il semble que M<sup>lle</sup> Jegher ait trouvé des fragments de cette partie manquante parmi les documents de l'Institut de mathématiques de Berne. Il est donc pensable qu'on ne connaisse pas tout l'œuvre de Steiner et c'est là un point sur lequel nous reviendrons.

Dans son étude des cercles, Steiner part des propriétés les plus élémentaires, des axes de même puissance et des points de similitude; le contact est considéré comme cas particulier de la section sous un certain angle. Par une progression sûre, on arrive à toutes les propriétés des cercles et des sphères et l'ouvrage s'achève par 106 exercices qui traitent tous les cas possibles pour 1, 2, ..., 8 sphères soumises à certaines conditions. L'ensemble donne une impression d'équilibre, d'ordre étonnant, qui suggère vraiment l'idée d'un schéma général dont tout découle, au point que Gonseth a pu émettre l'hypothèse que Steiner a employé, plus ou moins consciemment, le modèle obtenu en projetant le plan sur la sphère et en remplaçant les cercles par leur pôle par rapport à cette sphère. Cela expliquerait aussi pourquoi il a fait disparaître le chapitre des cercles sur la sphère, trop révélateur de sa méthode. N'oublions pas que fleurissait alors la mode des énigmes posées aux autres savants. On retrouve d'ailleurs dans toute l'œuvre de Steiner quantité de problèmes ou de théorèmes dont on ne sait pas très bien s'il les a résolus ou seulement proposés.

Puisque nous parlons des cercles, citons brièvement une autre publication de Steiner, la deuxième qui ait paru dans le *Journal de Crelle* et qui porte le titre modeste de « Einige geometrische Betrachtungen ». Steiner y résoud différents problèmes sur les cercles, en particulier le problème de Pappus qui établit des relations entre les

rayons des cercles en chaîne inscrits entre deux cercles, et surtout le problème de Malfatti: Trouver trois cercles tangents deux à deux et dont chacun touche deux côtés d'un triangle donné (fig. 2). Non seulement Steiner résoud le problème avec tous ses cas particuliers, mais il le généralise en le transportant dans l'espace: Trouver sur une quadrique trois coniques tangentes deux à deux entre elles et tangentes chacune à deux de trois coniques données. Là encore, on peut se demander s'il n'a pas employé son modèle de la sphère. Ce que nous pouvons aussi souligner dans cette publication, c'est le besoin que Steiner avait d'établir des relations entre des propriétés à première vue indépendantes. Relevons aussi une citation de l'introduction: « Der Verfasser pflegt in der Regel nicht eher über eine Aufgabe oder über einen Gegenstand weiter nachzulesen, bevor er nicht selbst eine Auflösung oder Sätze darüber gefunden hat, um alsdann seine Resul-

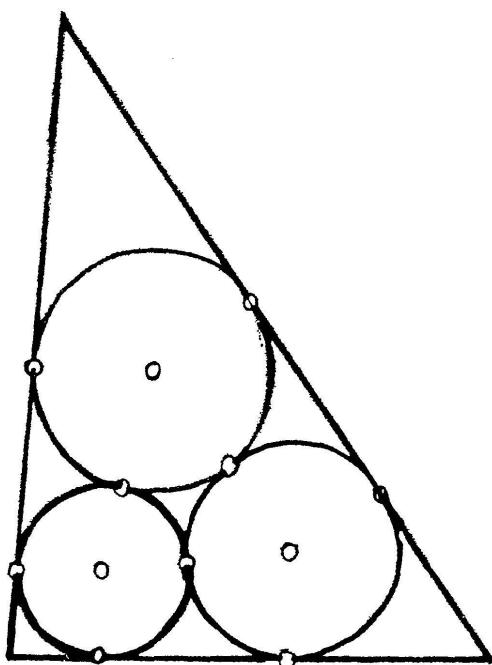


Fig. 2.

tate mit den schon vorhandenen zu vergleichen. » On comprend que, avec une telle disposition d'esprit, Steiner n'ait pas manqué d'avoir des difficultés de priorité avec d'autres savants.

Avant d'aborder les découvertes fondamentales de Steiner, penchons-nous encore un moment sur un autre de ses grands thèmes, celui des extrêmes. Faisons un saut dans le temps et voyons un peu l'ouvrage: *Ueber Maximum und Minimum bei den Figuren in der Ebene, auf der Kugelfläche und im Raum überhaupt*. Tout d'abord, un détail bibliographique. La première partie fut traduite et publiée en français dans le *Journal de mathématiques* de Liouville après avoir été présentée en 1841 à l'Académie des sciences de Paris, puis les deux parties parurent, en français toujours, dans le *Journal de Crelle* en

1842 et ne furent publiées en allemand que dans les *Oeuvres complètes*, d'après le manuscrit original, en 1882. C'est à ce moment d'ailleurs que le manuscrit semble avoir disparu, probablement dans la corbeille à papier de la rédaction. Nous ne voulons pas nous appesantir sur la rigueur axiomatique des démonstrations de Steiner. Il semble que, presque toujours, il admette l'existence du maximum. Par contre, il s'efforce de trouver plusieurs méthodes pour arriver aux résultats. Prenons par exemple le cas des figures de périmètre donné dont l'aire

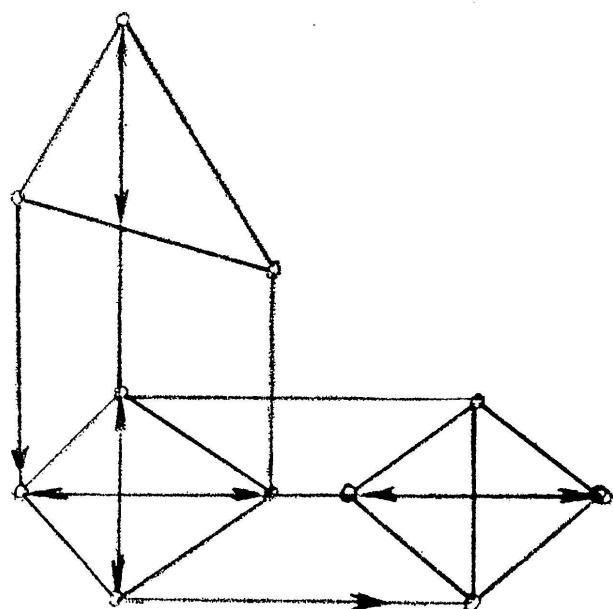


Fig. 3.

doit être maximale. Une telle figure doit d'abord être convexe. Si  $A$  et  $B$  sont les points qui divisent le pourtour en deux longueurs égales, la droite  $AB$  doit couper la surface en deux figures de même aire, sinon, par symétrie, on obtiendrait une surface plus grande. Soit  $D$  un point sur l'arc  $AB$ . L'angle  $ADB$  doit être droit, sinon le triangle  $ADB$  pourrait être transformé en un triangle rectangle, de surface plus grande, sur les côtés duquel on pourrait accoler les parties de surface sous-tendues par  $AD$  et  $DB$ . Par conséquent, la surface cherchée est un cercle.

Autre méthode: En partant de considérations simples sur les triangles, on montre que, si les côtés d'un polygone, sauf la base, sont donnés, l'aire est un maximum si tous les sommets sont sur un cercle centré au milieu de la base. Et on retrouve le cercle en remplaçant dans le cas précédent un triangle par un polygone.

Ou encore: La ligne de longueur donnée qui joint deux points des côtés d'un angle et qui délimite une surface d'aire maximum est un arc de cercle centré à l'intersection des droites. En effet, cette ligne doit être convexe et symétrique par rapport à la bissectrice des deux droites, puis symétriques par rapport à toutes les autres bissectrices

des demi-angles formés. C'est donc un arc de cercle. Et de là, Steiner se permet de passer directement au cercle, sans trop se préoccuper de ce qui se passe lorsque l'angle des droites est plus grand que  $\pi$ .

Sa méthode la plus connue est celle de la symétrisation qu'il donne comme nouvelle possibilité de démonstration. Considérons dans un triangle par exemple tous les segments contenus dans le triangle et parallèles à une direction fixe. Déplaçons ces segments sur leurs droites de façon à ce que leurs extrémités soient symétriques par

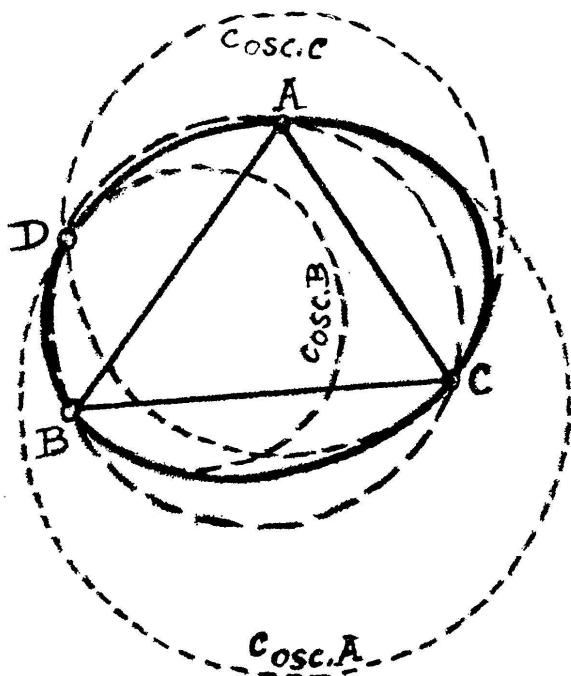


Fig. 4.

rapport à un axe qui leur est perpendiculaire. Le quadrilatère obtenu a même surface, mais son périmètre est plus petit. En répétant la construction pour des directions quelconques, on voit que la figure de périmètre donné et de surface maximale est celle qui a autant d'axes de symétrie que l'on désire (fig. 3).

