Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 11 (1965)

Heft: 2-3: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: REMARQUES CONCERNANT UN PROBLÈME DE REPRÉSENTATION DES VARIÉTÉS GÉNÉRALISÉES, ET SON RAPPORT AU MOUVEMENT STATIONNAIRE D'UN FLUIDE

Autor: Young, L. C.

Kapitel: 14. La dimension k=1 .

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-39977

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

En prenant une sous-suite de ν, on trouve donc que notre variété typique se décompose en deux parties closes, données par les limites de $c_\nu \mathscr{P}'_\nu$ et $c_\nu \mathscr{P}''_\nu$, et situées de part et d'autre de Π. L'une d'elles sera donc nulle, ce qui n'est possible, Π étant arbitraire, que si notre variété typique a pour support un seul point.

Du résultat ainsi démontré, il s'en suit, d'après (13.4), que:

(13.6) *Théorème.* — Toute variété généralisée close, de dimension $n-1$ dans l'espace n-dimensionnel, s'exprime sous la forme d'un mélange $\int \mathscr{L}_\alpha \, d\alpha$ où chaque $\mathscr{L}_\alpha$ est une variété greffée close.

A proprement parler, ce qu'on déduit par la voie indiquée, c'est que la variété en question s'exprime comme la somme d'un tel mélange et d'une variété singulière. Mais cela revient au même, puisqu'une variété singulière est elle-même une variété greffée.

Du théorème (13.6), on passe maintenant au théorème (13.1), en raisonnant tout comme à la fin du paragraphe 11. Le théorème (13.1) est donc établi, lui aussi.

14. La dimension $k = 1$.

Nous avons laissé pour la fin le cas, intéressant pour la mécanique des fluides, où la dimension de nos variétés est $k = 1$. Comme nous l'avons remarqué dans l'introduction, ce cas n'a été traité précédemment que pour $n = 2$, quand il se réduit à celui que nous venons de discuter. Or, déjà pour $n = 3$, la voie suivie ne s'applique plus lorsque $k = 1$. En effet, l'énoncé analogue à (13.6) est faux, comme il ressort d'un exemple très simple, dû à M. E. Bishop.

On soumet à une rotation, croissante de 0 à 2π, un cercle donné, par rapport à un axe, dans son plan, qui ne le coupe pas. Les positions successives θ du cercle engendrent un tore Θ, et nous désignons par $v(x)$ une direction qui, pour $x \in \Theta$, est tangente à Θ au point x, et qui y fait un angle constant, irrationnel à π, avec la position du cercle θ passant par le même point. Nous définissons

$$\mathscr{L}(f) = \int_\Theta f[x, v(x)] \, da \, ,$$

où da désigne la mesure 2-dimensionnelle. Soit a l'aire de Θ, et soit $C(t)$ l'arc de longueur t d'une courbe sur Θ, qui possède un point initial fixe donné, et qui vérifie l'équation différentielle $x' = v(x)$. On trouve que

$$\mathscr{L}(f) = \lim_{t \to \infty} \frac{a}{t} \int_{C(t)} f[x, v(x)]\, ds ,$$

où ds est la longueur d'arc élémentaire sur $C(t)$. On en tire aisément que $\mathscr{L}(f) = 0$ pour tout f exact, donc que $\mathscr{L}$ est close. En outre, il est évident que $\mathscr{L}$ n'est pas identiquement nulle. Si l'énoncé analogue à (13.6) était exact, on en conclurait que $\mathscr{L} = \int \mathscr{L}_\alpha \, d_\alpha$, où les $\mathscr{L}_\alpha$ seraient des courbes closes rectifiables, vérifiant comme $\mathscr{L}$ l'équation différentielle $x' = v(x)$, et situées sur Θ. Or il n'existe sur Θ aucune courbe close rectifiable, vérifiant cette équation différentielle.

(14.1) *Théorème.* — Soit $\mathscr{L}$ une variété généralisée de dimension $k = 1$ et de frontière A dans l'espace n-dimensionnel. Alors $\mathscr{L} \in A_g$.

Nous aurons besoin du lemme suivant:

(14.2) *Lemme.* — Soit $\mathscr{L}$ une variété généralisée close de dimension $k = 1$, telle que $|\mathscr{L}| = 1$. Alors il existe une suite de polygones clos $\mathscr{P}_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots$), et d'entiers positifs correspondants N_ν qui tendent vers l'infini, telle que l'on ait

$$\mathscr{L} = \lim_{\nu \to \infty} \mathscr{P}_\nu / N_\nu .$$

Démonstration du lemme (14.2). — On peut supposer, sans restreindre la généralité, que $\mathscr{L}$ est située dans un cube unité, que nous supposerons fixe dans la suite. Toutes les constructions que nous allons faire se passeront dans le même cube. En faisant appel à un résultat indépendant de la dimension k, et que nous avons déjà utilisé dans le paragraphe précédent [12, (1.1) Th. A], on peut écrire $\mathscr{L} = \lim \mathscr{L}_\nu$, où chaque $\mathscr{L}_\nu$ est une variété close se réduisant à un polygone avec poids, c'est-à-dire à une somme finie de segments orientés avec des poids correspondants. D'après la topologie combinatoire, chaque $\mathscr{L}_\nu$ s'exprime

encore [4, (3.3) lemma], comme une combinaison linéaire, à coefficients positifs, de polygones clos ordinaires,

$$\mathscr{L}_\nu = \sum_{\rho=1}^{M\nu} c_{\nu\rho}\, \mathscr{P}_{\nu\rho} \,.$$

On peut s'arranger, sans changer la limite des $\mathscr{L}_\nu$, à ce que les coefficients de chacune de ces combinaisons linéaires soient rationnels et de même dénominateur N_ν. On peut évidemment supposer N_ν aussi grand que l'on voudra: nous supposerons donc que $N_\nu \geqq \nu\, M_\nu$, où M_ν est le nombre des termes de notre combinaison linéaire.

