

Zeitschrift:	L'Enseignement Mathématique
Herausgeber:	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band:	11 (1965)
Heft:	2-3: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
Artikel:	REMARQUES CONCERNANT UN PROBLÈME DE REPRÉSENTATION DES VARIÉTÉS GÉNÉRALISÉES, ET SON RAPPORT AU MOUVEMENT STATIONNAIRE D'UN FLUIDE
Autor:	Young, L. C.
Kapitel:	11. Principes de réduction.
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-39977

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 15.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

$T = \rho Q$, les vecteurs ν d'amarrement locaux de Q vérifient l'équation de continuité des fluides. Remarquons encore que l'opération de comultiplication par un $(k - 1)$ -vecteur constant rappelle une opération analogue utilisée pour définir les contours d'une variété généralisée [11].

Permettons-nous, pour terminer ce paragraphe, une observation, très heuristique et superficielle, sur la signification de l'équation (9.8). Dans cette équation ρ prend la place d'une mesure, tandis que ν est une fonction à valeurs vectorielles. Avec des conventions appropriées, on pourra, d'après (9.2), écrire (9.8) sous la forme :

$$(10.2) \quad \nu \otimes \operatorname{grad} \rho + \rho \operatorname{div} \nu = 0.$$

Elle nous dit que dans la direction ν , le gradient d'une mesure se comporte d'une façon relativement régulière. On peut l'interpréter comme exigeant une espèce de continuité absolue dans la direction ν . Il est assez plausible que la mesure ρ , si elle est absolument continue dans les différentes directions d'amarrement locales, se révélera comme une intégrale multiple par rapport à ces directions, d'où l'on entrevoit que le courant ρQ doit être lagrangien. Serait-ce là un mirage ? Ou est-ce le germe d'une démonstration ? C'est au lecteur à y réfléchir.

11. PRINCIPES DE RÉDUCTION.

Deux variétés généralisées seront dites complémentaires, si leur somme est close, et si elles possèdent deux supports boréliens disjoints. Une propriété possédée par certaines variétés généralisées sera dite σ -additive si une variété généralisée s'exprimant comme une somme dénombrable $\Sigma \mathcal{L}_v$ la possède, dès que chaque \mathcal{L}_v la possède. Enfin une variété généralisée \mathcal{L} de dimension k dans l'espace des x de dimension n , sera dite inductive si la relation $\tau^{-1} \tau A = \partial^{-1} \partial A$ est valable pour les variétés généralisées de dimension $(k - 1)$ dans un espace $(n - 1)$ -dimensionnel.

(11.1) *Principe du σ -polytope complémentaire.* — Soit \mathcal{L} une variété généralisée de frontière A et de dimension k dans l'espace n -dimensionnel où $0 < k < n$. Alors il existe un σ -polytope avec poids, complémentaire à \mathcal{L} .

Démonstration. — Soit Π^* un σ -polytope avec poids, qui possède la même frontière que \mathcal{L} . En changeant son orientation, on obtient un σ -polytope avec poids Π , tel que $\mathcal{L} + \Pi$ soit fermé. On peut mettre Π sous la forme d'une somme dénombrable $\Pi = \sum c_v \Delta_v$, où les c_v sont réels et positifs, et où chaque Δ_v désigne un simplex. Nous désignons par C_v un cône sur la frontière élémentaire de Δ_v , et nous supposerons le sommet x_v choisi, par induction, d'une façon convenable. A cet effet, soit Π_v , la somme des termes de $\sum c_v$, C_v , pour $v' < v$, et soit μ_v la mesure associée comme dans la formule (3.1a), non à \mathcal{L} , mais à $\mathcal{L} + \Pi_v$. On choisira x_v de façon à ce que $|C_v| \leq 2|\Delta_v|$ et que la mesure μ_v d'un support de C_v s'annule. Ceci est possible, puisqu'on peut donner à x_v un ensemble de positions de la puissance du continu, qui correspondent à des supports disjoints : ces supports n'auront donc pas tous des mesures positives. Le σ -polytope avec poids, défini par la somme dénombrable $\sum c_v C_v$, sera complémentaire à \mathcal{L} , ce qui achève la démonstration.