Steiner emploie aussi cette dernière méthode dans le cas de l'espace, en indiquant d'ailleurs une deuxième méthode, sur laquelle je ne veux pas insister. Il s'intéresse aussi aux problèmes de maximum relatifs aux pyramides, aux cylindres et, de plus, à tous les problèmes compliqués suscités par des conditions supplémentaires, comme celui de trouver la figure de périmètre donné et d'aire maximale tracée sur une surface et inscrite à un certain nombre de courbes données. En particulier, pour qu'un polygone inscrit à une courbe soit extrême, il faut que la tangente en chaque sommet soit parallèle à la diagonale qui joint les sommets voisins.

Nous avons un peu insisté sur cette question des maxima d'abord parce qu'elle montre bien l'imagination de Steiner, sa fantaisie pour

trouver les méthodes qu'il faut pour établir les propriétés qu'il veut démontrer. Mais aussi parce que très souvent il a repris ce thème, pourrait-on dire. Dans de nombreux théorèmes, il recherche s'il n'y a pas encore en plus un extrême à faire apparaître. Ainsi, par exemple, il montre que, par tout point  $D$  d'une ellipse, passent trois cercles osculateurs à l'ellipse en  $A, B, C$ . Les points  $A, B, C, D$  sont sur un cercle, mais de plus, le triangle  $ABC$  est un triangle inscrit d'aire maximale (fig. 4).

Il est temps de nous intéresser maintenant au chef-d'œuvre de Steiner. C'est en 1832 que paraît son livre de 230 pages sur la *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander*, 1. Theil. L'ouvrage devait compter cinq parties, seule la première a été rédigée par Steiner. Par contre, il en a fait le sujet de nombreux cours à Berlin et a préparé plusieurs notes sur les « Populäre Kegelschnitte » qui devaient prendre place dans cet ensemble. Heureusement, deux de ses élèves en ont publié en 1867 des parties, d'après des manuscrits ou d'après les leçons. Geiser a donné: *Die Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung* et Schröter: *Die Theorie der Kegelschnitte gestützt auf projektive Eigenschaften*, 560 pages qui correspondent au cinquième chapitre de la *Systematische Entwicklung*. Nous pouvons donc avoir une bonne idée de l'ensemble et assez bien cerner les intentions de Steiner.

Pour faire ressortir l'importance de cet ouvrage, il convient de brosser à grands traits le tableau de la situation de la géométrie au début du XIX<sup>e</sup> siècle.

On peut distinguer deux aspects de la géométrie: la géométrie synthétique et la géométrie analytique. La géométrie synthétique considère les objets pour eux-mêmes, dans l'espace, et cherche leurs propriétés en se basant sur une sorte de réalisation, parfois uniquement imaginative, mais qui suppose une certaine visualisation ou représentation des figures. Cette vision permet ensuite d'appliquer le raisonnement logique aux endroits les plus favorables, ce qui révèle de nouvelles propriétés, une nouvelle vision, etc. La géométrie analytique, elle, remplace les objets par des coordonnées et des paramètres; ce remplaçant de l'objet est porté dans le domaine du calcul où il est soumis à des opérations logiques dont on tire les conséquences et ces conséquences sont finalement retraduites pour ainsi dire dans le langage géométrique. La géométrie fut d'abord essentiellement synthétique, mais il semble qu'Apollonius ait fait quelques essais de géométrie analytique. Nouveaux essais timides 2000 ans plus tard avec Viète, Descartes, Fermat. Mais le grand essor de la géométrie analytique a lieu après la découverte du calcul infinitésimal par Newton et Leibnitz et c'est son âge d'or, dominé entre autres par Euler et Clairaut. Nous arrivons ainsi à la fin du XVIII<sup>e</sup> siècle, où Monge écrit son *Application de l'analyse à la géométrie*. Or c'est ce

même Monge qui publie peu après ses *Leçons de géométrie descriptive* qui vont provoquer un renouveau de la géométrie synthétique. Le dessin, les projections, permettent de nouveau de raisonner sur des objets vus, et de nombreux savants abandonnent la géométrie analytique pour se tourner vers la géométrie synthétique. En 1822 paraît le *Traité des propriétés projectives des figures* de Poncelet. En 1824, Poncelet présente à l'Académie des sciences de Paris son *Mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques* qui est publié partiellement en 1826 et *in extenso* en 1829. Dans ces ouvrages, il étudie les propriétés des figures qui restent invariantes par une projection centrale, le rapport anharmonique en particulier. Pour lui, la dualité découle essentiellement de la polarité par rapport aux coniques. Relevons encore son principe de continuité, qui attribue les mêmes propriétés à deux figures générales qui se transforment l'une dans l'autre de façon continue, et son introduction de certains éléments imaginaires, comme par exemple les points cycliques des cercles.

On a ainsi une idée de la géométrie vers 1820-1830 et l'on voit ce que Steiner pouvait avoir appris lorsqu'il rédigeait son *Entwicklung*. Qu'a-t-il apporté de nouveau ? Il définit d'abord les formes fondamentales dont il va se servir : ponctuelles, faisceaux de droites, de coniques. Entre ces éléments intervient d'abord une correspondance biunivoque spéciale, la perspectivité, ce qui oblige à considérer les éléments à l'infini. On passe de là à la correspondance biunivoque générale, la projectivité entre les formes fondamentales, dont la dualité de Poncelet n'est plus qu'un cas particulier. Et surtout, les formes projectives dans un même espace engendrent des courbes et des surfaces et une quantité de propriétés découlent soudain d'un principe simple. Un grand nombre de théorèmes qui semblaient ne posséder aucune relation entre eux viennent s'ordonner dans une vaste structure organique. La géométrie projective semble actuellement si simple et si claire qu'on en oublie un peu l'effet qu'eut sa découverte. Il faut reconnaître que Steiner sut en tirer immédiatement un nombre incroyable de conséquences, si bien que l'on désigna les faisceaux projectifs comme la « machine à vapeur » de Steiner. Je ne vais pas me permettre de parler plus longuement de géométrie projective à des mathématiciens chevronnés. Je voudrais pourtant citer un seul exemple simple, qui montre la virtuosité de Steiner dans la recherche des conséquences d'une propriété à première vue élémentaire.

Dans le plan, deux faisceaux projectifs de droites engendrent une conique. Réciproquement, en projetant les points d'une conique à partir de deux d'entre eux, on obtient deux faisceaux projectifs.

Dualemnt, les droites de jonction des points correspondants de deux ponctuelles projectives enveloppent une conique. Réciproquement, les tangentes à une conique déterminent sur deux d'entre elles des ponctuelles projectives.

Considérons dès lors six points sur une conique, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Projetons les points 2346 à partir de 1 sur 34 et à partir de 5 sur 32. Nous obtenons deux ponctuelles projectives, et même perspectives puisque 3 se correspond à lui-même. Par conséquent, les droites  $2' 2'' = 12$ ,  $4' 4'' = 45$  et  $6' 6''$  se coupent en un point, c'est-à-dire: les trois points 12 — 45, 23 — 56 et 34 — 61 sont sur une droite. C'est le théorème de Pascal.

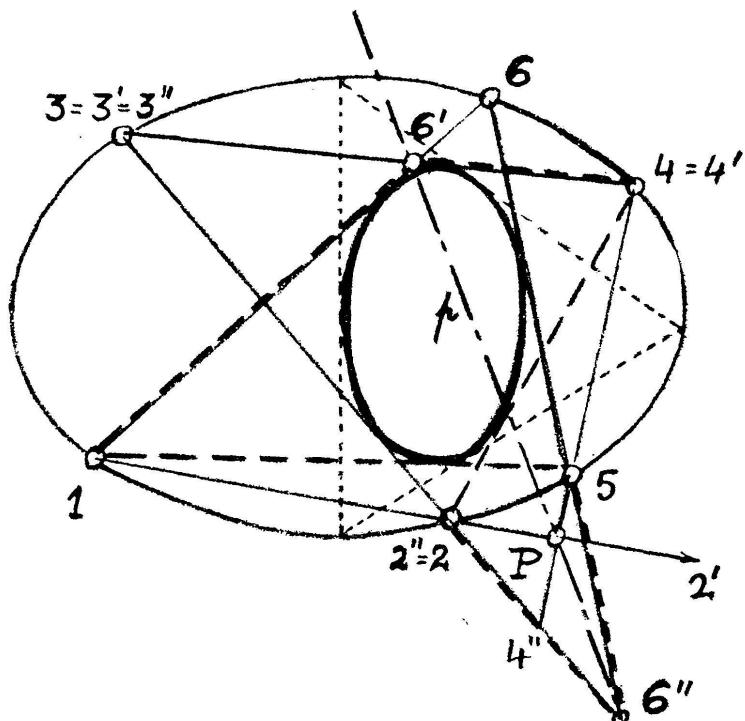


Fig. 5.

