

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 11 (1965)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA VIE ET L'ŒUVRE D'ÉMILE BOREL
Autor: Fréchet, Maurice
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-39967>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 12.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

LA VIE ET L'ŒUVRE D'ÉMILE BOREL

par Maurice FRÉCHET

INTRODUCTION

Les lignes qui vont suivre n'ont pas été seulement écrites en hommage d'un confrère à un savant disparu qui fut, à la fois, un grand mathématicien s'intéressant à toutes les formes de la pensée, un grand organisateur et un homme d'action.

Cette notice me permet aussi de témoigner publiquement de ma reconnaissance et de mon affection pour l'un de mes deux grands maîtres.

De même que Monsieur Hadamard m'avait distingué déjà parmi mes camarades de lycée, et par la suite m'encouragea et m'aida de ses conseils à me consacrer aux mathématiques, de même, Emile Borel, en me confiant le soin, alors que j'étais étudiant, de rédiger un de ses cours, me fit entrer dans le cercle des écrivains mathématiciens. Plus encore, en m'appelant, beaucoup plus tard, à venir à Paris le seconder dans son enseignement de Calcul des Probabilités, Emile Borel me prouva son estime, comme, d'ailleurs, en bien d'autres circonstances.

Je lui en suis d'autant plus reconnaissant que nos tendances générales, en mathématiques, étaient assez différentes. Alors que, souvent, j'ai cherché les traits communs à plusieurs théories pour en déduire une théorie générale qui englobait les précédentes, Borel, par une étude attentive et méticuleuse de cas particuliers y trouvait la nécessité d'introduire des notions nouvelles dont la portée dépassait singulièrement ces cas particuliers. Ceci explique, peut-être, que Borel a toujours donné une préférence exclusive aux méthodes constructives¹⁾ plus instructives et les seules utilisables, d'ailleurs, dans les applications, alors que j'ai fréquemment employé les méthodes descriptives²⁾ souvent plus simples dans les théories.

¹⁾ Nous préciserons le sens et la portée de ces expressions dans la deuxième partie de cette notice.

²⁾ Nous préciserons le sens et la portée de ces expressions dans la deuxième partie de cette notice.

Dans la citation de la p. 8, Monsieur Louis de Broglie observe chez Borel, « une réelle compréhension des opinions d'autrui ». Je pourrais en donner deux exemples personnels où nous avions émis des appréciations opposées. En ces deux circonstances, Borel m'a répondu avec sa vivacité et sa franchise habituelles. Mais nos relations n'en ont pas été altérées le moins du monde.

Je considère comme le plus grand honneur de ma vie d'avoir été élu deux fois comme successeur d'un aussi illustre savant : d'abord à sa chaire de la Faculté des Sciences, puis dans son fauteuil de l'Académie des Sciences.

Cette notice comprendra trois parties intitulées :

La vie et l'action sociale d'Emile Borel,
Les tendances générales de l'œuvre scientifique d'Emile Borel¹⁾,
Exposé plus technique de l'œuvre scientifique d'Emile Borel.

Ainsi la lecture en sera facilitée à un plus large public, la première partie s'adressant à tout homme cultivé, la seconde aux philosophes de la science, comme aux mathématiciens, la dernière ne pouvant intéresser que ceux qui ont une culture mathématique assez poussée, (sans être nécessairement des mathématiciens de profession).

Il sera intéressant pour le lecteur de connaître des vues exprimées de façons différentes, quoique, en général concordantes, sur l'œuvre et la vie d'Emile Borel, en consultant les excellentes Notices qui lui ont été consacrées (dans l'ordre chronologique), par MM. Paul Montel²⁾ Louis de Broglie³⁾ Charles Maurain⁴⁾ et E. F. Collingwood⁵⁾ (les seules d'ailleurs, parvenues à ma connaissance⁶⁾).

Monsieur Louis de Broglie, limité par le temps pour une lecture orale, avait émis le vœu dans sa Notice, que son résumé

¹⁾ Cette partie a déjà été publiée dans la *Revue Philosophique*, tome CLI, 1961 p. 397-416.

²⁾ C. R., t. 242, 1956, p. 845-850.

³⁾ Notices et Discours, Académie des Sciences, tome 4, 1957, p. 1-24.

⁴⁾ Bulletin de l'Association amicale de Secours des anciens élèves de l'Ecole Normale Supérieure, 1957, p. 29-32.

⁵⁾ Journal of the London Mathematical Society, 1959, p. 488-512. Nous n'en avons eu connaissance qu'après avoir écrit la Seconde et presque terminé la Troisième Partie de cette Notice (avant d'écrire la Première Partie).

⁶⁾ Nous avons nous-mêmes publié une première, mais très courte notice dans la *Revue Philosophique*, t. CXLVI, 1956, p. 158-160.

des travaux scientifiques de Borel soit suivi d'une analyse plus étendue. C'est ce que nous avons fait dans la Deuxième et Troisième Partie de notre présente Notice.

Par contre, il nous avait d'abord semblé que pour la vie et l'œuvre sociale de Borel, nous pourrions être beaucoup plus bref en renvoyant pour plus de détail aux Notices indiquées plus haut. Les faits matériels seront donc résumés ici, un lecteur qui désirerait plus de détails pouvant se reporter aux Notices précédentes.

Mais, à comprimer les Notices précédentes, notre Première Partie courait le risque d'apparaître un peu sèche.

Heureusement, Madame Marguerite Borel a bien voulu, et nous l'en remercions vivement, nous communiquer quelques souvenirs inédits qui rendront à notre exposé, un peu de chaleur humaine.

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE: <i>La vie et l'action sociale d'Emile Borel</i>	5
La jeunesse	5
L'homme	8
La politique	12
L'enseignement	13
Les publications	16
Les honneurs	19
Vues générales sur l'homme et son œuvre	20
 DEUXIÈME PARTIE: <i>Les tendances générales de l'œuvre scientifique d'Emile Borel</i>	 22
Mode d'exposition	22
Bases concrètes des mathématiques	23
Eléments calculables et effectivement définis	27
Borel initiateur	30
Des réserves philosophiques	32
Les objections possibles	35
Réponse partielle aux objections précédentes	38
 TROISIÈME PARTIE: <i>Exposé des travaux scientifiques d'Emile Borel</i>	 43
Orientation générale	43
Arithmétique	44
Séries numériques	45
Théorie des ensembles	52
Mesure des ensembles	53
Rarefaction d'un ensemble de mesure nulle	56
Fonctions réelles (de variables réelles)	61
Fonctions complexes de variables complexes	64
Équations différentielles et aux dérivées partielles . .	74
Géométrie	77
Mathématiques appliquées	79
I. Calcul des probabilités	79
II. Physique mathématique	89
 Liste des travaux par année de publication depuis 1940	
jusqu'à la mort d'Emile Borel (1956)	95

PREMIÈRE PARTIE

LA VIE ET L'ACTION SOCIALE D'ÉMILE BOREL

LA JEUNESSE

Emile Borel est né le 7 janvier 1871 à Saint-Affrique dans l'Aveyron, seize ans et quatorze ans après ses deux sœurs.

Ce fut un enfant prodige. Saint-Affrique citait encore ses mots d'enfant en 1924. Plus tard, encore tout enfant, il lisait des livres de mathématiques. Des collègues de son père, croyant qu'il se vantait, apportèrent un ouvrage de LEFÉBURE de FOURCY à ce gamin qui savait à peine lire. Il leur montra qu'il comprenait parfaitement ce dont il s'agissait.

Non seulement les mathématiques, mais toute « mécanique » l'intéressait et il fallait qu'il en comprenne « le système ».

Il fit ensuite ses études primaires à l'école privée dirigée par son père, pasteur à Saint-Affrique, puis, à onze ans, poursuivit ses études au Lycée de Montauban. Enfin, quelques années après, il vint à Paris en qualité de boursier au Collège Sainte-Barbe et suivit les cours du Lycée Louis-le-Grand pour la préparation à l'Ecole Normale Supérieure. Il le fit si bien qu'à dix-huit ans, il obtenait le premier prix au Concours général et était reçu premier à la fois à l'Ecole Polytechnique et à l'Ecole Normale.

Il fut aussitôt sollicité de choisir l'Ecole Polytechnique. On vint même à Saint-Affrique pour exposer au père de Borel qu'en sortant de cette Ecole, Borel était assuré de trouver une situation brillante dans l'industrie et de pouvoir choisir, pour l'épouser, une riche héritière.

D'accord avec son père, Borel refusa. Ses conversations précédentes avec le grand mathématicien Darboux lui avaient fait comprendre qu'au sortir de l'Ecole normale, il pourrait se livrer à la recherche (en partie, grâce aux longues vacances d'été accordées par l'Université). D'autre part, il ne voulait pas, en entrant à l'Ecole polytechnique être astreint ensuite aux

servitudes mondaines, d'autant qu'il ne tenait pas au luxe. Enfin, il tenait avant tout à choisir une compagne dans un milieu intellectuel peu fortuné où elle aurait appris à apprécier la même échelle de valeurs que lui.

Nous allons voir que l'idéal qu'il s'était fixé, il allait bientôt l'atteindre et même le dépasser.

A partir de sa sortie de l'Ecole normale, il n'allait pas cesser de se livrer avec un éclatant succès à ses recherches.

Il était naturellement entré en contact avec le grand mathématicien Appell et avait eu ainsi l'occasion de rencontrer la fille aînée de celui-ci, Marguerite. Quoique l'aînée, elle était encore bien jeune. Mais, elle aussi, manifestait de bonne heure une vive intelligence qui avait attiré l'attention de Borel. Un jour, ayant sans doute des visées sur elle, il lui demanda son âge et fut surpris d'apprendre qu'elle n'avait que seize ans. C'était décidément trop tôt. Mais un peu plus tard, bien que de treize ans plus âgé qu'elle, il la demanda en mariage, et sa demande fut agréée.

Ainsi, se réalisa une union où les dons complémentaires de l'un et de l'autre allaient réagir heureusement.

Mme Marguerite Borel allait bientôt, sous le pseudonyme de Camille Marbo (Mar-bor), se faire connaître par ses romans et exercer pendant plusieurs années une action efficace comme présidente de la Société des Gens de Lettres.

De son côté, déjà au Collège Sainte-Barbe, Borel avait rencontré les plus brillants élèves des lycées provinciaux, d'origines ou de fortunes modestes. C'est ainsi que Borel y avait fait la connaissance d'Emile Herriot, futur président du Conseil, de Marcel Schwob et d'autres, qui l'avaient habitué à vivre dans un milieu de haute tension littéraire et intellectuelle (en même temps qu'assez bohème et très gai).

Plus tard, les relations de Borel et de sa femme avec les milieux scientifiques, puis avec les milieux littéraires, amenaient le couple Borel à connaître et fréquenter « l'intelligentsia » de l'époque. En particulier, Borel et sa femme se rendaient chaque semaine et passaient une partie de l'été chez l'historien Charles Seignobos où ils avaient l'occasion de rencontrer des journalistes, des diplomates et des hommes politiques.

L'amitié de Borel avec Paul Painlevé, futur président du Conseil, allait contribuer à faire entrer Borel dans la vie politique. (Ils furent entre autres, toute leur vie, les amis intimes de Jean Perrin, Paul Langevin, Charles Maurain, camarades ou voisins de promotion de Borel à l'Ecole normale). Charles Seignobos, comme Emile Borel, adorait les échanges d'idées mais n'admettait pas «le verbiage inutile», et sa devise était: «Pas de zèle. Pas de politesse conventionnelle. Pas de discours».