(11.2) *Principe de décomposition.* — Soit P une propriété σ -additive, et soit \mathcal{L} une variété généralisée. Alors il existe une décomposition $\mathcal{L} = \mathcal{L}' + \mathcal{L}''$, où \mathcal{L}' , \mathcal{L}'' sont des variétés généralisées telles que \mathcal{L}' ait la propriété P tandis que \mathcal{L}'' ne possède aucune sous-variété non nulle qui ait la propriété P .

Démonstration. (Rappelons qu'on dit de deux variétés généralisées \mathcal{L}_1 , \mathcal{L}_2 que \mathcal{L}_2 est une sous-variété de \mathcal{L}_1 , si la différence $\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2$ est une variété généralisée). — Soit a_1 le supréimum de l'étendue des sous-variétés de \mathcal{L} qui possèdent la propriété V . Nous désignons par \mathcal{L}_1 une sous-variété la possédant, dont l'étendue dépasse $\frac{1}{2} a_1$; une telle sous-variété existe à moins que $a_1 = 0$, et dans ce dernier cas, on pose $\mathcal{L}_1 = 0$. Généralement, si les sous-variétés \mathcal{L}_1 , \mathcal{L}_2 , ..., \mathcal{L}_{v-1} ont été définies, soit a_v le supréimum de l'étendue des sous-variétés de $\mathcal{L} - \mathcal{L}_1 - \dots - \mathcal{L}_{v-1}$ qui possèdent la propriété P , et soit \mathcal{L}_v une telle sous-variété la possédant, dont l'étendue dépasse $\frac{1}{2} a_v$, si $a_v = 0$ on pose $\mathcal{L}_v = 0$. On trouve sans peine que les expressions $\mathcal{L}' = \sum \mathcal{L}_v$, $\mathcal{L}'' = \mathcal{L} - \mathcal{L}'$ désignent toutes deux des sous-variétés de \mathcal{L} , et que \mathcal{L}' possède la propriété P . Il reste à montrer que \mathcal{L}'' ne possède aucune sous-variété $\neq 0$ ayant la propriété P . Mais si a

est l'étendue d'une telle sous-variété, on aura, par définition de a_v , $a \leq a_v$ pour chaque v . D'autre part, la somme $\sum \frac{1}{2} a_v$ ne peut dépasser l'étendue de $\Sigma \mathcal{L}_v$, donc celle de \mathcal{L}' , et par conséquent cette somme converge. Il s'en suit que $a = 0$, ce qui achève la démonstration.

(11.3) *Principes de subdivision et de localisation.* — (i) Soit \mathcal{L} une variété généralisée inductive de frontière A ; alors il existe une subdivision de l'espace n -dimensionnel en cubes Q congruents, aussi petits que l'on voudra, tels que, si F désigne la frontière de Q , l'intersection $\mathcal{L} \cap F$ s'annule, et que l'intersection $\mathcal{L} \cap Q$ possède une frontière A . (ii) De plus, si E désigne un ensemble borélien quelconque, l'intersection $\mathcal{L} \cap E$ possède une frontière A .