Steiner ne saurait en rester là et il réussit à employer à la fois une propriété, sa réciproque et la propriété duale dans la même figure. En effet, si l'on considère l'hexagone 156'' 246', on voit que les diagonales se coupent en un point P et par conséquent les six droites sont tangentes à une conique. Or ces six droites constituent les deux triangles 234 et 561. Par conséquent, deux triangles inscrits à une conique sont circonscrits à une autre conique. Ou encore: Si on peut tracer un triangle inscrit à une conique et circonscrit à une autre, on peut en tracer une infinité. En disant brièvement: si un triangle inscrit-circonscrit se ferme, tous les autres se ferment, on voit que l'on a ici un des théorèmes de fermeture, leitmotiv de Steiner (fig. 5).

Même alors, le problème n'était pas encore épuisé pour Steiner, et une autre partie de son esprit se met en marche, son goût combinatorie. En effet, si nous reprenons notre conique, nous voyons que les mêmes raisonnements jouent si nous prenons les six points dans un autre ordre. Il doit donc exister plusieurs droites de Pascal. Quelles sont leurs relations? Voilà bien un problème que Steiner ne saurait laisser irrésolu. Et il montre que l'hexagone mystique se compose par

permutations de 60 hexagones qui déterminent 60 droites de Pascal. Ces 60 droites se coupent 3 à 3 en 20 points de Steiner qui, eux, sont 4 à 4 sur 15 autres droites de Steiner, lesquelles se coupent 3 à 3 dans les 20 points de Steiner. Alors et seulement alors, on peut abandonner le problème, il ne reste probablement plus grand-chose à en tirer.

On comprend pourquoi la *Systematische Entwicklung* est un ouvrage fondamental, d'abord à cause des idées de base simples et géniales, mais aussi à cause de la façon magistrale dont Steiner sait en jouer. Un des seuls points qui soit aujourd'hui démodé est celui des éléments imaginaires, dont l'acception est encore un peu flottante et qui oblige souvent à des distinctions entre ellipse et hyperbole, entre points réels, confondus ou imaginaires. Steiner écrit même dans une lettre à Schläfli qu'il ne comprend pas un mot de ce que Schläfli lui dit des points communs à tous les cercles. Cela enlève-t-il beaucoup à l'importance de l'œuvre ? Je ne crois pas ! Avant de quitter ce livre, rappelons qu'il se termine par une liste de 85 problèmes. Un élève de Kollros, Karam, leur a consacré une thèse qui a révélé que trois des problèmes proposés sont toujours irrésolus. Il est peut-être permis de les rappeler ici.

70. Quelles sont les propriétés de toutes les quadriques semblables qui passent par 4 (ou 5) points de l'espace; quels sont l'enveloppe, le lieu des centres, le lieu des foyers, etc. ?
76. Le nombre des faces d'un polyèdre étant donné, de quelle nature peuvent être ces faces et combien y a-t-il de polyèdres différents ? Exemple: 1 tétraèdre; 2 pentaèdres (4 tr., 1 quadr./2 tr., 3 quadr.); 7 hexaèdres (6 tr./5 tr.; 1 pent./4 tr.; 2 quadr./3 tr.; 2 quadr.; 1 pent./2 tr.; 4 quadr./2 tr.; 2 quadr.; 2 pent./6 quadr.).
77. Etant donné un polyèdre convexe quelconque, existe-t-il toujours (ou quand) un polyèdre de même type qui se laisse inscrire ou circonscrire à une sphère ou à une surface du second degré ?

Il est un peu hasardeux de vouloir dresser l'historique des recherches ultérieures de Steiner. Il avait sans cesse des quantités de problèmes en tête, et l'esquisse que nous pouvons tenter, si elle ne correspond pas à la réalité, permettra peut-être d'imaginer son champ d'activité.

Ayant en main son prestigieux instrument de la projectivité, Steiner commence par coordonner toutes les propriétés des coniques et des quadriques. Il a vite fait le tour des conséquences des faisceaux de droites; les faisceaux de courbes le mènent aux courbes et aux surfaces plus générales. Que peut-on bien généraliser ? Dans la polarité par rapport aux coniques, la polaire d'un point est la droite qui joint les points de contact des tangentes menées par le pôle. Qu'en est-il pour une courbe quelconque ? D'un point, on peut mener  $n(n - 1)$  tangentes à une courbe d'ordre  $n$ . Or les  $n(n - 1)$  points

de contact sont sur une courbe de degré  $(n - 1)$ . On peut le montrer en appliquant le principe de continuité de Poncelet. Soient  $C_1$  la courbe donnée et  $C_2$  une courbe obtenue par une similitude de centre  $P$ . Les  $n^2$  points d'intersection de  $C_1$  et  $C_2$  comprennent  $n$  points à l'infini et  $n^2 - n$  points dans le fini. Parmi le faisceau des courbes d'ordre  $n$  qui passent par ces  $n^2$  points, celle qui passe par un point de la droite à l'infini dégénère en cette droite et une courbe d'ordre  $n - 1$  passant par tous les points dans le fini. Or, quand  $C_2$  tend vers  $C_1$ , les  $n(n - 1)$  points base donnent les points de tangence cherchés. On obtient ainsi la première polaire du point  $P$  par rapport à la courbe. La première polaire de la première polaire est la deuxième polaire de  $P$  par rapport à la courbe. On peut donc parler de la  $k^e$  polaire de  $P$ , courbe de degré  $(n - k)$ , en particulier de la  $(n - 2)^e$  qui est une conique, et de la  $(n - 1)^e$  qui est une droite. On introduit aussi des polaires mixtes: la  $k^e$  polaire de  $P$  par rapport à la  $j^e$  polaire de  $Q$  est identique à la  $j^e$  polaire de  $Q$  par rapport à la  $k^e$  polaire de  $P$ . En outre, si  $Q$  est sur la  $k^e$  polaire de  $P$ , la  $(n - k)^e$  polaire de  $Q$  passe par  $P$ . Si  $P$  décrit une courbe d'ordre  $r$ ,  $D^r$ , l'enveloppe de la  $x^e$  polaire de ses points sera une courbe

$$[(D^r)_x : A^n] = E^{r(r+2x-3)(n-x)}.$$

Toutes ces propriétés se généralisent dans l'espace et permettent de forger un nouvel instrument d'une puissance remarquable qui sera à la base des développements de la géométrie algébrique, de l'école italienne surtout. Steiner a vu bientôt l'importance que présentaient les polaires pour l'étude des éléments multiples des courbes et des surfaces. Par exemple, si la  $x^e$  polaire de  $P$  a un point double en  $Q$ , la  $(n - x)^e$  polaire de  $Q$  a un point double en  $P$ . En particulier, le lieu des points  $P$  dont la  $(n - 2)^e$  polaire est un couple de droites ou le lieu des points doubles des premières polaires est une courbe de degré  $3(n - 2)$ . Le lieu des points dont la première polaire a un point double, ou le lieu des centres des  $(n - 2)^e$  polaires dégénérées en deux droites, est une autre courbe de degré  $3(n - 2)^2$ . Il est juste qu'on ait associé à ces courbes les noms de géomètres fameux et qu'on les nomme la Hessienne et la Steinerienne.