Emile Borel dut beaucoup à ce milieu et à ce climat. Il n'hésitait pas à sacrifier une partie du temps qu'il consacrait aux recherches, quand il s'agissait pour lui d'entrer en contact avec une personnalité éminente, digne de son intérêt. C'est ainsi qu'il déjeuna, pendant plusieurs années, régulièrement, en tête à tête avec Paul Valéry, à la «Maison des X», pour parler mathématiques «sans mondains et sans femme» disait Paul Valéry.

«Partout, Emile Borel, doué d'un esprit extraordinairement vif, cueillait des enseignements, une documentation sur les situations politiques, littéraires, économiques, sociales du moment.»

«Borel se tient au courant de tout» disaient alors ses amis.

Mais, il n'aimait pas «le monde» tout court, qu'il continuait à trouver creux et qui lui, le trouvait solennel et ennuyeux, et non pas «brillant causeur» comme certains de ses confrères scientifiques.

C'est probablement sa fréquentation d'un cercle très étendu d'intellectuels, connus dans des domaines divers, qui l'amena à risquer une aventure. Bénéficiaire du Prix Petit d'Orsay de 10.000 francs (francs de l'époque), il eut l'audace et le désintéressement d'utiliser cet argent (en 1906) pour fonder une nouvelle revue «La Revue du Mois».

Il était, en effet, au moins assuré de trouver, pour cette revue, des auteurs compétents, parmi les intellectuels qu'il avait appris à connaître et à estimer.

La Revue du Mois se fit vite remarquer et apprécier et c'est seulement la guerre de 14-18 qui, après en avoir entraîné la cessation momentanée, fut la cause de difficultés financières contraignant Borel à arrêter la publication de sa revue.

Pendant cette même guerre (de 1914-18), alors que Madame Borel s'occupait avec dévouement, comme directrice, de l'hôpital de l'Ecole Normale, son mari s'occupa du service des inventions créé par Paul Painlevé et créa les « Sections de repérage par le son », qui rendirent de grands services aux armées ; il commanda l'une de ces sections. Dans une autre était avec d'autres normaliens son neveu et fils adoptif, Fernand Lebeau, élève à l'Ecole Normale. Celui-ci, ayant demandé à partir sur le front, y fut tué. Borel qui l'aimait beaucoup, décida de le remplacer, mais eut à faire de nombreuses démarches pour obtenir d'être envoyé sur le front. « Je tiens à me battre » disait-il. « Il obtint d'être nommé commandant d'une batterie d'artillerie lourde qui circula de la Somme aux Flandres, subit de nombreuses pertes et valut à son chef deux très belles citations.»

L'HOMME

Nous allons maintenant essayer de tracer un portrait de Borel lui-même. Afin que ce portrait soit le moins subjectif possible, nous rassemblerons et nous confronterons les portraits qu'en ont faits quelques-uns de ceux qui l'ont approché de près.

Quand j'étais étudiant, Borel était assez corpulent et portait une large barbe noire. Plus tard, la corpulence a disparu et la barbe devenue grisonnante, s'est trouvée réduite à une barbiche. La photographie de Borel, prise à l'âge mûr et qui figure en tête du volume « Selecta », est d'une remarquable ressemblance. Elle respire l'intelligence. Et le regard scrutateur de Borel accentue l'impression d'autorité.

La constitution de Borel était robuste et c'est elle qui lui a permis d'atteindre 85 ans d'âge, malgré son emprisonnement par la Gestapo, plus tard, une fièvre dans les Indes, et enfin une chute dans le bateau qui le ramenait du Brésil quelques mois avant sa mort. Un collègue américain m'a dit « Borel était très fort ; quand j'avais une trentaine d'années, je me trouvais participer avec lui à un Congrès tenu au bord de la mer. Nous étions alors convenus de faire ensemble un peu de natation.

Nous partons ensemble du rivage. Je nage quelque temps et je m'aperçois que je ne vois Borel (plus âgé que moi d'une dizaine d'années au moins), ni derrière moi, comme je m'y attendais, ni à droite, ni à gauche; il avait en effet, pris sur moi une forte avance ».

M. Collingwood complète ainsi ce portrait: « My recollection of his lectures . . . is of a tall, commanding figure, the handsome head with thick hair and close-clipped beard, once black but now grizzled, the eyes alight . . . »

Ailleurs, il écrit de Borel « In appearance and manner, he was tall, dignified and distinguished and looked the parts he had played.»

M. Maurain écrit « Lorsque j'entrai à l'Ecole Normale en 1890, je la trouvais toute remplie de la renommée d'Emile Borel . . . la réputation, le prestige de Borel nous en imposaient . . . mais c'est lui qui vint gentiment à nous et qui, par des conversations familières, nous aida plus qu'aucun autre à prendre pied. Borel était très fidèle à ses amitiés. D'aucuns ont qualifié sa physionomie de froide . . . l'aspect sous lequel je cherche le plus volontiers à me rappeler son souvenir est celui de sa figure épanouie quand il accourait annoncer à un ami quelques bonnes nouvelles.»

Plus tard, quand j'étais un de ses étudiants, il était encore simple et familier.

Il est cependant de fait que sa notoriété croissante l'avait amené ensuite à défendre les minutes de son temps et à écarter les importuns. Il était ainsi devenu distant. M. Louis de Broglie écrit « Certains, cependant, lui ont reproché d'avoir un abord un peu rude qu'accentuait encore une manière de parler assez sèche. Mais cette rudesse n'était qu'une apparence. Tous ceux qui l'ont connu savent que, derrière elle, se cachait une grande pondération, une réelle compréhension des opinions d'autrui et le plus souvent une véritable bienveillance ».

M. Collingwood écrit de son côté: « Si comme homme public, il est devenu moins accessible qu'il ne l'avait été aux mathématiciens considérés isolément, en compensation, il a pu rendre service aux mathématiques et à la science, en général, grâce à sa position publique et à son influence ».

Dans le même ordre d'idées, M. Maurain écrit « Et ce serait parler trop incomplètement de Borel que de taire certaines apparences qui l'ont desservi. Originaire d'une contrée de climat rude, il en avait dans l'aspect conservé quelque empreinte. D'ailleurs, d'une intelligence très vive, saisissant tout de suite l'intérêt et le fond d'un problème, il lui arrivait d'être agacé par les lenteurs ou les insuffisances d'une conversation ou d'une discussion et de le manifester. Pourtant, quelle était sa bonté foncière et comme il savait être généreux et patient jusque dans les petites choses ».

Et M. Maurain cite, en exemple, comment Borel « de première force aux échecs, ne dédaignait pas d'accepter des partenaires novices . . . , saluant leurs bons coups, les guidant sans en avoir l'air. . . . »

Il est très intéressant de constater la concordance de ces opinions avec celle de M. Collingwood, en partie citée plus haut, où il exprime sous une forme très vivante, que je risquerais de trahir en la traduisant, l'impression que fit Borel sur M. Collingwood, alors étudiant à Paris.

« My recollection of his lectures, always to a crowded audience in one of the large amphitheaters of the Sorbonne, . . . moving deliberately in front of the long black board and returning now and then to the desk to glance at the half sheet of paper which was all that convention of the rules allowed for notes. The manner was magisterial but the style vivid and even racy; phrases which fell from him then remain with me to this day. The lecture closed with discreet applause. It was always a stimulating experience. He could appear formidable, no doubt. But I also remember the kindness with which, as a young foreigner, I was welcomed in his apartment in the rue du Bac and the help and advice for my stay in Paris which I received there.

The impression of intellectual power and authority was, none the less, strong ».

Mieux encore que les collègues de Borel, Madame Borel a pu connaître les sentiments profonds de son mari. Ecouteons-la :

« Toute sa vie, Emile Borel conserva le goût des « conversations sans prétention qui signifient quelque chose ».

Par contraste, quand il allait « dans le monde » il se taisait volontiers, disant ensuite « Pourquoi est-ce que j'aurais parlé. Je n'avais rien à dire. On faisait du bruit pour rien ».

De là sa réputation méritée de sauvagerie, dont ses amis et ses camarades riaient » . . .

« Curieux dans presque tous les domaines, toujours avide de comprendre, ami fidèle et sûr, il dédaignait l'approbation des indifférents, s'irritait des flatteries et des compliments, de sorte qu'il rebutait parfois ceux qui n'étaient pas capables de l'apprécier.

La vie est trop courte, disait-il, pour que l'on fasse des efforts inutiles pour plaire à des gens que l'on n'intéresse pas et qui ne vous intéressent pas non plus.

Emile Borel, en résumé, ne voulut jamais s'adapter à ce qu'il nommait « les milieux parisiens ».

Emile Borel, avant tout, comme disent ses compatriotes aveyronnais, était « un homme juste ».

En même temps que juste, il était bon, mais sans phrase et sans emphase. Il rayonnait quand il avait pu aider quelqu'un ou voir quelqu'un d'heureux.

Il ignora toujours la jalousie, fut joyeux des succès de ses amis autant que des siens, fit tout pour les amener » . . .

« Il aimait les paysans aveyronnais dont il avait beaucoup de traits de caractère, franc, rude et courageux ».

Le père et le beau-frère de Borel étaient des pasteurs protestants. Madame Borel écrit encore :

« De ses parents, Emile Borel, hérita : une rigueur d'esprit toute protestante . . . , le dédain des richesses et de la vie luxueuse . . . une horreur de l'hypocrisie et de tout mensonge, même bénin ».

Toute sa vie, Emile Borel n'entreprit jamais une action sans la suivre jusqu'au bout, dans ses détails, si infime qu'elle puisse paraître aux observateurs extérieurs.

Il était incapable de faire une promesse qu'il ne se sentait pas sûr de tenir. Il disait aux gens qui, lorsqu'il était homme politique, lui demandaient une recommandation ou une aide « Je ne ferai rien pour vous. Je ne serais pas certain de ne pas faire tort à quelqu'un d'autre ». Ou bien s'il disait « Comptez sur moi », il se dépensait sans compter, heureux quand il avait obtenu un

résultat favorable, pension, bourse, réparation d'un tort, nomination qui lui semblait équitable.

Et il lui était réellement indifférent que l'on dise que c'est à lui que l'on devait le succès « C'est le résultat qui me fait plaisir, non pas la reconnaissance ».

Emile Borel avait exprimé le désir formel d'être inhumé, près de ses parents, dans le cimetière protestant de Saint-Affrique.

S'il demanda, malgré ses idées non religieuses, une brève cérémonie au Temple Réformé de Saint-Affrique, c'est, suivant ses propres termes « Parce qu'il me semble que je dois cela à la mémoire de mes parents ».

LA POLITIQUE

A partir de son départ de Lille à 26 ans, Borel n'a cessé d'habiter Paris. Mais il n'a jamais oublié son pays natal, où il revenait régulièrement. Estimé de ses concitoyens, connu par son talent d'organisateur, il avait été élu maire de Saint-Affrique à 56 ans. Un peu avant, à 55 ans, il s'était présenté aux élections pour le Conseil général du département de l'Aveyron, et avait été élu.