Quant aux numérateurs des coefficients rationnels $c_{\nu\rho}$ de cette combinaison linéaire, nous les supprimerons en remplaçant chaque polygone clos $\mathscr{P}_{\nu\rho}$ $(\rho = 1, 2, \ldots, M_\nu)$ par un multiple correspondant, qui sera encore un polygone clos ordinaire. En désignant ce dernier par le même symbole, on aura donc

$$\mathscr{L}_\nu = \sum_{\rho=1}^{M_\nu} \mathscr{P}_{\nu\rho}/N_\nu \,.$$

Ici on peut s'arranger, sans changer la limite des $\mathscr{L}_\nu$, à ce que la somme au côté droit se réduise à un seul terme. Il suffit de faire des polygones $\mathscr{P}_{\nu\rho}$ $(\rho = 1, 2, \ldots, M_\nu)$ un seul polygone clos $\mathscr{P}_\nu$, en ajoutant M_ν paires de segments opposés, de longueur $\leqq 1$, qui relient un polygone au suivant. On aura ajouté ainsi à $\mathscr{L}_\nu$ de cette façon une variété singulière dont l'étendue ne dépasse pas $2M_\nu/N_\nu$, ce qui tend vers zéro.

Ainsi $\mathscr{L} = \lim \mathscr{P}_\nu/N_\nu$, ce qui achève la démonstration.

Démonstration du théorème (14.1). — D'après le raisonnement de la fin du paragraphe 11, on peut se borner, comme pour la dimension $k = n - 1$, au cas où $\mathscr{L}$ est close. On peut supposer de plus que $|\mathscr{L}| = 1$, donc qu'elle vérifie les hypothèses du lemme (14.2). On a dans ce cas

$$\mathscr{L} = \lim \mathscr{P}_\nu/N_\nu \,,$$

et puisqu'il s'en suit que $\lim |\mathscr{P}_\nu|/N_\nu = |\mathscr{L}| = 1$, on peut s'arranger à ce que $|\mathscr{P}_\nu| = N_\nu$. A cet effet, on remplace d'abord N_ν par le plus petit entier supérieur ou égal à $|\mathscr{P}_\nu|$, et on ajoute ensuite à $\mathscr{P}_\nu$ une paire de segments opposés s'il le faut.

En divisant maintenant $\mathscr{P}_\nu$ en N_ν parties de même longueur, qui seront des polygones ordinaires, c'est-à-dire des courbes polygonales à deux extrémités, de longueur unité, on trouve ainsi que $\mathscr{L}$ est limite d'une combinaison convexe de polygones ordinaires de longueur unité. Ces derniers seront en outre situés dans un cube fixe.

La limite que nous utilisons ici est la limite faible. Cependant, en ce qui concerne les suites convergentes, elle est équivalente à la notion de limite qu'on dérive d'une métrique, nommée métrique de McShane [6, p. 534]. On peut donc faire appel à un théorème général sur les ensembles convexes dans les espaces métriques compacts [14, prop. 7, p. 87]. Tout comme dans une situation analogue [10, (4.1) *(a)*, p. 6], on trouve que $\mathscr{L}$ s'exprime comme un mélange $\int \mathscr{L}_\alpha \, d\alpha$, où chaque $\mathscr{L}_\alpha$ est limite d'un polygone ordinaire correspondant Q, de longueur unité, situé dans un cube fixe.

Or les limites de tels polygones Q, nous les connaissons depuis longtemps: ce sont les courbes généralisées de la même longueur, dans le cube en question.

A vrai dire, il faut y ajouter les limites concentrées en un seul point: c'est-à-dire les variétés singulières de longueur unité concentrées en un point du cube. De toute façon, les limites de nos polygones Q seront des variétés greffées de dimension $k = 1$.

Ainsi $\mathscr{L}$ est un mélange de ces dernières, c'est-à-dire $\mathscr{L} \in A_g$. Le théorème est démontré.

LITTÉRATURE

[1] Alexandroff, P. et H. Hopf, *Topologie*. Berlin, 1935.

[2] Bishop, E. et K. de Leeuw, The representation of linear functionals by measures on sets of extreme points. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 9 (1959), 305-331.

[3] Fleming, W. H., K. Krickeberg, Chr. Pauc, Three papers on summable functions whose first derivatives are measures. *Ann. di Mat.*, 44 (1957), 93-152.

[4] —— et L. C. Young, A generalized notion of boundary. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 76 (1954), 457-484.

[5] —— et L. C. Young, Representations of generalized surfaces as mixtures. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, II, 5 (1956), 117-144.

[6] McShane, E. J., Generalized curves. *Duke Math. J.*, 6 (1940), 513-536.