Il n'est pas dans mon intention de m'appesantir sur les propriétés des polaires que vous connaissez mieux que moi. Je préfère m'arrêter un moment sur un travail moins connu, parce que moins riche en conséquence, mais qui, dans l'esprit de Steiner, devait probablement faire équilibre à la théorie des polaires. Il s'agit de son étude sur les courbes à centre. Toute droite par le centre coupe la courbe en des points symétriques par rapport au centre. Une courbe à centre est donc de degré pair si elle ne passe pas par le centre; de degré impair si elle y passe et elle a alors un point d'inflexion en ce point. Considérons encore une courbe quelconque. Il existe par un point quel-

conque  $\frac{1}{2} n \cdot (n - 1)$  droites qui coupent la courbe en deux points symétriques par rapport à  $P$ . En effet, faisons tourner la courbe de  $180^\circ$  autour de  $P$ . Les deux courbes se coupent en  $n^2$  points, dont  $n$  sont à l'infini. Les  $n(n - 1)$  autres sont deux à deux symétriques par rapport à  $P$  et sont les points d'intersection des droites cherchées. Le faisceau des courbes d'ordre  $n$  qui passent par les  $n^2$  points en contient une qui dégénère en la droite à l'infini et une courbe de degré  $(n - 1)$  passant par tous les points dans le fini. Cette courbe est celle que Steiner appelle la première polaire intérieure de  $P$  par rapport à la courbe donnée. Il a analysé les relations entre la polaire normale et la polaire intérieure. Ainsi par exemple, ces deux polaires se coupent en  $(n - 1)(n - 2)$  points dans le fini, ces points étant sur une courbe de degré  $n - 2$ . Et Steiner étudie aussi tous les cas particuliers pour les courbes de 3<sup>e</sup> et 4<sup>e</sup> degré, lorsque le pôle est sur la courbe ou en un point particulier. Malheureusement, les propriétés qui découlent des polaires intérieures ne sont pas aussi intéressantes que celles des polaires, probablement à cause de leur définition métrique qui introduit une dissymétrie dans l'analogie. Je crois pourtant que cet essai aussi éclaire un des aspects du génie de Steiner.

Mesdames et Messieurs, j'aimerais encore voir brièvement avec vous un des travaux de Steiner; j'aurais pu choisir par exemple le problème des normales abaissées d'un point à une surface ou à une courbe, ou celui des centres de courbures. Permettez-moi plutôt d'attirer un moment votre attention sur le problème des surfaces de troisième degré. Steiner commence par donner plusieurs façons d'engendrer la surface du troisième degré. Tout d'abord, cette  $S_3$  peut être considérée comme la surface générale du faisceau déterminé par deux triplets de plans quelconques; elle passe donc par les neuf droites d'intersection des triplets et par un point quelconque. On peut l'engendrer aussi à l'aide de deux faisceaux projectifs: un faisceau de plans et un faisceau de quadriques. La surface passera alors par l'axe des plans et par une courbe du quatrième degré, base de l'autre faisceau. Ou encore on peut, d'un point quelconque, mener les cônes tangents à un faisceau ponctuel de quadriques. Les coniques de contact sont toutes sur une surface du 3<sup>e</sup> degré. Autre méthode encore: Si l'on considère un réseau de quadriques, les plans polaires d'un point quelconque  $P$  se coupent en un point  $Q$ . Si  $P$  décrit une droite,  $Q$  décrit une courbe gauche du troisième degré et, si  $P$  décrit un plan,  $Q$  décrit une surface du troisième degré. Ou encore: Les pôles d'un plan par rapport aux quadriques d'un réseau sont sur une surface du troisième degré.

Comme vous le savez, une surface du 3<sup>e</sup> degré contient 27 droites. On peut les retrouver pour chaque mode de définition et on est presque surpris que Steiner ne les ait pas découvertes toutes lui-même, qu'il lui ait fallu une indication de Cayley pour y arriver. Par

contre, par un penchant de son esprit que nous avons remarqué plusieurs fois, il s'efforce ensuite de trouver toutes les relations entre ces 27 droites. Chacune des droites est coupée par 10 autres. Ces 27 droites se coupent en 135 points et forment 45 triangles. Il y a donc 45 plans qui sont tangents à la surface en trois points différents. Ces plans déterminent 240 trièdres qui forment 120 couples dont les droites d'intersection sont sur la surface. Ces 240 trièdres ont 720 arêtes, donc les 135 points d'intersection des 27 droites sont 3 à 3 sur 720 droites qui se coupent 3 à 3 en 240 points.

Négligeons de nombreuses propriétés de la surface du 3<sup>e</sup> degré, laissons même sa Steinerienne et bornons-nous à un seul détail: Considérons un plan quelconque et cherchons l'enveloppe des deuxièmes polaires de ses points par rapport à la surface cubique. Cette surface est du troisième degré et sa classe est seulement égale à 4. En effet, l'intersection de trois plans polaires a pour première polaire une quadrique par les trois pôles. A la limite, le point de contact d'un plan polaire avec le lieu cherché a pour première polaire une quadrique tangente au plan considéré. Par conséquent, pour trouver le degré de la surface cherchée, il suffit de trouver les points d'une droite dont la première polaire touche le plan donné. Ces premières polaires forment un faisceau ponctuel de quadriques dont trois touchent le plan. D'autre part, si l'on considère les plans polaires qui passent par une droite, on voit que les pôles de ces plans doivent être sur toutes les premières polaires des points de la droite, donc sur une courbe du 4<sup>e</sup> degré. Les quatre points d'intersection avec le plan donné ont pour deuxièmes polaires les quatre plans tangents cherchés.

S'il existe une surface du troisième degré et de quatrième classe, il doit bien exister une surface duale de quatrième degré et de troisième classe. Voyons brièvement comment on peut arriver à établir son existence et quelques-unes de ses propriétés.

Rappelons d'abord un théorème connu: Les sommets des trièdres tiretangents tangents à une sphère sont sur la sphère orthoptique. Par une projectivité, on arrive au théorème plus général: Considérons une conique dans un plan. Par les côtés de ses triangles polaires, menons les plans tangents à une quadrique quelconque. Les points d'intersection de ces plans sont sur une quadrique passant par la conique. Si la quadrique donnée est tangente au plan de la conique, le lieu dégénère en un plan. Dualelement, si, d'un point  $P$  d'une quadrique quelconque, on projette sur la quadrique les triangles polaires d'une conique quelconque  $c$ , les plans déterminés par les images des sommets passent tous par un point fixe  $R$ . Ce point  $R$  se trouve en particulier sur la droite qui joint  $P$  au pôle par rapport à  $c$  de la droite d'intersection  $t$  du plan de  $c$  avec le plan tangent à la quadrique en  $P$ .

Considérons ensuite, dans un plan, un faisceau ponctuel de coniques. En maintenant la quadrique et le point  $P$  fixes, on obtiendra

pour chaque conique un certain point  $R_c$ . Comme le faisceau a un triangle polaire commun, le lieu de  $R_c$  sera dans le plan déterminé par les images des sommets de ce triangle. D'autre part, les points  $R_c$  s'obtiennent en projetant de  $P$  les pôles de la droite d'intersection par rapport à toutes les coniques du faisceau. Or ce lieu est une conique. Le lieu de  $R_c$  est donc également une conique.

Finalement, prenons un réseau de coniques. Le lieu de  $R_c$  est une surface qui contient une infinité de coniques, engendrées par tous les faisceaux du réseau.

Dans un plan, il y a certains points  $A$  dont les polaires par rapport à toutes les coniques d'un réseau passent par un même point  $B$ . Le lieu de ces points  $A$  et  $B$  est une cubique. En particulier, sur la droite d'intersection  $t$ , il y a trois points  $A$ , ce qui signifie que le lieu des pôles de  $t$  par rapport à tous les faisceaux du réseau se compose de coniques qui passent toutes par trois points  $B_1, B_2, B_3$ . Et par conséquent toutes les coniques de la surface cherchée coupent les trois droites  $PB_1, PB_2, PB_3$  qui sont des droites doubles pour la surface, le point  $P$  étant un point triple. On voit ainsi apparaître les différentes propriétés de la surface: Tous les plans contenant une conique coupent encore la surface suivant une deuxième conique. Des quatre points d'intersection de ces deux coniques, trois sont sur les droites doubles et le quatrième est le point de contact. On peut montrer géométriquement que la surface est de troisième classe et qu'il s'agit donc du pendant de la surface du troisième degré dont nous parlions; c'est la célèbre surface romaine, la surface de Steiner qui a suscité de nombreux travaux à cause de ses propriétés étonnantes.

Pourtant, c'est d'une autre particularité de cette surface dont j'aimerais vous parler pour finir. Cette surface est appelée surface romaine parce que Steiner la découvrit lors de son séjour à Rome en 1844. Or il n'a rien publié à son sujet et l'on n'a trouvé aucun manuscrit qui s'y rapporte. La seule chose qu'on en connaisse est une citation de Weierstrass à la fin des *Oeuvres complètes* de Steiner où il rapporte une communication que celui-ci lui avait faite oralement un an avant sa mort. Steiner semble avoir hésité à publier quoi que ce soit, car il n'était pas certain que la surface soit bien du quatrième degré; il soupçonnait une partie imaginaire, un « Gespenst » comme il dit lui-même. Ceci est étonnant, tout comme est étonnant le fait que Steiner n'ait écrit qu'une seule page, la toute dernière de ses publications en 1857, à propos de la surface duale du troisième degré. Si, de plus, on pense au diagramme des publications de Steiner, bien mince vers la fin de sa vie, alors qu'il disait n'avoir publié que la dixième partie de ses découvertes, le bibliothécaire qui vous parle ne peut s'empêcher d'avoir un certain sentiment d'insatisfaction. Je n'arrive pas à croire que les *Oeuvres complètes* de Steiner soient vraiment complètes, malgré les notes posthumes que Geiser y a ajoutées.