Sauf l'interruption du règne de Pétain, il conserva ces deux fonctions presque jusqu'à sa mort. Mais il ne s'agissait là que d'intérêts locaux.

Son amitié constante avec Paul Painlevé, futur président du Conseil, le conduisit à s'intéresser à la politique nationale. Car, à ses dons de mathématicien, s'ajoutait un vif intérêt pour les questions sociales. Il fut ainsi élu député de l'Aveyron en 1924 et, à partir de là, siégea pendant 12 ans au Parlement.

On y avait remarqué sa connaissance des hommes et des choses et il y acquit peu à peu une grande influence. C'est ainsi qu'il devint président de la commission des affaires alsaciennes et vice-président de la commission parlementaire la plus importante, celle des finances. Il fut même ministre de la marine pendant les quelques mois que dura un cabinet présidé par Painlevé et participa ainsi à une croisière de la flotte française. Il n'était d'ailleurs pas inconnu dans la maison, ayant eu,

auparavant, l'occasion de rencontrer des officiers de tout grade, pendant les périodes annuelles où il faisait partie du jury d'entrée à l'Ecole navale.

Pendant son séjour au Parlement, Borel eut plusieurs fois la satisfaction de faire adopter des mesures favorables à la recherche scientifique. Indépendamment, l'influence qu'il avait acquise en dehors du cercle étroit des mathématiciens lui a permis d'aider puissamment à la création de l'Institut Henri Poincaré (dont il est question, p. 14) et du Centre national de la recherche scientifique.

A partir de 1936, il se retira de la vie politique.

La guerre vint. Une organisation des Recherches utiles à la Défense nationale, préparée en temps de paix, entra en action. La direction de l'une de ses cellules, qui faisait usage des sciences exactes, fut confiée à Borel. Sous son impulsion, des recherches furent entreprises qui auraient abouti à d'importants résultats si l'armistice n'était venu briser son effort.

Borel ayant atteint l'âge de la retraite, un jubilé fut organisé en janvier 1940, avec grand succès, pendant « la drôle de guerre », succès qui eût rassemblé un plus grand nombre de participants, n'eussent été les événements.

Bien qu'ayant cessé de s'occuper de politique active, Borel y fut douloureusement associé, peu de temps après, en 1941. Les Allemands, probablement dans le but de lancer un avertissement, ont incarcéré en 1941, quatre membres âgés de l'Académie des sciences, dont ils soupçonnaient, d'ailleurs avec raison, les sentiments défavorables. Maintenus en prison, à Fresnes, sans savoir pour quels motifs, pendant un mois, ces quatre membres, dont Borel, occupaient des cellules étroites sans chauffage. La santé de Borel, pourtant partiellement recouvrée quelque temps après, s'est toujours ressentie de cette épreuve subie à 70 ans. Il gagna, dès qu'il le put, l'Aveyron, où il participa à des actions clandestines qui lui valurent la Médaille de la Résistance.

L'ENSEIGNEMENT

Nous reviendrons en seconde partie sur la façon dont Borel comprenait l'enseignement. De toute façon, il est certain qu'il

aimait l'enseignement, qu'il s'intéressait à ses élèves et qu'il a souvent bataillé pour rendre l'enseignement plus profitable, à tous les degrés. C'est ainsi, qu'il n'a pas dédaigné de créer une collection d'ouvrage de mathématiques pour l'enseignement secondaire. Il y essayait d'accroître le recours à l'intuition et en même temps de l'imprégnier (dans la mesure du raisonnable) de l'esprit des mathématiques modernes. C'est cette disposition d'esprit qui l'inclina à accepter la direction des études scientifiques à l'Ecole normale supérieure. C'était là une lourde charge et on pourrait penser qu'il a regretté de réduire ainsi le temps consacré à ses brillantes recherches. Il n'en a pas été ainsi. Borel lui-même décrit sa nomination comme un honneur immérité qui était l'évènement le plus important survenu dans sa carrière jusqu'à cette nomination. Et il déclara même que les quatre années qu'il consacra avant la guerre de 1914 à cette direction (et où il se dévoua sans limite à assurer une aide morale et matérielle à ses élèves, tout en veillant à leurs progrès scientifiques), furent les plus heureuses de sa vie.

Retraçons rapidement sa carrière de professeur.

Borel avait été nommé (exceptionnellement, avant sa thèse, à 22 ans) maître de conférences à la Faculté des sciences de Lille, puis à 26 ans, maître de conférences à l'Ecole normale supérieure. (Il allait rester presque toute sa vie, lié d'une façon ou d'une autre à cette Ecole où il était entré à 18 ans). En 1909, la Faculté des sciences de Paris créait une nouvelle chaire, celle de Théorie des fonctions, où Borel fut nommé professeur. En 1919, le décès de Boussinesq rendait vacante la chaire de Calcul des probabilités et de physique mathématique.

Cette vacance survenait au moment où, déjà depuis quelques années, Borel s'était intéressé de plus en plus à ces deux disciplines. Il demanda donc et obtint d'être transféré dans cette chaire.

A la fin de 1928 (grâce en partie à l'action de Borel) avait été créé l'Institut Henri Poincaré consacré aux mêmes deux disciplines. Cette création réalisait le vœu de Borel de rénover et d'amplifier en France l'enseignement de ces mêmes disciplines et le nombre et la valeur des recherches qui y sont consacrées. C'est pourquoi Borel demanda et obtint la création d'une maîtrise de conférences de Calcul des probabilités qu'il nous fit

l'honneur de nous faire confier, et aussi d'une chaire et d'une maîtrise de conférences de Théories physiques.

Avant ces créations, les auditeurs de Borel, devaient aux examens correspondants, faire preuve de connaissances étendues, correspondant au titre de la chaire.

Nous fîmes valoir à Borel que c'était demander aux candidats un effort de mémoire considérable et puisque la création de la maîtrise de conférences se prêtait à une nouvelle répartition du programme, Borel, sur notre proposition, accepta de scinder le diplôme en trois options: Calcul des probabilités, compléments théoriques (de calcul des probabilités), physique mathématique.

Les programmes purent ainsi être allégés, pour la première option et approfondis pour la seconde (qui attirait les meilleurs étudiants).

C'est pendant son séjour à l'Ecole normale qu'éclata « l'affaire Curie ». Madame Curie traquée par une horde de journalistes, fut abritée chez Monsieur et Madame Borel. M. Steeg, le ministre, ayant annoncé à Borel qu'il serait révoqué s'il gardait madame Curie dans un appartement de l'Etat, alors qu'un scandale menaçait d'éclater, Emile Borel répondit: « Si je suis révoqué pour avoir servi une cause juste, j'en serai fier ». Le ministre n'insista pas. Pour la gloire de la France, madame Curie garda son poste, un instant fortement menacé.

L'Enseignement de Borel ne s'arrêtait pas aux frontières. On l'appelait à l'étranger, de toutes parts, pour y faire des conférences. Borel accepta souvent ces appels et, fréquemment aussi, participa à des congrès scientifiques internationaux. C'est ainsi que devenu grand voyageur, il a visité tous les pays d'Europe sans exception et qu'il a porté la bonne parole mathématique en Egypte, au Liban, en Perse et jusqu'en Chine, où, en 1920, il accompagnait Paul Painlevé (grand mathématicien et ancien président du Conseil) et où il resta cinq mois. (Nous avons entendu une conférence de Painlevé sur ce voyage, où, en passant, il notait ce détail pittoresque: une bataille entre deux armées chinoises faisant rage sur le parcours de son train, les deux généraux chinois qui se combattaient, prenant en considération le grand rôle politique et la renommée scientifique de Painlevé, sont convenus de faire trêve, pour laisser passer son train !)

Un peu plus tard, en 1922 et 1929, Borel visite l'Argentine, l'Uruguay, et le Brésil. En 1951, il visite les Indes et en 1955 à l'âge de 84 ans, il déclare à sa femme « Ce sera mon dernier voyage mais je veux encore aller au Brésil où aura lieu un Congrès de statistique ». C'était malheureusement, en effet, son dernier voyage; car ayant fait une chute en bateau, celle-ci touchant son système circulatoire contribua certainement à hâter sa fin. Il s'éteignit doucement le 3 février 1956, un peu après son 85^{ème} anniversaire.

LES PUBLICATIONS

Même dans cette première partie qui s'adresse au grand public, il nous a paru nécessaire de donner une idée de l'évolution scientifique de Borel: ce sont ses travaux scientifiques, après tout, qui l'ont rendu célèbre.

Nous allons donc nous efforcer de donner un aperçu de l'activité scientifique de Borel, sans entrer nulle part dans les détails techniques, réservés à la deuxième et surtout à la troisième partie.

Il nous arrivera cependant d'employer des mots techniques, parfois inconnus du lecteur; mais ces mots ne sont là que comme sont les noms, sans signification immédiate, de localités dans une carte géographique. Ils servent simplement de repères distinctifs. Chaque lecteur pourra, je crois, suivre l'évolution de Borel sans chercher à comprendre tous ces mots techniques.

Les publications de Borel sont au nombre de plus de trois cents parmi lesquelles trente-cinq sont des livres dont certains ont eu plusieurs éditions.

Nous analyserons dans la deuxième et troisième partie, ses mémoires originaux consacrés aux mathématiques pures et appliquées. Mais il a écrit en outre une cinquantaine d'articles consacrés à la philosophie et à l'histoire des sciences, à la psychologie et à l'économie politique, etc. . . .

Nous croyons qu'il sera possible de les réunir en un volume qui sera assuré de trouver des lecteurs¹.

¹⁾ Ce vœu est en cours de réalisation grâce à la générosité et à la compréhension de la maison Gauthier-Villars qui rassemblera ces articles sous le titre: « Emile Borel, philosophe et homme d'action ».

Enfin, à partir du moment où Borel est entré dans la politique il écrivait, chaque semaine, un article dans un journal quotidien. Nous nous bornerons ici à parler des livres de Borel.

Après sa thèse, en 1893, son premier livre « *Leçons sur la théorie des fonctions* » date de 1898. Il en publia plusieurs autres sur des sujets connexes, mais c'est seulement en 1904 que Borel conçut le projet ambitieux mais magnifiquement réalisé, d'une grande « *Collection de monographies sur la théorie des fonctions* ». Il en fut d'abord le seul auteur, mais bientôt, il réussit à obtenir la collaboration de nombreux mathématiciens français et étrangers, de sorte que la collection atteignit le nombre de cinquante volumes dont dix par Borel lui-même. S'il a pu réaliser une telle production, en moins de vingt-cinq ans, en même temps qu'il procédait à ses profondes recherches et à son enseignement, c'est probablement parce que, à l'exemple de Poincaré, il se contentait de développer oralement le sujet de chaque livre dans un de ses cours et de laisser le soin de le rédiger à l'un de ses auditeurs. Il a montré, en même temps, comme il savait bien juger les jeunes, puisque la plupart de ses collaborateurs, choisis parmi de simples étudiants, sont devenus des professeurs d'université (la majorité d'entre eux à Paris).

Répétons, à peu près, une observation de M. Collingwood « Borel a rendu un important service aux mathématiques en présentant, grâce à cette collection, une synthèse des plus récents travaux sur l'application de la théorie des ensembles à la théorie des fonctions, à une époque où ces idées n'étaient pas encore très répandues. Cette collection reste un des principaux monuments mathématiques de cette époque ».