Démonstration. — En ce qui concerne (i), il suffira, par itération, d'établir l'affirmation correspondante pour une subdivision en bandes congruentes, orthogonales à une direction donnée V . Nous nous servirons des mêmes symboles Q , F pour désigner une telle bande et sa frontière, et nous désignerons par \mathcal{P} un σ -polytope avec poids complémentaire à \mathcal{L} . Nous appellerons niveau d'un point x , et nous désignerons par $z(x)$ la projection dans la direction V du vecteur x . Nous écrirons Π pour une certaine famille de sous-espaces équidistants $z(x) = \text{const}$. On s'arrangera, par une translation dans la direction V s'il le faut, à ce que cette famille remplisse deux conditions que nous avons introduites ailleurs [11 (6.3)]. Ce sont les suivantes: a) l'intersection de \mathcal{L} avec chaque membre de Π s'annule; b) l'intersection de $\mathcal{L} + \mathcal{P}$ avec le demi-espace au-dessus du niveau correspondant $z(x) = \text{const}$. a pour périmètre ce que nous avons appelé le « contour » de $\mathcal{L} + \mathcal{P}$ à ce niveau. Rappelons qu'un tel contour est, par sa définition (loc. cit.), une variété généralisée close $(k - 1)$ dimensionnelle dans un espace $z(x) = \text{const}$. de dimension $(n - 1)$, et que, par conséquent, elle possède un substratum A , d'après notre hypothèse inductive sur \mathcal{L} . Il s'en suit aisément* que Π divise l'espace en bandes Q telles que $(\mathcal{L} + \mathcal{P}) \cap Q$ ait une frontière A et que la frontière F de Q ait une intersection nulle avec $\mathcal{L} + \mathcal{P}$, et par conséquent

¹⁾ On remarque que $(\mathcal{L} + \mathcal{P}) \cap Q$ a la même frontière que le cône de son périmètre.

avec \mathcal{L} . Or la frontière de $\mathcal{L} \cap Q$ s'obtient en ajoutant à celle de $(\mathcal{L} + \mathcal{P}) \cap Q$ la frontière d'un σ -polytope avec poids $\mathcal{P}^* \cap Q$, où \mathcal{P}^* s'obtient de \mathcal{P} en changeant l'orientation. Donc $\mathcal{L} \cap Q$ a une frontière A , et (i) est démontré.

Passons à (ii). D'après un résultat déjà cité [12, Ap. III], la propriété de posséder une frontière A est certainement σ -additive. Il s'ensuit de (i) que $\mathcal{L} \cap E$ aura une frontière A lorsque E est ouvert. En soustrayant de \mathcal{L} , on voit qu'il en est de même lorsque E est fermé, donc, par addition, lorsque E est une réunion dénombrable d'ensembles fermés. Il est clair qu'en répétant ce raisonnement, on trouvera que $\mathcal{L} \cap E$ possède, pour tout E borélien, une frontière A , ce qui établit (ii).

Ajoutons qu'un raisonnement du genre utilisé ici montre qu'une variété généralisée inducive \mathcal{L} , dont le substratum $T = \rho Q$ vérifie (9.7) localement, possède une frontière A . En désignant par G le même ouvert que dans la définition de cette vérification locale, on se base alors sur la remarque suivante, dont la démonstration se calque sur celle de [11 (6.3)]: presque tout cube Q , assez petit et de centre fixe dans G , aura une frontière élémentaire F , dont le niveau correspond à un contour C de \mathcal{L} , tel que C soit un périmètre de $\mathcal{L} \cap Q$.

Remarquons encore que (11.1) et (11.2) permettent de réduire la discussion des cas d'égalité dans (8.5) et dans les inclusions analogues pour les variétés de contact. Par exemple, pour établir l'égalité $A_G = \partial^{-1} \partial A$ pour les variétés de contact, il suffira de l'établir pour celles qui sont closes. En effet, supposons qu'on ait établi ce cas particulier, et soit \mathcal{L} une variété de contact à frontière A . Désignons par \mathcal{P} un σ -polytope avec poids, complémentaire à \mathcal{L} , et par E un support borélien de \mathcal{L} disjoint d'un support borélien de \mathcal{P} . En modifiant notre système d'équations différentielles en dehors de E , on s'arrange à ce que $\mathcal{L} + \mathcal{P}$ soit une variété de contact. Par hypothèse, puisque $\mathcal{L} + \mathcal{P}$ est close, $\mathcal{L} + \mathcal{P}$ sera lagrangienne généralisée. Evidemment il en sera de même de son intersection avec E , qui est \mathcal{L} . Donc \mathcal{L} est une variété de contact lagrangienne généralisée, pour le système modifié, donc pour le système donné, qui n'a pas changé dans E .