Mon malaise est d'ailleurs encore plus grand depuis que j'ai vu que certains manuscrits de Steiner reçus par l'Ecole polytechnique portaient la mention: « nicht aufbewahren » et, depuis que je sais que l'on a perdu toute trace du manuscrit sur les maximum après son arrivée à Berlin.

Mesdames et Messieurs, cela m'incite à terminer par un conseil de bibliothécaire: Ne détruisez pas les manuscrits de vos découvertes. D'abord parce qu'ils rendront service au conférencier qui fera votre éloge cent ans après votre mort, mais aussi parce qu'ils constituent pour l'histoire des sciences des documents irremplaçables, pleins d'une valeur émotive non négligeable. On crée des musées de la technique, il est temps de penser à un musée des mathématiques. Je crois qu'il y manquera toujours certains travaux de Steiner, car Steiner est encore plus grand que « tel qu'en lui-même enfin, l'éternité l'a changé ».

*Jahressitzung in Zürich, 10. Oktober 1964*

Die Jahresversammlung der SMG fand am 10. Oktober 1964 im Rahmen derjenigen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft in Zürich statt. Es wurden 8 wissenschaftliche Vorträge gehalten, die untenstehend entweder durch ihren Titel oder im Auszug angegeben sind.

R. COIFMAN (Genève): *Sur l'itération continue des fonctions réelles.*

Soit  $f(x)$  continue, strictement croissante sur  $[0, a]$  et telle que  $0 < f(x) < x$  pour  $x \in [0, a]$ . On appelle famille d'itérées de  $f$  toute famille  $f_\sigma(x)$  de fonctions telle que

$$\forall \sigma, \mu \in \mathfrak{R}, \quad f_1(x) = f(x) \quad \text{et} \quad f_\sigma(f_\mu(x)) = f_{\sigma+\mu}(x).$$

La construction d'une telle famille est liée à la résolution de l'équation fonctionnelle d'Abel:

$$A(f(x)) = A(x) + 1;$$

une famille d'itérées est obtenue en posant

$$f_\sigma(x) = A^{-1}(A(x) + \sigma).$$

L'existence d'une infinité de familles d'itérées d'une fonction donnée nous conduit à exiger certaines conditions de régularité de manière à obtenir l'unicité (voir [1], [2], [3]). Ces conditions de régularité sont données à l'aide de la relation d'équivalence suivante entre familles d'itérées;

*Définition:* Nous dirons que  $f_\sigma(x) \approx g_\sigma(x)$  s'il existe une fonction  $\varphi(x)$  telle que

$$f_\sigma(x) = g_{\varphi(x)}(x) \quad \text{et} \quad \varphi(x) \rightarrow \alpha\sigma \quad (x \rightarrow +0) \quad (\alpha \neq 0).$$

Nous dirons qu'une famille d'itérées de  $f(x)$  est régulière relativement à  $g_\sigma(x)$  lorsque  $f_\sigma(x) \approx g_\sigma(x)$ .

*Théorème:* Soit  $f_\sigma(x)$  une famille d'itérées continue et strictement monotone en  $\sigma$ ,  $g(x)$  une fonction continue et strictement croissante pour  $x \in [0, a]$  et telle que  $0 < g(x) < x$  pour  $x \in [0, a]$ . et soit

$$g_0(x) = x, \quad g_{n+1}(x) = g(g_n(x)), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots.$$

Pour que  $g(x)$  possède une famille d'itérées  $g_\sigma \approx f_\sigma$ , il faut et il suffit que:

$$g_{-n}(f_\sigma(g_n(x))) \rightarrow G(\sigma, x) \quad (n \rightarrow \infty)$$

pour tout  $\sigma$  et  $x \in [0, a]$  et que  $G(\sigma, x)$  soit continue en  $\sigma$  et  $x$  et strictement monotone en  $\sigma$ .

Il existe alors un  $\alpha \neq 0$  tel que  $g_\sigma(x) = G(\alpha\sigma, x)$  et  $g_\sigma(x)$  est la seule famille d'itérées de  $g$  équivalente à  $f_\sigma$ .

- [1] SZEKERES, G., *Acta Math.*, 100, 1958, p. 203.
- [2] — *J. Austr. Math. Soc.* (3), 2, 1962, p. 301.
- [3] COIFMAN, R., *Comptes Rendus Acad. Sc. Paris*, à paraître.

R. Coifman

Institut de mathématiques  
de l'Université de Genève.

J. HERSCHE (Zürich): *Équations finies satisfaites par les solutions de certains problèmes aux limites.*

1. Si une *membrane vibrante*, à contour fixé, recouvre un domaine plan symétrique relativement à l'axe des  $x$ , chacun sait que sa première fonction propre  $u_1(x, y)$  est également symétrique:  $u_1(x, -y) = u_1(x, y)$ .

Cette propriété se laisse aisément généraliser au cas de plusieurs symétries consécutives. Considérons, par exemple, la membrane en  $L$  contenant les trois carrés  $Q_1 (0 < x < 1, 0 < y < 1)$ ,  $Q_2 (1 < x < 2, 0 < y < 1)$  et  $Q_3 (0 < x < 1, 1 < y < 2)$ ; à tout point  $P_1(x, y) \in Q_1$  nous faisons correspondre ses « symétriques »  $P_2(2-x, y) \in Q_2$  et  $P_3(x, 2-y) \in Q_3$ ; alors la fonction propre fondamentale  $u_1$  satisfait

$$u_1(P_1) = u_1(P_2) + u_1(P_3).$$

En effet, la fonction  $\tilde{u}_1(P_1) \equiv u_1(P_1) - u_1(P_2) - u_1(P_3)$  satisfait  $\Delta \tilde{u}_1 + \lambda_1 \tilde{u}_1 = 0$  dans  $Q_1$  et  $\tilde{u}_1 = 0$  sur le contour de  $Q_1$ ; comme  $\lambda_1$  n'est pas valeur propre de  $Q_1$ ,  $\tilde{u}_1 \equiv 0$  dans  $Q_1$ . La même propriété est valable pour toute fonction propre  $u_n$  telle que  $\Delta u_n + \lambda_n u_n = 0$  avec un  $\lambda_n$  qui n'est *pas* valeur propre du carré  $Q_1$ . Si la membrane considérée est à contour *libre*, on doit construire

$$\hat{u}(P_1) \equiv u(P_1) + u(P_2) + u(P_3).$$

2. Le même raisonnement s'applique aux problèmes de Dirichlet et de Neumann pour l'équation de Poisson. Par exemple, dans le domaine en  $L$  considéré ci-dessus, soit  $\varphi(x, y)$  la solution du problème:  $\Delta \varphi = -\rho(x, y)$  à l'intérieur et  $\varphi = f(s)$  sur le contour; alors

$$\tilde{\varphi}(P_1) \equiv \varphi(P_1) - \varphi(P_2) - \varphi(P_3)$$

satisfait

$$\Delta \tilde{\varphi}(P_1) = -[\rho(P_1) - \rho(P_2) - \rho(P_3)]$$

dans  $Q_1$  et  $\tilde{\varphi} = \tilde{f}(s)$  (immédiatement connue) sur le contour de  $Q_1$ . La résolution de ce problème dans  $Q_1$  fournit une équation finie pour  $\varphi$ .

Si, dans le même domaine, on considère un problème de Neumann:  $\Delta u = -\rho(x, y)$ , et  $\partial u / \partial n = g(s)$  sur le contour, alors

$$\hat{u}(P_1) \equiv u(P_1) + u(P_2) + u(P_3)$$

satisfait

$$\Delta \hat{u}(P_1) = -[\rho(P_1) + \rho(P_2) + \rho(P_3)]$$

dans  $Q_1$  et  $\partial \hat{u} / \partial n = \hat{g}(s)$  sur le contour de  $Q_1$ .

Les deux propriétés ci-dessus entraînent la suivante, évidente directement: Soit  $w(z) = u + i\varphi$  une fonction analytique dans le domaine considéré, alors la fonction

$$\check{w}(P_1) = \hat{u} + i\tilde{\varphi} = w(P_1) + \bar{w}(P_2) + \bar{w}(P_3)$$

est analytique dans  $Q_1$ .

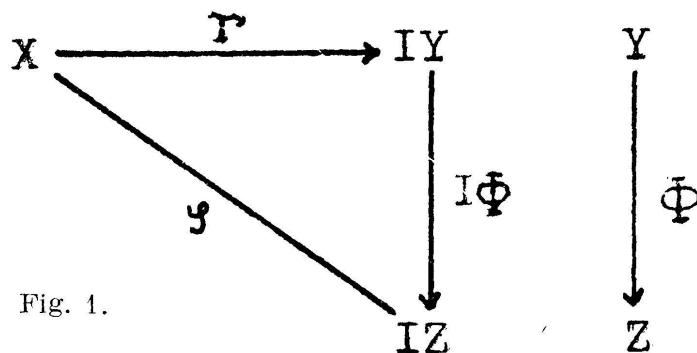
3. Les remarques qui précèdent s'appliquent numériquement aux équations aux différences, ainsi qu'aux évaluations reposant sur des principes de variation (Rayleigh, Dirichlet, Thomson): on construira de préférence des fonctions d'essai satisfaisant les mêmes équations finies (comme on le fait toujours dans le cas d'une simple symétrie!).