Sa complétion marque un changement définitif dans l'objet des méditations de Borel, changement d'ailleurs précédé par une époque de transition. Borel s'était attaqué au calcul des probabilités dès 1905 et s'y était intéressé de plus en plus. Ceci le conduisit à dresser un nouveau plan non moins ambitieux et non moins bien réalisé que le précédent. Il le précise en ces termes « *Coordonner l'ensemble considérable de recherches faites dans ces cinquante dernières années sur les probabilités et leur application, me paraît une tâche indispensable, qui doit être accomplie dans la patrie de Pascal, de Laplace et de Poincaré. Je voudrais*

essayer d'apporter à cette tâche une contribution aussi étendue que mes forces me le permettront » C'est ainsi que fut conçue la création du fameux « Traité de calcul des probabilités et de ses applications ». Comme pour la collection mentionnée plus haut, l'entreprise s'est développée graduellement, se présentant d'abord avec trois volumes écrits par Borel et parus en 1925, 1926; puis des volumes écrits par d'autres auteurs et finissant par deux volumes écrits encore par Borel lui-même et constituant les fascicules 2 et 3 du quatrième et dernier tome.

Après avoir présenté ainsi une synthèse magistrale de l'état, à cette époque, du calcul des probabilités et de ses nombreuses applications, Borel eut l'idée de prolonger son traité, pour tenir compte des recherches ultérieures par une « Collection de monographies sur le calcul des probabilités ». Le deuxième fascicule de cette collection intitulé « La théorie mathématique du bridge à la portée de tous » a été écrit par Borel avec la collaboration de A. Chéron, un spécialiste du bridge, (Depuis la mort de Borel, la collection a été interrompue, il y aurait intérêt à en reprendre la publication.)

Depuis quelque temps, Borel s'intéressait aussi à la physique mathématique et il publiait en 1914, un volume intitulé « Introduction géométrique à quelques théories physiques », puis en 1925 le fascicule 3 du tome II de son traité du calcul des probabilités sous le titre « Mécanique statistique classique ».

C'est alors qu'il ouvre à son activité un nouveau champ en créant la « Bibliothèque d'éducation par la science » destinée à rassembler des ouvrages de vulgarisation et à laquelle d'autres savants ont coopéré. Certains des volumes écrits par Borel sont de niveau élémentaire comme « Algèbre et géométrie du second degré », d'autres, au contraire, s'adressent aux mathématiciens professionnels, mais aussi à un public plus large, accoutumé cependant aux abstractions mathématiques.

C'est le cas des « Eléments de la théorie des ensembles » qui renferme même les quatre toutes nouvelles et remarquables définitions non équivalentes de la raréfaction d'un ensemble, définitions qui permettent une classification des ensembles « de mesure nulle » sur laquelle nous reviendrons en troisième partie.

En dehors des collections dirigées par lui, Borel a écrit de

nombreux ouvrages, la plupart de vulgarisation, mais à un niveau élevé et où il a su entraîner et captiver le lecteur. Tels sont: « Le jeu, la chance et les théorie scientifiques modernes », « L'évolution de la Mécanique », etc. . . .

LES HONNEURS

Un de mes amis, devenu grand financier, me disait en parlant des intellectuels « Nous avons l'argent, vous avez les honneurs ».

S'il est bien vrai que Borel a toujours mené une vie modeste quand on la compare à celle des grands capitaines d'industrie, on doit reconnaître que les honneurs ne lui ont pas manqué, . . . et en même temps qu'il les méritait pleinement.

C'étaient d'abord des honneurs croissant avec sa réputation scientifique. Ancien président de la Société mathématique de France, de la Société statistique de Paris, membre du Conseil de l'Université de Paris, du Conseil supérieur de l'instruction publique et de sa section permanente, il devenait aussi et restait jusqu'à la fin de sa vie, président de l'Association amicale de secours des anciens élèves de l'Ecole normale supérieure. Il avait aussi été élu vice-président du Conseil international des unions scientifiques et membre d'honneur de l'Institut International de statistique.

Encore jeune, Borel avait reçu successivement en 1898, 1901, 1904, plusieurs des prix les plus importants de l'Académie des sciences. En 1919, la section de géométrie l'avait présenté en première ligne.

Cependant l'Académie avait élu Goursat. Mais en 1921, Borel entrait à l'Académie des sciences et il en devenait en 1934, pour un an suivant l'usage, président non seulement de cette Académie, mais, en même temps, président de l'Institut de France.

Il était docteur *honoris causa* de plusieurs universités étrangères et membre étranger de plusieurs académies nationales.

En 1955, le Centre national de la recherche scientifique décernait pour la première fois une médaille d'or et l'attribuait à Borel. D'autre part, Borel recevait la croix de guerre pour ses

services sur le front dans la première guerre, et la médaille de la résistance avec rosette pour son action de résistant pendant la seconde.

Sa notoriété scientifique d'abord, puis l'importance de son rôle politique lui faisaient gravir successivement tous les échelons dans l'ordre de la Légion d'honneur et il atteignait ainsi finalement, vers 1950, la dignité de grand-croix. Il faisait aussi partie du Conseil de cet ordre, qui accordait un grand crédit à ses interventions.

VUES GÉNÉRALES SUR L'HOMME ET SON OEUVRÉ

Ici encore, nous confronterons quelques appréciations diverses et on sera frappé de leur accord.

Madame Borel écrit: « Emile Borel fut un fervent de la science, un homme épris de justice, désireux de servir, à travers la France, l'humanité ».

D'après M. Collingwood, parlant de Borel: « With his death, one of the great figures in modern mathematics and a commanding personality passes from the scene ».

Nous avions déjà écrit en 1956: « Emile Borel n'est plus. Un grand vide est laissé dans le monde mathématique et dans le monde en général ».

M. Montel précise: « Les succès et les honneurs n'ont jamais altéré en lui (Borel) une droiture inflexible, une sécurité absolue dans l'amitié, une générosité discrète, une profonde bonté qui se voilait parfois d'une apparente rudesse.

La pensée d'Emile Borel continuera longtemps à exercer son influence sur la recherche, comme la lumière de ces astres éteints continue à se propager dans l'espace. Si l'évocation de cette forme d'immortalité ne peut atténuer notre tristesse, elle l'enveloppe au moins d'une sereine clarté! »

M. Louis de Broglie écrit à la fin de sa Notice:

« Chez Emile Borel, l'intelligence et la volonté étaient comme le physique particulièrement robustes et cette triple robustesse lui a permis, au cours d'une longue existence, de mener de front, constamment et presque sans fatigue et sans défaillances, des

œuvres de l'esprit élevées et difficiles, des activités diverses, et des travaux d'administration et d'organisation souvent lourds et pénibles. Tous ceux qui ont approché l'illustre mathématicien ont pu reconnaître ses qualités exceptionnelles de penseur et de savant et ses dons, non moins exceptionnels d'animateur. Personne n'a contesté la droiture et l'intégrité de son caractère. . . .

Peut-être lui a-t-on reproché d'avoir parfois, au cours de sa carrière, cédé à l'ambition: mais l'ambition n'est-elle pas un penchant naturel et même légitime, chez un homme qui, se sentant fort intellectuellement, moralement et physiquement, désire prendre sur ses épaules un fardeau qu'il se sent capable de supporter en assumant des fonctions qui lui permettraient de donner toute sa mesure? Tout bien pesé, Borel avait droit à tout notre respect, à toute notre admiration et à toute notre estime ».

Après ces magnifiques éloges, qui ne souscrirait aux dernières lignes des réflexions suivantes par lesquelles M. Maurain terminait sa Notice:

« Depuis longtemps (Borel) habitait rue Froidevaux un petit appartement, où on le trouvait entouré de livres, de revues, de papiers de toutes sortes. Il a vécu là des jours calmes, près d'une compagne souriante, attentive et dévouée; il s'y plaisait.

Pourquoi ne dirais-je pas qu'il m'est arrivé, montant l'escalier un peu raide, de songer à sa vie si pleine de travail et de penser à tout ce qu'il a fait pour la science et pour le pays et de rapprocher la modestie de ce sympathique asile et la grandeur de celui dont la vieillesse s'y abritait ».

DEUXIÈME PARTIE

LES TENDANCES GÉNÉRALES DE L'ŒUVRE SCIENTIFIQUE D'ÉMILE BOREL¹

Nous commencerons par des généralités d'ordre philosophique, en essayant de dégager les tendances générales des travaux d'Emile Borel.

Dans toute cette partie, où nous ferons beaucoup de citations de Borel ou de ses commentateurs, nous nous efforcerons de grouper, à chaque fois, ces citations autour d'une idée centrale, sans nous soucier de leur ordre chronologique ou typographique. Les citations de Borel seront imprimées en petits caractères.

Disons d'abord que Borel a exercé son esprit inventif sur toutes les Mathématiques pures (Arithmétique, Algèbre, Analyse, Géométrie, Calcul des probabilités), et sur beaucoup de leurs applications, entre autres: Mécanique, Physique mathématique, Statistique, Econométrie. Il s'est aussi prononcé souvent sur plusieurs points relevant de la Philosophie des sciences et de la Pédagogie. Dans tous ces domaines, ses « travaux abondent », dit feu Carleman, « en idées originales et fécondes ».

Son influence sur le progrès des sciences ne s'est pas exercée seulement par ses découvertes, mais aussi par son enseignement, par ses livres et par les contacts personnels stimulants qu'il a eu avec ses confrères, ses collègues (Français et étrangers), et surtout avec les jeunes, en particulier, pendant les années 1910-1920, où il a exercé les fonctions de sous-directeur de l'Ecole normale supérieure.

MODE D'EXPOSITION

Le mode d'exposition de Borel dans ses cours ou ses publications se distingue nettement de ceux de nombreux mathématiciens.

¹⁾ Paru dans la *Revue Philosophique*, tome CLI, 1961, p. 397-416.

A tel point, que ce fait a frappé indépendamment trois des orateurs qui ont parlé au jubilé de Borel (un mathématicien, M. Ville; un physicien, feu Bruhat; un homme politique, feu Delbos). Ils le font ressortir en termes différents mais qui se renforcent par leur concordance dans le fond des idées. Nous en citerons quelques phrases, en prenant la liberté d'entremêler les citations pour juxtaposer les considérations de même nature.

Pour commencer, un tableau des méthodes courantes:

« Vous savez combien les leçons de mathématiques spéciales sont précautionneuses... Pour [garder les élèves] de l'erreur, [ils sont] instruits avec une discipline prudente mais un peu étroite. » ... « L'élève a l'impression d'avancer entre deux barrières, qui sont des garde-fous comme on le découvre par la suite. »

Même passant du lycée à l'Université, beaucoup d'exposés « donnent bien l'idée de la parfaite clarté des mathématiques, mais d'une clarté qui était obtenue parce que tout était éclairé jusqu'au dernier détail, de sorte que, suivant le principe bien connu des éclairagistes, les reliefs et les obstacles disparaissent ». — Et d'autre part, « aussitôt un résultat trouvé, les nécessités de l'exposition font [souvent] que les idées s'intervertissent, se mettent dans un ordre nouveau, plus logique, plus clair, plus élégant », mais « ce qui est gagné en esthétique est quelquefois perdu en force ». ... « De plus, on risque de fermer aux autres la voie par où l'on est passé soi-même. » ... « Ceux qui se sont entretenus avec des mathématiciens ont remarqué parfois la différence entre la manière dont ils s'expriment dans les livres ou les cours et celle dont ils développent leurs idées dans une conversation privée »..., il leur « faut recourir à des raisonnements plus vivants, plus intuitifs ».

« Pour pouvoir manipuler [les êtres mathématiques] sans s'astreindre à en connaître toutes les propriétés, il est nécessaire de parvenir à en avoir une notion intuitive, à se familiariser avec leur physionomie... » « [Leurs] propriétés essentielles ne sont pas forcément celles, en nombre minimum, d'où toutes les autres se déduisent logiquement. Ce sont plutôt celles qui suggèrent à l'esprit les considérations qui, par une voie naturelle, permettent de compléter l'esquisse faite sommairement mais d'une manière expressive. Cette connaissance génératrice d'intuitions, une

simple suite de définitions, théorèmes et démonstrations ne la donne qu'indirectement; une telle succession offre plutôt le spectacle d'une lutte pied à pied entre l'auteur qui affirme et le lecteur qui doute, ce dernier obligé de reculer pas à pas et, poussé dans son dernier retranchement, forcé de capituler. »

Vient maintenant la description de la méthode didactique, toute différente, d'Emile Borel. « Dans ses conférences, au contraire, comme dans ses travaux, c'est à ce qui est réellement fondamental qu'il s'attachait; il savait faire comprendre quels étaient les caractères essentiels des théories qu'il exposait, il savait faire admettre qu'il ne fallait pas se perdre dans des démonstrations accessoires, » Et d'autre part, « dans les ouvrages et aussi dans l'enseignement oral de M. Borel, nous avons reconnu la méthode d'exposition des grands mathématiciens français dont il continue la tradition... Souffrir sans dommage d'être exposée comme elle a été conçue, voilà un trait de la pensée d'un grand savant; Emile Borel nous en a fourni un exemple parfait ».

Un homme politique, feu Delbos, a su, à son tour, célébrer l'excellence didactique de Borel:

« Cette tendance, on l'aperçoit jusque dans ses œuvres les plus abstraites, on la reconnaît à cette lucidité qui éclaire le cœur même des problèmes, à sa façon de les réduire à l'essentiel, à cet équilibre souverain qui caractérise ses solutions et leur donne une valeur largement humaine... » Dans son ouvrage *Valeur pratique et philosophie des probabilités*, « apparaît, dans toute sa plénitude, cette union de l'intelligence et du bon sens qui règne sur toute son œuvre, cette force tranquille et cette simplicité qui sont les fruits de longues réflexions ».

BASES CONCRÈTES DES MATHÉMATIQUES

Le même commentateur a discerné la direction que Borel assignait aux Mathématiques. Dans ses œuvres, il voit « une tendance irrésistible et croissante vers le réel, vers le concret, une poussée intérieure qui a orienté Emile Borel vers la Physique mathématique, vers la Théorie des probabilités qui l'ont con-

duit dans un domaine où j'ai eu la joie de l'apprécier avec une moins grande incompétence, celui de l'action civique et politique ».

Un autre commentateur précise ainsi cette tendance: « Les Mathématiques doivent avoir une base solide dans la nature concrète et dans la nature humaine: elles idéalisent des choses sensibles ou des faits psychologiques. Borel a toujours insisté sur la nécessité de ne pas perdre de vue le réel: vous savez combien il était attaché aux notions de constructivité, d'êtres accessibles au calcul; il ne refusait pas de s'intéresser à des notions qui perdent le contact avec le concret, mais exigeait qu'il en soit fait expressément mention... » « Il savait, dans les raisonnements les plus abstraits de l'Analyse, rappeler comment ces raisonnements expriment des réalités, comment, par suite, ils nous aident à comprendre la réalité physique. Comme le mathématicien, le physicien trouve dans son œuvre la réponse à bien des questions fondamentales. »

Comment mieux compléter ces analyses des tendances générales de Borel que par les quelques phrases suivantes où il les résume lui-même et, où en avançant dans ses recherches et ses réflexions, il leur donne plus de portée et plus de force.

Je dois, d'ailleurs, avouer que j'ai été tout d'abord, comme beaucoup de jeunes mathématiciens, séduit par les théories [abstraites] de Cantor; je ne le regrette pas, car c'est là une discipline qui assouplit singulièrement l'esprit. Mais j'ai toujours pensé que ces études abstraites ne devaient pas être une fin en soi, mais seulement un moyen.

La tendance générale de mes recherches et de mes ouvrages d'enseignement est la suivante: « Je tâche d'y montrer que les Mathématiques ne sont pas un jeu purement abstrait de l'esprit, mais sont, au contraire, en étroite connexion avec la réalité concrète ».

C'est l'étude des phénomènes physiques qui suggéra les notions de continuité, de dérivée, d'intégrale, d'équation différentielle, de vecteur et de calcul vectoriel. Et ces notions, par un juste retour, font partie du bagage scientifique nécessaire à tout physicien; c'est à travers elles qu'il interprète les résultats de ses expériences. Il n'y a évidemment rien de mystérieux dans le fait que les théories mathématiques construites sur le modèle de certains phénomènes aient pu être développées et fournir le modèle d'autres phénomènes; ce fait est néanmoins digne de retenir notre attention car il comporte une

conséquence pratique importante: si de nouveaux phénomènes physiques suggèrent des modèles mathématiques nouveaux, les mathématiciens devront s'attacher à l'étude de ces modèles nouveaux et de leurs généralisations avec l'espoir légitime que les nouvelles théories mathématiques ainsi constituées se montreront fécondes en fournissant à leur tour aux physiciens des formes de pensée utiles. En d'autres termes, à l'évolution de la Physique doit correspondre une évolution des Mathématiques qui, sans abandonner bien entendu l'étude des théories classiques et éprouvées, doivent se développer en tenant compte des résultats de l'expérience.

C'est toujours au contact de la Nature que l'Analyse mathématique s'est renouvelée; ce n'est que grâce à ce contact permanent qu'elle a pu échapper au danger de devenir un pur symbolisme, tournant en rond sur lui-même.

On nous permettra d'ajouter que, bien après la publication de ces lignes mais bien avant que nous les ayons lues, nous avions soutenu plusieurs fois, un point de vue analogue (avec quelques compléments).

C'est ainsi que (pour montrer que les Mathématiques « ne sont pas un jeu purement abstrait de l'esprit » et que « les études abstraites ne devraient pas être une fin en soi »), nous avions cité l'exemple de la notion de « moment d'un vecteur ». Au lieu de sa définition classique, un mathématicien pourrait définir un moment différent, avec une autre direction et une autre intensité et il pourrait en étudier les propriétés. Mais ce serait bien un pur jeu de l'esprit, sans autre portée que de donner matière à des problèmes d'examens. Alors qu'au contraire, la notion classique de moment est le résultat d'une longue évolution, d'une patiente élaboration qui ont finalement permis d'obtenir ce merveilleux résultat: on peut remplacer tout système de forces appliquées à un corps solide par un système composé seulement d'une force et d'un couple.

En soutenant aussi avec Emile Borel que les notions mathématiques vraiment nouvelles et importantes sont suggérées par les problèmes que pose la Nature, nous avions admis cependant que d'autres notions ont été forgées artificiellement mais utilement par les mathématiciens pour harmoniser, généraliser, simplifier les résultats acquis. Il y a bien là *un* développement des mathématiques qui est autonome, mais c'est un développement

partiel en vue de simples commodités non absolument nécessaires.

D'ailleurs, Borel lui-même laisse entrevoir ce second aspect de l'élaboration mathématique, *à la fin* du passage suivant :

Je pense que ce court exposé de mes plus récents travaux de Calcul des Probabilités et de Physique mathématique aura mis en évidence l'esprit qui s'en dégage et qui apparaîtrait nettement à leur lecture : ne considérer jamais la science mathématique que comme l'auxiliaire de la physique ; faciliter la discussion des théories émises par les physiciens, mais n'empêter jamais sur le domaine réservé à l'expérience, qui doit toujours décider en dernier ressort. C'est seulement en simplifiant l'exposition mathématique et la dégageant d'un appareil parfois superflu et inutilement encombrant que l'on facilitera la confrontation avec l'expérience, de théories qui sont souvent difficilement accessibles à un trop grand nombre de chercheurs de laboratoire.

Après avoir ainsi défini le but de la mathématique, Borel met en opposition la recherche des difficultés et celle de la simplicité.

C'est grâce à l'étude des théories physiques que l'on peut éviter certains des défauts que risque d'entraîner avec elle une tendance trop grande à l'abstraction¹⁾ ; la joie intellectuelle que l'on a à vaincre un obstacle jusque-là insurmonté donne, en effet, la tentation de rechercher les difficultés pour le seul plaisir de les vaincre ; je crois avoir donné assez d'exemples de solutions difficiles, parfois vainement cherchées auparavant, pour pouvoir dire qu'à mon sens, ce n'est pas cette recherche de la difficulté qui est le but le plus élevé de la science mathématique, mais bien plutôt la simplicité des résultats et des méthodes²⁾.

ÉLÉMENTS CALCULABLES OU EFFECTIVEMENT DÉFINIS

De plus en plus, dans les mathématiques modernes, on met en opposition les définitions constructives et les définitions descrip-

¹⁾ Il est pourtant certain que la tendance actuelle des mathématiciens est d'aller toujours vers une plus grande abstraction. Elle n'offre de danger que si — comme malheureusement cela arrive — elle élimine l'intuition et n'a d'autre but qu'elle-même. Ce sont là quelques-uns des défauts visés par Borel.

²⁾ M. Paul Lévy pourrait témoigner combien souvent dans nos conversations privées — qui m'ont si souvent été utiles — j'ai souligné la même thèse. J'y ajoutais qu'une chose m'enchante particulièrement, c'est la solution simple d'un problème, *important en soi*, mais *qu'on n'avait pas songé à poser*.

tives. Dans les premières, on indique comment former, comment construire l'élément: nombre, figure, fonction, que l'on veut définir. Dans les secondes, on n'essaie pas de déterminer complètement les éléments que l'on considère, on se contente de supposer qu'ils vérifient certaines conditions.

Les dernières définitions ont le grand avantage de simplifier souvent les raisonnements et généralement de leur donner une portée plus générale.

Les premières sont indispensables pour passer de la théorie aux applications et même elles permettent, auparavant, de s'assurer de l'existence et, éventuellement, de l'unicité de l'élément à définir.

Borel préférait ces définitions constructives et il a beaucoup contribué à leur étude générale en utilisant et précisant les notions « d'éléments calculables » et « d'éléments effectivement définis ». C'est le sujet des citations suivantes:

J'espère avoir montré que le point de vue que j'ai adopté et qui consiste, en somme, à considérer que, pour les fonctions comme pour les êtres vivants, les *réalisés* sont autrement intéressants que les *possibles*, a été fécond en résultats. Ce point de vue était celui d'Hermite, qui le qualifiait de *réaliste*: pour lui, l'observation des faits analytiques était la source la plus féconde des découvertes mathématiques; dans un de ses derniers écrits, M. Poincaré a fait observer avec beaucoup de finesse et quelque subtilité, qu'on pourrait aussi bien qualifier *d'idéaliste*, ce point de vue pragmatique, car les êtres mathématiques que nous étudions ne sont réels pour nous que parce qu'ils ont été pensés par nous; leur réalité vient donc de notre esprit. Mais la démonstration importe peu...