4. Un exposé plus général de ces propriétés paraîtra (en langue allemande), avec quelques applications, dans le *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. Cependant, ces propriétés ont un caractère si élémentaire qu'elles sont peut-être connues et oubliées depuis des siècles: connaissez-vous un travail qui s'y rapporte?

A. FREI (Zürich): *Freie Gruppen und freie Objekte.*

Die Begriffe und Bezeichnungen dieser Arbeit findet man in den Arbeiten « Group-like structures in general categories I, II, III », von B. Eckmann und P. J. Hilton [1], [2], [3].

Der Begriff der freien Gruppen lässt sich in naheliegender Weise stark verallgemeinern. Seien  $\mathfrak{C}$  und  $\mathfrak{D}$  zwei Kategorien und  $I: \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{C}$  ein covarianter Funktor. Wir nennen ein Objekt  $Y \in \mathfrak{D}$  frei über dem Objekt  $X \in \mathfrak{C}$  bezüglich  $I$ , wenn es eine Abbildung  $\psi: X \rightarrow IY$  in  $\mathfrak{C}$  gibt mit der universellen Eigenschaft: zu beliebigem Objekt  $Z \in \mathfrak{D}$  und beliebiger Abbildung  $X \rightarrow IZ$  in  $\mathfrak{C}$  gibt es genau eine Abbildung  $\Phi: Y \rightarrow Z$  in  $\mathfrak{D}$  mit  $I\Phi \circ \psi = \varphi$ .



Ist  $\mathfrak{C}$  die Kategorie der Mengen,  $\mathfrak{D}$  diejenige der Gruppen und  $I$  der « Vergiss »-Funktor, der jeder Gruppe die zugrundeliegende Menge zuordnet, dann bedeutet diese Definition, dass  $Y$  eine freie Gruppe ist und  $\psi: X \rightarrow IY$  die Einbettung eines freien Erzeugendensystems. Das Paar  $(Y, \psi)$ , bestehend aus dem Objekt  $Y$  und der Abbildung  $\psi: X \rightarrow IY$ , nennen wir das freie Objekt über  $X$ .

Freie Objekte haben analoge Eigenschaften wie freie Gruppen; diese werden in der Arbeit, über die wir hier berichten, ausführlich formuliert. So ist z.B. das freie Objekt über einem bestimmten Objekt, falls es existiert, bis auf kanonische Äquivalenz eindeutig bestimmt.

Der Begriff der freien Objekte hängt eng zusammen mit demjenigen der adjungierten Funktoren. Es gilt der

**SATZ 1.** — Der Funktor  $I$  besitze einen linksadjungierten  $F$ , mit der adjungierenden Transformation  $\alpha$ . Dann hat die natürliche Transformation  $\psi_x = \alpha(1_{Fx})$  die Eigenschaft, dass für jedes  $X \in \mathfrak{C}$   $(FX, \psi_x)$  frei ist über  $X$ .

Zu diesem Satz gilt folgende Umkehrung:

**SATZ 2.** — Seien  $I: \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{C}$  und  $F: \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$  covariante Funktoren, und es gebe eine natürliche Transformation  $\psi_x: X \rightarrow IFX$ , so dass für jedes  $X \in \mathfrak{C}$   $(FX, \psi_x)$  frei ist über  $X$ . Dann ist  $F$  linksadjungiert zu  $I$  mit der adjungierenden Transformation  $\alpha$ :

$$\alpha: (\Phi) = I\Phi \circ \psi_x, \quad \Phi \in H(FX, Z).$$

Von nun an sei  $\mathfrak{D}$  eine  $M$ -primitive Kategorie über  $\mathfrak{C}$  und  $I: \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{C}$  der «Vergiss»-Funktor: dieser ordnet jedem Objekt  $(Y, m)$  aus  $\mathfrak{D}$  das Objekt  $Y$  aus  $\mathfrak{C}$  zu. Ferner nehmen wir an, es existiere ein zu  $I$  linksadjungierter Funktor  $F: \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$ .

Es gilt der

SATZ 3. — Zu jedem Objekt  $Y \in \mathfrak{D}$  gibt es einen Epimorphismus  $\sigma: FIY \rightarrow Y$  von einem freien Objekt nach  $Y$  selbst.

Dieser Satz verallgemeinert den wohlbekannten Satz aus der Gruppentheorie, wonach jede Gruppe Quotient einer freien ist.

Wenn  $Y$  ein Objekt aus  $\mathfrak{D}$  ist, wird für jedes  $A \in \mathfrak{C}$  durch die  $M$ -Struktur von  $Y$  in  $H(A, IY)$  eine  $M$ -Struktur induziert; wir bezeichnen sie mit  $+$ . Im folgenden nehmen wir an,  $\mathfrak{D}$  sei eine Kategorie mit inversen Produkten, d.h. zu je zwei Objekten aus  $\mathfrak{D}$  existiere in  $\mathfrak{D}$  ihr inverses Produkt. Dank der induzierten  $M$ -Struktur lässt sich jedem freien Objekt aus  $\mathfrak{D}$  eine  $\bar{M}$ -Struktur geben; genauer:

SATZ 4. — Jedes freie Objekt in  $\mathfrak{D}$  ist ein  $\bar{M}$ -Objekt in  $\mathfrak{D}$ , mit der  $\bar{M}$ -Struktur  $\mu$ , die durch  $I\mu \cdot \psi = (q_1 + q_2) \cdot \psi$  definiert wird. Diese nennen wir die durch  $\psi$  induzierte  $\bar{M}$ -Struktur.

Über die induzierte  $\bar{M}$ -Struktur lassen sich einige Sätze beweisen, auf die wir hier jedoch nicht eingehen können.

Sei  $\mathfrak{E}$  die vollständige  $\bar{M}$ -primitive Kategorie über  $\mathfrak{D}$ . Die Zuordnung  $\tilde{F}: \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{E}$ , definiert durch  $\tilde{F}X = (FX, \mu)$ , wobei  $\mu$  die durch  $\psi_x$  induzierte  $\bar{M}$ -Struktur ist, und  $\tilde{F}\varphi = F\varphi$ , ist ein covarianter Funktor. Anderseits gibt es einen covarianten Funktor  $L: \mathfrak{E} \rightarrow \mathfrak{C}$ , der folgenderweise definiert ist:  $(LY, \lambda_Y)$  ist Linksegalisator von  $I\mu$  und  $(q_1 + q_2): IY \rightarrow I(Y * Y)$ . Über diese beiden Funktoren gilt der

SATZ 5. — Der Funktor  $\tilde{F}$  ist linksadjungiert zu  $L$ . Wenn  $\alpha$  die adjungierende Transformation von  $F$  und  $I$  ist, ist die adjungierende Transformation  $\eta: H(\tilde{F}X, Y) \rightarrow H(X, LY)$  gegeben durch  $\eta^{-1}(\varphi) = \alpha^{-1}(\lambda_Y \cdot \varphi)$ ,  $\varphi \in H(X, LY)$ .

Im Falle, wo  $\mathfrak{C}$  die Kategorie der punktierten Mengen und  $\mathfrak{D}$  diejenige der Gruppen ist, haben Eckmann und Hilton bewiesen, dass die Kategorien  $\mathfrak{C}$  und  $\mathfrak{E}$  zueinander isomorph sind. In diesem Falle sind die Funktoren  $\tilde{F}$  und  $L$  zueinander invers und stellen obengenannte Isomorphie her. Dies ist nicht allgemein richtig, wie ein Gegenbeispiel zeigt. Als nächstes wollen wir zeigen, was von diesem Sachverhalt im allgemeinen übrig bleibt.

Allgemein gibt es zu jedem  $X \in \mathfrak{C}$  genau eine Abbildung  $\psi'_x$ :  $X \rightarrow L\tilde{F}X$  für welche das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 & \gamma_X & \\
 X & \xrightarrow{\quad} & \text{IF}X \\
 \downarrow \psi'_X & & \nearrow \lambda_{\tilde{F}X} \\
 L\tilde{F}X & \xrightarrow{\sim} &
 \end{array}$$

Fig. 2.

kommutiert. Sei  $\mathfrak{C}'$  die volle von  $L(\mathfrak{E})$  erzeugte Unterkategorie von  $\mathfrak{C}$ , und  $\mathfrak{E}'$  die volle von  $F(\mathfrak{C})$  erzeugte Unterkategorie von  $\mathfrak{E}$ ;  $\tilde{F}'$  und  $L'$  seien die auf  $\mathfrak{C}'$  und  $\mathfrak{E}'$  beschränkten Funktoren  $\tilde{F}$  und  $L$ . Es gilt der  
SATZ 6. — Die Abbildung  $\psi'_x$  sei für jedes  $X \in \mathfrak{C}$  ein Epimorphismus für Abbildungen nach Objekten aus  $\mathfrak{D}$ . Dann sind die Funktoren  $\tilde{F}'$  und  $L'$  bis auf kanonische Aequivalenz zueinander invers.