On est ainsi conduit... à prendre une position en quelque sorte intermédiaire entre les géomètres disposés à ne considérer que les « bonnes » fonctions et ceux qui auraient pu être tentés de croire que ces « bonnes » fonctions ne sont qu'un cas extrêmement particulier des fonctions « générales ». Nous savons d'une manière précise que ni les uns, ni les autres n'ont tout à fait tort; au point de vue abstrait de Dirichlet ou de Riemann, les fonctions totalement discontinues sont, en effet, les plus générales; il n'en est pas de même si l'on se borne aux fonctions que l'on peut effectivement définir (même si l'on prend le mot *définir* dans le sens le plus large possible).

Borel dit ailleurs:

Si des fonctions qui peuvent être définies analytiquement « sont compliquées » (discontinues), elles ne sont, en général, pas *calculables*,

c'est-à-dire que la connaissance numérique approchée de la variable n'entraîne pas la connaissance numérique approchée de la fonction : le fait d'être calculable est, semble-t-il, la condition indispensable pour qu'une fonction puisse être utilisée dans les applications.

Au point de vue abstrait, si l'on admet que toute théorie humaine doit s'exprimer, en dernière analyse, au moyen d'un nombre fini relativement petit de données, il semble difficile de nier la possibilité de constituer entièrement la théorie sans faire intervenir d'hypothèses impliquant l'existence d'éléments dont le nombre dépasse ce que l'imagination de l'homme peut concevoir.

... Il est clair que tous les éléments analytiques, nombres ou fonctions, qui peuvent être effectivement définis, sont en infinité dénombrable... Par *effectivement définis*, on doit entendre : *définis au moyen d'un nombre fini de mots*, et il est clair que les éléments pour lesquels le nombre de mots nécessaires à la définition est extrêmement grand devront être regardés comme ayant une probabilité extrêmement petite.

Il est clair que l'idéal de Borel serait que dans toute démonstration, dans toute définition n'intervienne (explicitement ou implicitement) qu'un nombre fini de mots.

Mais c'est un idéal lointain et Borel reconnaît l'avantage *actuel* de la notion de l'infini ; comme le montre le passage suivant :

C'est fréquemment une simplification en mathématiques que de remplacer par l'infini un nombre fini très grand. C'est ainsi que le calcul des intégrales définies est souvent plus simple que celui des formules sommatoires et que le calcul des dérivées est généralement plus simple que celui des différences finies. De même, on a été conduit à remplacer l'étude simultanée d'un très grand nombre de fonctions d'une variable par l'étude d'une infinité continue de fonctions d'une variable, c'est-à-dire d'une fonction de deux variables. Par une généralisation plus hardie, M. Vito Volterra a été conduit à définir des fonctions qui dépendent d'autres fonctions, c'est-à-dire, dans le cas le plus simple, des fonctions de ligne, en les considérant comme des cas limites de fonctions qui dépendraient d'un très grand nombre de variables ou si l'on veut, d'un très grand nombre de points de la ligne.

Les mathématiques n'ont pu se constituer qu'en schématisant, en idéalisant les réalités concrètes dont elles sont parties, tel est le cas pour la notion de l'infini.

Borel donne dans le passage précédent, des exemples intéressants des simplifications ainsi apportées. Mais on pourrait en

donner de beaucoup plus élémentaires. Soit, par exemple, la somme $a + b$ de deux nombres entiers a et b . Si nous admettons que les nombres qui nous sont concrètement accessibles restent tous au-dessous d'une certaine limite N , la somme $a + b$, non seulement ne pourra pratiquement avoir de sens que si a et b sont inférieurs à N , mais même il faudra supposer que $a + b$ soit lui-même inférieur à N . Dans tout raisonnement où intervient une somme $a + b$, a et b devront être soumis à cette limitation. Comme le dit Borel (voir pp. 29 et 37), on peut concevoir la possibilité de construire une théorie soumise à de telles restrictions¹⁾. Mais que de complications ! Les raisonnements les plus simples deviendraient inextricables.

Dans le même passage de Borel, il est rappelé que Volterra a fréquemment insisté sur l'intérêt qu'il y a, pour généraliser, à passer à la limite du fini à l'infini.

Nous croyons utile, ici, de faire, une fois de plus, une distinction. Ce passage est en effet extrêmement utile quand il s'agit de raisonnements intuitifs, qui permettent, par analogie, de prévoir un résultat dans le cas infini, d'après sa forme dans le cas fini.

Mais, quand il faut passer à des démonstrations rigoureuses, on se heurte souvent à d'énormes difficultés.

Dans ce cas, l'expérience a souvent prouvé qu'il valait mieux procéder autrement. Chercher dans le cas fini à distinguer tout ce qui, dans les raisonnements connus, ne fait pas *effectivement* intervenir l'hypothèse du fini... Et constituer ainsi une théorie plus générale, ou obtenir des théorèmes plus généraux.

BOREL INITIATEUR

La description des tendances générales de l'œuvre de Borel qui résulte des appréciations de ses commentateurs et de lui-même, n'est cependant pas complète.

Nous avons dit ailleurs au sujet d'une des idées dues à Borel qu'il était *un initiateur*. Mais il l'a été aussi en introduisant d'autres notions.

^{o)} Robin avait publié un ouvrage dans ce sens.

Pour être précis, nous donnerons immédiatement les *noms* de quelques-unes de ces notions, mais, pour rester sur le terrain des généralités non techniques, nous résERVERONS leurs définitions et propriétés à la troisième partie.

Le rôle d'initiateur de Borel s'est exercé au sujet de notions dont les unes étaient le couronnement d'une suite d'essais qui avaient été faits pour donner une signification satisfaisante à une notion intuitive, par exemple la notion de mesure d'un ensemble, généralisant la notion de longueur d'un intervalle.

D'autres s'attaquaient à une théorie paraissant définitive mais qui, malgré sa beauté, présentait certains inconvénients, qu'il s'agissait de faire disparaître. Par exemple, la notion de « fonction analytique », due à Weierstrass laissait un fossé entre l'ensemble de telles fonctions et l'ensemble des fonctions très discontinues. Par sa notion de fonction monogène ou quasi analytique, Borel a jeté un pont insoupçonné entre ces deux ensembles.

Par exemple, aussi, on considérait seulement, avant Borel, les probabilités discontinues et les probabilités géométriques. Borel a montré qu'il existait entre ces deux catégories une troisième, celle des « probabilités dénombrables » dont il a étudié les propriétés.

Par exemple encore, il y avait aussi une coupure entre la famille des séries convergentes et celle des séries divergentes. Borel a encore lancé un pont non moins insoupçonné entre ces deux familles. Citons encore les travaux de Borel sur les « fonctions entières » qui lui ont permis de donner une démonstration directe du « grand théorème de Picard ».

C'est Borel lui-même qui fait ressortir la nature commune de ses apports sur ces différents sujets, en écrivant, avec raison: « ... je crois pouvoir faire observer que dans [ces] théories..., j'ai eu la bonne fortune d'apporter sur un point capital une contribution essentielle... grâce à laquelle la théorie a pu, en quelque sorte, franchir un point mort et prendre un essor nouveau ».

Il dit aussi: « Les résultats que je viens de résumer étaient absolument inattendus pour la plupart des géomètres. »

Et d'ailleurs, ce n'est pas tout. Les lignes ci-dessus étaient écrites par Borel en 1921, l'année même où, *après* la publication

des mêmes lignes, il faisait paraître la première des Notes *mémorables* par lesquelles il fondait, sept ans avant von Neumann, la théorie des jeux psychologiques (dont l'invention était, il y a peu de temps encore, faussement attribuée à von Neumann)¹⁾.

Ici, il ne s'agit même plus de perfectionnement ou de franchissement d'un point mort, il s'agit de la création d'une notion tout à fait nouvelle, de l'entrée dans un monde entièrement nouveau, à savoir de l'introduction et de l'utilisation efficace des mathématiques dans un domaine: le domaine psychologique, qui paraissait inaccessible aux mathématiciens.

DES RÉSERVES PHILOSOPHIQUES

Nous avons apporté, dans ce qui précède, une adhésion enthousiaste aux diverses idées de Borel que nous venons de présenter. Si l'on y ajoute l'essentiel, c'est-à-dire les résultats et les méthodes nouvelles qui seront résumés dans la Troisième Partie, on ne peut s'empêcher de ressentir une vive admiration devant cet ensemble. *Emile Borel restera un des plus grands mathématiciens de son époque*, pourtant riche en très grands talents mathématiques.

Mais, si un résultat mathématique ne peut être que vrai ou faux, il n'en est pas de même des considérations qui l'accompagnent. En Philosophie des sciences, on peut soutenir des opinions opposées, ou qui paraissent opposées, sans qu'on puisse toujours affirmer que l'une est vraie et l'autre fausse.

On sait, par exemple, qu'un mathématicien aussi éminent que M. Hadamard, s'est trouvé parfois en désaccord avec les points de vue développés par Borel concernant les fondements des mathématiques. C'est pourquoi, il nous a paru utile de présenter, après les citations de Borel qui vont suivre, les objections qui viennent naturellement à l'esprit et auxquelles, d'ailleurs, nous répondrons en partie nous-même, à la page 38.

Nous avons reproduit plus haut, pages 28 et 29, des citations de Borel où il fait ressortir avec raison l'intérêt et l'utilité

¹⁾ Aussi avons-nous cru utile de reproduire les courtes notes consacrées par Borel à ce sujet, avec un commentaire, d'abord en traduction anglaise, dans *Econometrica*, puis en français dans la *Révue d'économie politique*.

des trois notions de fini, de calculable et d'effectivement défini. Nous avons préféré séparer de ces citations, d'autres citations (qui vont suivre) où, abondant encore dans le même sens, il semble, en outre, jeter un doute sur la légitimité des notions d'abstraction et d'infini. En d'autres termes, Borel ne se contente pas de recommander les définitions constructives, il critique les définitions descriptives. Pour que le lecteur pénètre bien la pensée de Borel, nous avons cité de très larges extraits écrits en ce sens. Ces extraits ne rencontreront peut-être pas une adhésion aussi unanime que les précédents. Nous exposerons donc à la suite, les quelques objections qui se présentent naturellement à l'esprit. Pour en faciliter la lecture, nous avons distingué par des lettres capitales A, B, C..., les différentes citations de Borel qui seront mises en question. Nous serions heureux si quelque lecteur, d'accord avec les idées de Borel, sur ces points, pouvait nous écrire pour réfuter les objections qui vont suivre.

Parmi les idées générales qui dominent l'œuvre de Borel, l'une de celles qui lui tiennent le plus à cœur est celle qu'il exprime, par exemple, sous la forme suivante:

A) Si l'on me demandait de caractériser par un trait commun la méthode que j'ai appliquée... [c']est un souci constant d'étudier les êtres mathématiques en eux-mêmes, comme le biologiste étudie les êtres vivants, de me familiariser avec eux et de ne pas me laisser influencer dans cette étude intrinsèque des individus par les préjugés et les traditions.