Da  $\tilde{F}'$  und  $L'$  nicht im strengen Sinne zueinander invers sind, kann man nicht von einer Isomorphie im strengen Sinne zwischen  $\mathfrak{C}'$  und  $\mathfrak{D}'$  sprechen. Die Funktoren  $\tilde{F}'$  und  $L'$  sind aber, wie man leicht zeigt, beidseitig zueinander adjungiert, und erhalten deshalb Monomorphismen und Epimorphismen, direkte und inverse Produkte sowie direkte und inverse Limites. Ferner bildet  $\tilde{F}' H_{\mathfrak{C}'}(X_1, X_2)$  eindeutig auf  $H_{\mathfrak{E}'}(\tilde{F}' X_1, \tilde{F}' X_2)$  ab, und  $L'$  bildet  $H_{\mathfrak{C}'}(Y_1, Y_2)$  eindeutig auf  $H_{\mathfrak{E}'}(L' Y_1, L' Y_2)$  ab. Es besteht somit eine gewisse Isomorphie zwischen  $\mathfrak{C}'$  und  $\mathfrak{E}'$ .

Zum Schluss möchten wir noch darauf hinweisen, dass sich die Begriffe und Sätze, ausser auf das Beispiel, wo  $\mathfrak{C}$  die Kategorie der punktierten Mengen und  $\mathfrak{D}$  diejenige der Gruppen ist, auf viele weitere Fälle anwenden lassen, von welchen hier nur die folgenden erwähnt seien:  $\mathfrak{C}$  punktierte Mengen,  $\mathfrak{D}$  abelsche Gruppen.  $\mathfrak{C}$  Gruppen,  $\mathfrak{D}$  abelsche Gruppen.  $\mathfrak{C}$  vollständig reguläre Räume,  $\mathfrak{D}$  topologische Gruppen (in diesem Falle sind die freien Objekte die freien topologischen Gruppen).

#### LITERATUR

- [1] ECKMANN, B. und P. J. HILTON, Group-like structures in general categories I. Multiplications and comultiplications. *Math. Ann.*, 145, 227 (1962).
- [2] — Group-like structures in general categories II. Equalizers, Limits, Lengths. *Math. Ann.*, 151, 150 (1963).
- [3] — Group-like structures in general categories III. Primitive categories. *Math. Ann.*, 150, 165 (1963).

Sophie PICCARD (Neuchâtel): *Théorie des groupes.*

Il s'agit dans ce travail de différentes structures de groupes abstraits.

La notion de groupe libre se prête à diverses généralisations auxquelles on parvient en considérant des ensembles de générateurs de groupes multiplicatifs liés uniquement par des relations caractéristiques de nature telle que toute relation entre ces générateurs (relation qui découle des relations caractéristiques et des axiomes de groupe) est encore de la même nature.

Soit  $G$  un groupe multiplicatif dont 1 est l'élément neutre et soit  $A$  un ensemble d'éléments de  $G$ . Une composition finie  $f(a_1, \dots, a_n)$  d'éléments  $a_1, \dots, a_n$  ( $n \geq 1$ ) de  $A$  est un produit de la forme

$$f(a_1, \dots, a_n) = a_{i_1}^{j_1} a_{i_2}^{j_2} \dots a_{i_r}^{j_r}$$

où  $r$  est un entier  $\geq 1$ ,  $a_{i_1}, \dots, a_{i_r}$  sont des éléments pas nécessairement distincts de l'ensemble  $\{a_1, \dots, a_n\}$  et  $j_1, \dots, j_r$  sont des entiers quelconques.

La réduction de  $f$  basée uniquement sur les axiomes de groupe consiste, d'une part, à remplacer dans  $f$  tout produit  $a^l a^m$  par  $a^{l+m}$  quel que soit l'élément  $a$  de  $A$  et quels que soient les entiers  $m$  et  $n$  et, d'autre part, à laisser tomber tout facteur de la forme  $a^0$ ,  $a \in A$ , si  $f \neq a^0$ , et de remplacer  $a^0$  par 1, si  $f = a^0$ ; elle conduit à la forme réduite de  $f$  qui est soit 1 (élément neutre de  $G$ ), auquel cas on dit que  $f$  est *complètement réductible*, soit 1)  $a_{u_1}^{v_1} \dots a_{u_s}^{v_s}$  où  $s$  est un entier tel que  $1 \leq s \leq r$ ,  $a_{u_i} \in A$ ,  $i = 1, \dots, s$ ,  $a_{u_i} \neq a_{u_{i+1}}$ ,  $i = 1, 2, \dots, s-1$  et  $v_1, \dots, v_s$  sont des entiers dont aucun n'est nul.

Soit, à présent,  $k$  un entier  $\geq 2$  donné, fixe, et soit  $f$  une composition finie d'éléments de  $A$ . La réduction de  $f$  modulo  $k$  s'opère en s'appuyant sur les axiomes de groupe et en réduisant modulo  $k$  l'exposant entier  $m$  de tout facteur  $a^m$ ,  $a \in A$ ; elle conduit à la forme réduite modulo  $k$  de  $f$  qui est soit 1 soit un produit de la forme 1) où l'entier  $v_l \not\equiv 0 \pmod{k}$  et  $1 \leq v \leq k-1$ , quel que soit  $l = 1, \dots, s$ .

Toute égalité qui peut se mettre sous la forme 2)  $f(a_1, \dots, a_n) = 1$  où  $a_i \in A$ ,  $i = 1, \dots, n$  et où  $f(a_1, \dots, a_n)$  est une composition finie des éléments  $a_1, \dots, a_n$  porte le nom de *relation* entre éléments de  $A$ . Tout ensemble  $A$  d'éléments de  $G$  est lié par un certain nombre de relations qui découlent des axiomes de groupe. De telles relations sont appelées *triviales*. Le premier membre de toute relation triviale est complètement réductible. Il peut se mettre sous la forme d'un produit de puissances entières d'un nombre fini d'éléments de  $A$ , dont tous les exposants sont nuls. Tout ensemble  $A$  d'éléments de  $G$  qui ne sont liés que par des relations triviales est dit *libre* ou *indépendant*.

Par contre, un ensemble  $A$  d'éléments de  $G$  est dit *dépendant ou lié* s'il existe entre des éléments de cet ensemble au moins une relation non triviale. L'ensemble formé d'un seul élément  $a$  de  $G$  est libre ou lié suivant que  $a$  est d'ordre infini ou fini. Tout ensemble d'éléments de  $G$  qui comprend au moins un élément d'ordre fini est lié. Une relation 2) entre éléments de  $A$  est dite *triviale modulo  $k$*  où  $k$  est un entier donné  $\geq 2$ , si son premier membre est complètement réductible modulo  $k$ . Les éléments de  $A$  sont dits *libres ou indépendants modulo  $k$*  s'ils ne sont liés que par des relations triviales modulo  $k$ . Par contre, on dira que les éléments de  $A$  sont liés ou dépendants modulo  $k$  s'il existe entre ces éléments au moins une relation qui n'est pas triviale modulo  $k$ .

La relation 2) est dite *quasi triviale* (quasi triviale modulo  $k$ ) si son premier membre est de degré nul (de degré  $\equiv 0 \pmod{k}$ ) par rapport à tout élément de  $A$ . Elle est dite *pseudo-triviale* (pseudo-triviale modulo  $k$ ) si son premier membre est de degré nul (de degré  $\equiv 0 \pmod{k}$ ) par rapport à l'ensemble des éléments de  $A$ . Les éléments de  $A$  sont *quasi indépendants* (quasi indépendants modulo  $k$ ) s'ils ne sont liés que par des relations quasi triviales (quasi triviales modulo  $k$ ). Et les éléments de  $A$  sont dits *pseudo-libres* (pseudo-libres modulo  $k$ ) si toute relation qui les lie est *pseudo-libre* (pseudo-libre modulo  $k$ ). Une relation qui ne rentre dans aucune des catégories énumérées ci-dessus est appelée *non triviale au sens strict*.