Cette méthode de travail m'a conduit à une conception réaliste des mathématiques qui distingue les êtres mathématiques pouvant être effectivement définis¹⁾ de ceux dont l'existence est purement hypothétique.

B) Cauchy n'a jamais, à ma connaissance, exposé explicitement ce qu'il entendait par une fonction, ... pour lui, cette question ne se posait pas, « fonction » était le terme général qu'il employait pour désigner l'une quelconque des fonctions particulières considérées par les analystes, chacune de ces fonctions particulières ayant sa définition propre, à partir des fonctions élémentaires (au moyen de séries, d'intégrales, d'équations différentielles, etc.); il est sous-entendu que les raisonnements faits sur la « fonction » en général, s'appliqueront, en outre, aux fonctions particulières qui pourront être découvertes

¹⁾ Le sens de cette expression est précisé par Borel dans la citation de la p. 29.

ultérieurement et qui possèdent les propriétés spécifiées dans les énoncés (propriétés qui consistent le plus souvent en la continuité de la fonction et de sa dérivée).

C'est ainsi qu'un biologiste peut parler d'un « être vivant » ou un chimiste d'un « corps simple » sans avoir été obligé de se créer une conception *a priori* de l'être vivant en soi ou du corps simple en soi; ils pensent simplement aux êtres vivants, aux corps simples, qu'ils connaissent ou qu'ils pourraient connaître.

On a opposé à cette manière de voir de Cauchy, la méthode, en apparence plus générale, qui consiste à se donner la fonction *a priori* comme une correspondance qui n'a pas besoin d'être formulée explicitement pour être conçue... Ce n'est pas ici le lieu de discuter si ce qui ne peut pas être formulé peut être réellement objet de science. Deux remarques nous suffiront: d'une part cette conception plus générale de la fonction a conduit à construire et à étudier des fonctions auxquelles on n'eut, sans doute, pas songé sans elle; elle a donc été utile. Mais, d'autre part, cette construction effective d'expressions analytiques représentant les fonctions conçues a eu pour résultat de rendre désormais inutile la conception *a priori* de la fonction; après un détour, on revient, *en fait*, au point de vue de Cauchy; on est simplement plus renseigné que ne l'était Cauchy sur l'infinité variété des fonctions que l'on peut obtenir en combinant les moyens analytiques que Cauchy connaissait. Le progrès réalisé par le retour aux idées de Cauchy est cependant très grand; car on possède, pour classer cette infinité variété, une base solide qui faisait défaut dans la conception purement abstraite; cette base, c'est l'étude systématique des procédés de construction à partir des éléments.

C) Il existe certainement (si ce n'est point un abus d'employer ici le verbe *exister*) dans le continu géométrique des éléments qui ne peuvent être définis: tel est le sens réel de l'importante et célèbre proposition de M. Georg Cantor: le continu n'est pas dénombrable. Le jour où ces éléments *indéfinissables* seraient réellement mis à part et où l'on ne prétendrait point les faire intervenir plus ou moins implicitement, il en résulterait certainement une grande simplification dans les méthodes de l'Analyse.

D) Beaucoup d'analystes... mettent au premier rang la notion du continu; c'est elle qui intervient d'une manière plus ou moins explicite dans leurs raisonnements. J'ai indiqué récemment en quoi cette notion du continu considérée comme ayant une puissance supérieure à celle du dénombrable me paraît être une notion purement négative, la puissance des ensembles dénombrables étant la seule qui nous soit connue d'une manière positive, la seule qui intervienne effectivement dans nos raisonnements. Il est clair, en effet, que l'ensemble des éléments analytiques susceptibles d'être réellement définis et considérés ne peut être qu'un ensemble dénombrable, je

crois que ce point de vue s'imposera de plus en plus aux mathématiciens et que le continu n'aura été qu'un instrument transitoire, dont l'utilité actuelle n'est pas négligeable... mais qui devra être regardé seulement comme un moyen d'étudier les ensembles dénombrables, lesquels constituent la seule réalité que nous puissions atteindre.

LES OBJECTIONS POSSIBLES

Déjà dans A (et aussi dans B), considérons, pour prendre le cas le plus simple, son exemple du biologiste. Selon Borel, en parlant d'un être vivant, les biologistes « pensent simplement aux êtres vivants qu'ils connaissent ou qu'ils pourraient connaître » ... « sans être obligés de se créer une conception *a priori* de l'être vivant en soi ». Si ce biologiste entre dans un pays nouveau, qu'il y rencontre: une montagne, un lac, un lion, etc., comment ne risquera-t-il pas de classer la montagne dans les êtres vivants, s'il n'a pas, *avant* d'entrer dans ce pays, une conception *a priori* des êtres vivants. Cette conception, il n'est pas nécessaire qu'elle soit innée, ni définitive, elle lui sera, sans doute, suggérée par les différences qu'il voit entre les êtres vivants qu'il connaît et les choses sans vie qu'il connaît aussi. Mais il faut qu'il se soit ensuite imposé à lui-même une telle discrimination, pour pouvoir l'appliquer plus tard aux éléments naturels qu'il rencontre.

De même, quoique dans un domaine tout autre, abordé dans B, il semble, d'après Borel, qu'après avoir étudié certaines fonctions particulières, on saura, en rencontrant de nouvelles entités mathématiques, si ce sont ou non, d'autres fonctions particulières, sans avoir *a priori* la notion générale de fonction. Un mathématicien rencontrera des égalités, des cercles, des inégalités, des sommes, des intégrales, etc. Comment saura-t-il distinguer, parmi ces éléments, ceux qui sont des fonctions, qu'il ne connaissait pas encore, sans avoir décidé au moins provisoirement, à l'avance, ce que c'est qu'une fonction ? S'il l'a décidé, il pourra, d'après Borel lui-même (B) appliquer à ces nouvelles fonctions particulières « les raisonnements faits sur « la fonction » en général ». S'il n'a rien décidé, il devra recommencer aveuglément ces raisonnements sur chaque nouvelle fonction particulière.

D'après Borel, lui-même (dans B), les raisonnements faits sur des fonctions formulées explicitement « s'appliqueront, en outre, aux fonctions particulières qui pourront être découvertes ultérieurement et qui possèdent les propriétés spécifiées dans les énoncés ». Qu'est-ce à dire, sinon que les raisonnements s'appuient sur le fait que chaque fonction particulière, d'une part détermine en fait une correspondance et en outre qu'elle possède les propriétés spécifiées dans les énoncés qui la concernent. Autrement dit, que, peut-être, avec Borel, on ne voudra, et on en a le droit, retenir et utiliser un théorème que pour les fonctions « effectivement définies », mais que *la démonstration elle-même ne fait pas intervenir cette restriction*. C'est-à-dire que *la théorie sera la même*, mais qu'elle ne sera appliquée par les uns qu'à certaines fonctions.

Dans B, Borel décrit un détour qui, attribuant une expression analytique (somme d'une série, intégrale...) à une fonction antérieurement conçue, ramène l'idée de fonction conçue à celle de fonction construite. Mais, comme nous l'avons dit, la théorie des fonctions comprend d'abord des théorèmes s'appliquant à toute fonction conçue, puis des propriétés particulières à chaque fonction construite. Le détour dont il est question augmentera bien le nombre de ces propriétés particulières, mais ne changera rien à la théorie générale: *pour celle-ci, il n'y a pas de détour*. Pour citer seulement un exemple: on sait qu'une fonction conçue comme continue en chaque point d'un segment est uniformément continue. Et pour énoncer et démontrer ce théorème, nous n'avons pas à nous préoccuper si la fonction est ou non « effectivement définie ».

A la fin de B, Borel dit que « pour classer cette infinie variété [de fonctions], on possède une base solide qui faisait défaut...: l'étude systématique des procédés de construction... ». Cela est tout à fait exact, pourvu qu'on comprenne qu'il s'agit d'un moyen *supplémentaire*, et non unique, de classification, s'ajoutant (disons-le, très utilement) aux moyens *déjà connus*.

Dans C, Borel considère qu'il y aurait « une grande simplification dans les méthodes de l'Analyse » si « les éléments indéfinissables étaient réellement mis à part ».

Ne serait-on pas, au contraire, plutôt porté à croire qu'en se préoccupant d'introduire une telle discrimination dans les raison-

nements, on les compliquerait plutôt qu'on ne les simplifierait. Reportons-nous à l'exemple de la page 30. Il semble bien que Borel considère (comme d'ailleurs nous-même) que les très grands nombres nous sont inaccessibles. Dès lors, si en les rangeant dans les « indéfinissables » on « les mettaient réellement à part », on tomberait dans les complications signalées, page 30, pour démontrer, par exemple, ce théorème bien élémentaire que $a+b = b+a$.

Tous seront d'accord avec Borel pour donner l'avantage aux définitions constructives dans les applications. Mais dans les démonstrations, les définitions descriptives seront souvent plus commodes. Donnons un exemple. Prenons un élément mathématique aussi élémentaire, aussi simple, que le milieu d'un segment rectiligne AB . On peut en donner une définition descriptive: c'est un point M du segment AB , s'il en existe, tel que $MA = MB$. Cette définition très simple laisse en doute les deux questions: y a-t-il un tel point; s'il y en a un, y en a-t-il un seul ou plusieurs ? Une définition constructive répond en même temps à ces deux questions. Par exemple on peut dire:

Traçons deux cercles de même rayon égal à AB mais de centres respectifs A et B . Ils se coupent en deux points C et D . La droite CD coupe AB au point M cherché. Nous avons ainsi un des moyens graphiques de définir M ; en même temps, cette construction établit l'existence et l'unité de M .

Mais, d'autre part, combien une telle définition (constructive) serait encombrante dans toutes les démonstrations faisant intervenir le milieu d'un segment ! C'est la définition descriptive qui est, avec raison, universellement employée dans les démonstrations.

S'il n'est pas toujours possible de suivre Borel dans toutes les conséquences qu'il tire au cours des passages A , $B...$, que nous venons de citer, cela tient parfois à certaines contradictions, au moins apparentes. Par exemple (p. 29), un élément ne peut être « effectivement défini » que s'il est défini au moyen « d'un nombre fini de mots ». Et, pourtant dans D , les ensembles dénombrables (donc éventuellement infinis) nous sont présentés comme « la seule réalité que nous puissions atteindre ».

D'ailleurs, que signifie une définition « en un nombre fini de mots » ? Si, parmi ces mots, figure « l'infini », la définition

sera-t-elle réellement distincte d'une définition comprenant une infinité de mots ? D'autre part, la notion « infini » elle-même peut s'exprimer en un nombre fini de mots. Par exemple, la suite *infinie* des nombres entiers peut se définir comme: une suite d'entiers successifs où chaque entier est suivi d'un autre entier.

La notion « infini » nous paraît être une « idéalisation » commode (et même indispensable dans la mathématique moderne) de la notion de grand nombre. S'il en est ainsi, on ne comprendra donc pas comment Borel peut présenter la notion d'ensemble dénombrable comme « la seule réalité que nous puissions atteindre ». Il faudrait en conclure, en particulier, que la notion de l'infini est une réalité que nous pouvons atteindre, alors qu'elle apparaît comme une idéalisation de la notion de grand nombre et non pas comme une réalité.