Un groupe multiplicatif  $G$  est *libre (libre modulo  $k$ )* s'il possède au moins un ensemble de générateurs appelés *générateurs libres* (libres modulo  $k$ ) qui ne sont liés que par des relations triviales (triviales modulo  $k$ ). Il est *quasi libre (quasi libre modulo  $k$ )* s'il possède au moins un ensemble de générateurs — dits *quasi libres (quasi libres modulo  $k$ )* — qui ne sont liés que par des relations quasi triviales (quasi triviales modulo  $k$ ).  $G$  est *pseudo-libre (pseudo-libre modulo  $k$ )* s'il possède au moins un ensemble de générateurs — dits *pseudo-libres (pseudo-libres modulo  $k$ )* qui ne sont liés que par des relations pseudo-triviales (pseudo-triviales modulo  $k$ ). Le groupe  $G$  est *lié* si tout ensemble de ses éléments générateurs est lié par au moins une relation non triviale. Il est dit *lié au sens strict* s'il n'est ni libre, ni quasi libre, ni pseudo-libre, ni libre, quasi libre ou pseudo-libre modulo  $k$  quel que soit l'entier  $k \geq 2$ .

Un ensemble  $A$  de puissance  $\geq 2$  d'éléments d'un groupe multiplicatif  $G$  est dit *réductible* s'il existe au moins un sous-ensemble fini  $A^* = \{a_1, \dots, a_m\}$  de  $A$  ( $m \geq 2$ ) et un sous-ensemble fini  $B^*$  de  $G$ , de puissance inférieure à celle de  $A^*$  et tel que l'ensemble  $A = A^* \cup B^*$  engendre, par composition finie, tous les éléments de  $A$ . Il est dit *irréductible* dans le cas contraire. Tout groupe multiplicatif qui possède au moins un ensemble irréductible de générateurs est dit *fondamental* et tout ensemble irréductible de générateurs d'un groupe fondamental

constitue une *base* de ce groupe. Les groupes libres, libres modulo  $k$ , quasi libres et quasi libres modulo  $k$ , sont tous fondamentaux. Mais un groupe pseudo-libre n'est pas forcément fondamental. Tout groupe libre est libre modulo  $k$ , quasi libre, quasi libre modulo  $k$ , pseudo-libre et pseudo-libre modulo  $k$ , quel que soit l'entier  $k \geq 2$ . Tout groupe libre modulo  $k$  est quasi libre modulo  $k$  et tout groupe de ce dernier type est pseudo-libre modulo  $k$ , mais il existe une infinité de groupes libres modulo  $k$  qui ne sont pas libres, de groupes quasi libres qui ne sont pas libres et de groupes pseudo-libres qui ne sont pas quasi libres.

Soit  $E_{g.l.} [E_{g.q.l.}] \{ E_{g.p.l.} \}$  l'ensemble de tous les groupes libres distincts [l'ensemble de tous les groupes quasi libres distincts] { l'ensemble de tous les groupes pseudo-libres distincts }, soit  $E_{g.l. \text{ mod } k} [E_{g.q.l. \text{ mod } k}] \{ E_{g.p.l. \text{ mod } k} \}$  l'ensemble de tous les groupes distincts libres modulo  $k$  [quasi libres modulo  $k$ ] { pseudo libres modulo  $k$  }  $k = 2, 3, \dots$  et soient  $T_1 = \{ E_{g.l. \text{ mod } k} \}, k = 2, 3, \dots, T_2 = \{ E_{g.q.l. \text{ mod } k} \}, k = 2, 3, \dots, T_3 = \{ E_{g.p.l. \text{ mod } k} \}, k = 2, 3, \dots$ . On peut munir les trois ensembles,  $T_1, T_2, T_3$  d'une structure de treillis en établissant de la façon suivante un ordre partiel des éléments de ces trois ensembles:  $E_{g.l. \text{ mod } k} \prec E_{g.l. \text{ mod } k'} \text{ si } k' \equiv 0 \pmod{k}$ , auquel cas  $E_{g.l. \text{ mod } k}$  est un sous-ensemble de  $E_{g.l. \text{ mod } k'}$ . De même  $E_{g.q.l. \text{ mod } k} \prec E_{g.q.l. \text{ mod } k'}$  et  $E_{g.p.l. \text{ mod } k} \prec E_{g.p.l. \text{ mod } k'}$  si  $k \equiv 0 \pmod{k'}$ . Avec cette notion d'ordre partiel, on obtient trois treillis: celui des ensembles de groupes libres modulo  $k$ , celui des ensembles de groupes quasi libres modulo  $k$  et celui des ensembles de groupes pseudo libres modulo  $k$ ,  $k = 2, 3, \dots$ . Entre les différents ensembles introduits ci-dessus on a les relations suivantes:  $E_{g.l.} \subset E_{g.q.l.} \subset E_{g.p.l.}$ ,  $E_{g.l.} = \bigcap_{k=2}^{\infty} E_{g.l. \text{ mod } k}$ ,  $E_{g.q.l.} = \bigcap_{k=2}^{\infty} E_{g.q.l. \text{ mod } k}$ ,  $E_{g.p.l.} = \bigcap_{k=2}^{\infty} E_{g.p.l. \text{ mod } k}$ .

Soit, d'autre part,  $E_{g.f.}$  l'ensemble des groupes fondamentaux et  $E_{g.n.f.}$  l'ensemble des groupes non fondamentaux distincts. On a  $E_{g.q.l.} \subset E_{g.f.}$ , mais l'intersection de  $E_{g.p.l.}$  avec chacun des ensembles  $E_{g.f.}$  et  $E_{g.n.f.}$  est  $\neq 0$ .

Soit, à présent,  $G$  un groupe abélien et soit  $A = \{a_1, \dots, a_m\}$  un ensemble fini d'éléments de  $G$ . Les éléments de  $A$  sont *indépendants* (*indépendants modulo  $k$* ) si une relation 3)  $a_1^{j_1} \dots a_m^{j_m} = 1$  entre des éléments  $a_1, \dots, a_m$  de  $A$  ne peut avoir lieu que si  $j_i = 0$  ( $j_i \equiv 0 \pmod{k}$ ) quel que soit  $i = 1, \dots, m$ . Par contre, les éléments de  $A$  sont liés (liés modulo  $k$ ) s'il existe au moins un système d'entiers  $j_1, \dots, j_m$ , dont l'un au moins est  $\not\equiv 0 \pmod{k}$  et pour lequel la relation 3) a lieu.

Si des éléments d'un groupe abélien sont liés, ils sont aussi liés modulo  $k$  pour une infinité de valeurs de l'entier  $k \geq 2$ .

Et si  $A$  est un ensemble infini d'éléments d'un groupe abélien  $G$ , les éléments de  $A$  sont indépendants si tout sous-ensemble fini de  $A$  est libre et les éléments de  $A$  sont liés s'il existe au moins un sous-ensemble fini de  $A$  formé d'éléments dépendants.

Tout groupe abélien fini ou à un nombre fini de générateurs est fondamental.

Si un groupe abélien  $G$  possède des systèmes finis de générateurs, on définit différentes bases de  $G$ . Une *base tout court* est un ensemble irréductible quelconque de générateurs de  $G$ . Les éléments d'une base peuvent être liés. Une *base normale* de  $G$  est un ensemble de générateurs  $a_1, \dots, a_m$ , tel que tout élément  $a$  de  $G$  peut se mettre de façon unique sous la forme  $a_1^{j_1} \dots a_m^{j_m}$  où  $j_i$  est un entier compris entre 0 et l'ordre  $n_i$  de l'élément  $a_i$ , quel que soit  $i = 1, \dots, m$ . Une base normale peut être réductible. On appelle *base normale réduite* de  $G$  une base normale qui est irréductible et dont les éléments peuvent être ordonnés en une suite  $a_1, \dots, a_m$ , telle que l'ordre de  $a_i$  est un diviseur de celui de  $a_{i+1}$  quel que soit  $i = 1, \dots, m - 1$ .

Si le groupe  $G$  est d'ordre infini, il peut ne pas être fondamental et par suite il peut être dépourvu d'ensembles irréductibles de générateurs; une *base normale* de  $G$  est un ensemble  $A$  de générateurs de  $G$  tel que tout élément de  $G$  peut se mettre de façon unique sous la forme d'un produit  $a_1^{j_1} \dots a_m^{j_m}$  où  $a_1, \dots, a_m$  sont  $m \geq 1$  éléments distincts de  $A$  et l'entier  $j_l$  est compris entre 0 et l'ordre  $n_l$  de  $a_l$ ,  $l = 1, \dots, m$ . Un groupe abélien d'ordre infini peut être dépourvu de bases normales, même s'il est engendré par un nombre fini d'éléments et, même s'il possède des bases normales, celles-ci peuvent être réductibles.

A tout groupe quasi libre modulo  $k$ ,  $G$ , on peut associer un groupe fondamental abélien  $\Gamma^{(n)}$  qui possède des bases normales et dont toute base normale est irréductible.

Tout groupe pseudo libre  $G$  possède une infinité de sous-groupes invariants propres, il est d'ordre infini, chaque élément pseudo-libre d'un tel groupe est d'ordre infini et tout élément de  $G$  possède un degré fixe par rapport à l'ensemble des éléments de tout ensemble de générateurs pseudo-libres de  $G$ .