Ce point de vue a été déjà exprimé, il y a plus de deux siècles, par le grand mathématicien et philosophe Leibniz, qui, dans une lettre privée écrite à Dangicourt en 1716, écrivait: « Je leur témoignais que je ne croyais point qu'il y eut des grandeurs véritablement infinies, ni véritablement infinitésimales, que ce n'étaient que des fictions, mais des fictions utiles pour abréger et pour parler universellement, comme les racines imaginaires dans l'algèbre. »

A partir du moment où l'on admet l'infini, où, donc, on introduit une idéalisation, on ne voit pas pourquoi on considérerait comme hétérodoxe le continu et les nombres transfinis. Ce ne sont pas des réalités, mais ce sont, au même titre que les ensembles dénombrables, des idéalisations commodes et utiles.

RÉPONSE PARTIELLE AUX OBJECTIONS PRÉCÉDENTES

Nous avons sélectionné, à partir de la page 33, les passages de Borel où les méthodes descriptives semblent le plus énergiquement condamnées. Toutefois, il faut signaler que cette condamnation n'était pas entièrement définitive. Borel n'a pas hésité lui-même à employer, dans certaines démonstrations, des méthodes seulement descriptives, tout en souhaitant les voir remplacer plus tard par des méthodes descriptives. On en verra

un exemple dans le passage suivant, à la fin d'un mémoire de 1919. Dans ce mémoire, il ne dédaigne pas de démontrer un résultat qui lui paraît intéressant, bien que mal défini à son sens: « étant donnée une série à convergence aussi lente que l'on veut, on peut définir un α tel que la série (80) correspondante converge plus lentement que la série donnée »¹⁾. Mais il ajoute aussitôt: « Mais les séries ainsi « définies » ne sont pas « bien définies » au sens que l'on doit donner à ce terme lorsqu'on se place au point de vue des définitions constructives. » La question reste donc ouverte de savoir si, à ce point de vue, « il est ou non possible de construire... »

Enfin, délaissant ce procès des définitions descriptives et nous plaçant *sur un plan psychologique*, on notera avec intérêt l'observation suivante de Borel:

Ceux qui ne sont pas mathématiciens sont... portés à considérer les mathématiques comme une science essentiellement inhumaine dans laquelle la personnalité des hommes qui s'y consacrent ne joue aucun rôle.

Une telle conception des mathématiques me paraît complètement inexacte..., je crois discerner que la sympathie et les oppositions de caractères entre les hommes jouent un rôle important dans la recherche et la découverte scientifique.

Tous les mathématiciens seront d'accord sur l'affirmation essentielle contenue dans cette citation. Ils penseront avec Borel que la personnalité d'un mathématicien joue un grand rôle dans ses recherches.

L'affirmation contenue dans la seconde phrase de cette citation sera plus inattendue pour le grand public et même pour bien des mathématiciens. Elle en est, pour cela même, plus intéressante. Mais peut-être est-il nécessaire d'en préciser la portée.

Dans la personnalité des mathématiciens, il faut ranger en effet, à côté des caractéristiques morales ou affectives, les caractéristiques purement intellectuelles et celles qui dérivent des milieux où ils ont vécu. Jusqu'à quel point interviennent-elles respectivement dans les recherches des mathématiciens ? D'après

¹⁾ Il ne paraît pas nécessaire d'entourer cette phrase, du contexte, pour en préciser la signification. Il suffit d'observer que, conformément à la phrase suivante de Borel, elle introduit une notion « définie » mais non « effectivement définie ».

Borel « la sympathie et les oppositions de caractères entre les hommes jouent un rôle important dans la recherche et la découverte scientifique ». Sans doute l'expérience personnelle de Borel, en relation avec de très nombreux mathématiciens, lui a-t-elle fourni des exemples d'une influence de cette nature. On notera, toutefois, qu'il parle d'un rôle important et non d'un rôle prépondérant. C'est, sans doute, avec cette limitation qu'il faut comprendre cette citation.

En particulier, les changements d'orientation d'un savant seront souvent la conséquence de changements dans le milieu qui l'entoure. Ce sera la guerre qui le conduira à étudier le calcul des probabilités, la balistique, etc. Ce sera la nomination à une nouvelle chaire, comme ce fut le cas de Henri Poincaré, d'Emile Borel lui-même. (Après des découvertes brillantes de mathématiques pures, Borel, comme Poincaré, se consacrèrent avec succès aux mathématiques appliquées quand ils furent successivement nommés professeurs de Calcul des probabilités et Physique mathématique.) Mais ce sont surtout les caractéristiques mentales, non affectives, d'un savant qui dominent ses travaux, et dont ceux-ci portent la marque.

Les uns cherchent à découvrir des situations paradoxales, étonnantes, à diagnostiquer des « cas pathologiques ». D'autres, tout au contraire, n'étudient ces cas, qui paraissent singuliers, que pour modifier les définitions et faire ainsi apparaître ces cas comme des cas particuliers qu'on pouvait prévoir. Les uns, analystes habiles, cherchent, pour un être mathématique déterminé, à en établir les propriétés, les formules les plus précises, et les plus utiles. D'autres comparent des êtres mathématiques distincts, en discernent les propriétés communes et formulent une théorie qui permet d'établir en une seule fois toutes ces propriétés communes, etc. Ce sont là des façons de voir qui sont à peu près indépendantes du domaine étudié et qui dépendent avant tout de la personnalité de l'auteur, et plus particulièrement de ses caractéristiques mentales. Ses caractéristiques affectives n'apparaissent généralement dans ses écrits que lorsqu'ils donnent lieu à une polémique, ce qui, par la nature même des mathématiques, est assez rare et en tout cas plus rare que pour les autres sciences.

Nous terminerons cette esquisse en citant une remarque profonde de Borel dont la portée s'étend bien *au delà des mathématiques*.

S'il m'est permis d'ajouter quelques mots de conclusion..., je voudrais dire qu'à mon avis, l'unité de l'esprit humain est plus importante que sa diversité et que les méthodes d'invention, d'imagination, de découverte, sont beaucoup plus analogues qu'on ne le croit généralement dans les divers domaines où s'exerce l'activité de l'esprit.

Borel n'a pas eu l'occasion, semble-t-il, de faire connaître sur quoi se basait cette opinion.

On nous permettra donc de présenter plusieurs exemples à l'appui.

Nous pensons que pour beaucoup de mathématiciens, la découverte se produit en deux stades presque contradictoires. Dans l'un, c'est l'intuition qui règne, sans grand souci de rigueur, ni de clarté. Une fois la méthode et le résultat entrevus, le mathématicien reviendra sur ses pas, contrôlera ses raisonnements, il cherchera à les rendre plus rigoureux, plus simples, plus élégants.

Passant à un tout autre domaine, j'ai eu l'occasion d'entendre mon frère, André Fréchet, alors directeur de la célèbre Ecole nationale Boulle, m'expliquer comment il conseillait à ses élèves d'opérer pour faire un projet de meuble. D'abord donner libre cours à son imagination, chercher surtout à décider quelle forme donner à l'objet, choisir les couleurs, etc., en somme, tendre à choisir le meilleur résultat, sans s'occuper de sa réalisation. Mais, ensuite, retourner son tablier, se préoccuper de la possibilité, de la facilité de la réalisation, modifier au besoin le premier projet pour en limiter le prix, etc.

Dans un troisième domaine, l'économiste, feu Nogaro, m'avait, indépendamment, exposé aussi comment c'étaient deux stades distincts qui le conduisaient à un nouveau mémoire.

Un parallélisme frappant se révèle ainsi au cours du processus de création, dans ces trois domaines si différents.

Mais ces exemples soulèvent une objection; si on laisse courir sans bride son imagination, dans le premier stade, les nécessités techniques ne vont-elles pas, dans le second stade, écarter les projets rêvés dans le premier stade.

Dans un passage dont nous n'avons malheureusement pas gardé trace et que nous ne résumerons qu'imparfaitement, Paul Valéry répond à cette objection par une explication qui, donnée pour la poésie, s'étend à bien d'autres domaines de pensée. Dans le premier stade, le poète se livre bien à son inspiration, mais le maniement de la langue, le sens du rythme, sont devenus chez lui une seconde nature, de sorte que son inspiration reste inconsciemment sous l'influence des règles de l'écriture poétique. Le projet sorti de l'inspiration est comme le premier souffle du nouveau-né, qui est déjà préparé à vivre.

TROISIÈME PARTIE

EXPOSÉ DES TRAVAUX SCIENTIFIQUES D'ÉMILE BOREL

ORIENTATION GÉNÉRALE

Il faudrait plusieurs volumes pour seulement résumer tous les travaux de Borel. Nous nous contenterons donc ici d'exposer ses résultats les plus marquants.

Pour une étude plus complète de ses œuvres, on pourra recourir d'abord à la liste bibliographique qui figure à la fin de l'ouvrage « *Selecta* » imprimé chez Gauthier-Villars en 1940 (cette liste suit la reproduction des principaux mémoires de Borel avec des commentaires dus à différents auteurs). On trouvera à la fin de la présente Notice, une liste supplémentaire allant de 1939 jusqu'à la mort de Borel en 1956.

Les recherches de Borel ont porté successivement sur deux domaines différents. Depuis leur début jusqu'à la guerre de 1914-18, il s'est surtout occupé de la théorie des fonctions et des domaines associés à cette théorie. Il signale lui-même que ses découvertes les plus importantes à cette époque ont été: les définitions de la mesure, des fonctions monogènes et de la sommabilité. Ces définitions ont été préparées par l'étude attentive de cas particuliers et suivies des démonstrations, souvent difficiles, des importantes propriétés qu'elles entraînent. Par ces démonstrations, il s'égale aux plus habiles analystes. Mais, souvent, ceux-ci épuisent un sujet déjà posé avant eux et, derrière eux, l'herbe ne repousse plus. Par ses définitions, au contraire, Emile Borel ouvrait des domaines nouveaux, si riches que, malgré ses propres apports, ils susciterent de toutes parts des contributions nouvelles. Vint la guerre. Pendant celle-ci, Borel, après avoir participé aux combats, s'occupa du repérage du son, puis de questions variées concernant le service des inventions intéressant la défense nationale, service dont il fut le

principal organisateur. C'est sans doute son contact, à cette époque, avec des problèmes de physique mathématique et de calcul des probabilités qui l'intéressa à ces questions et détermina son orientation nouvelle.

C'est à ces deux domaines qu'il va consacrer la plupart de ses recherches à partir de 1920. Toutefois, deux correctifs doivent être apportés à cette répartition sommaire. Il n'y a pas eu mutation brusque. Dès avant la guerre, on voit Borel s'intéresser de plus en plus aux questions de probabilités, en commençant par une courte note de cinq pages en 1905. La probabilité qu'un point aléatoire (dont la loi de probabilité sur le segment $(0,1)$ est uniforme) appartienne à un ensemble donné, est évidemment égale à la mesure de cet ensemble. Les travaux de Borel sur la mesure lui ont montré que certains énoncés, certaines démonstrations concernant la mesure, deviennent plus instructifs et plus simples dans le langage des probabilités. Cette remarque n'est-elle pas à l'origine de l'intérêt qu'il avait pris dès avant la guerre pour le calcul des probabilités?

Le second correctif consiste en ce qu'après la guerre de 1914-19, s'il ne s'est plus occupé exclusivement de théorie des fonctions, il ne cessa pas cependant de s'y intéresser, pour prolonger, soit ses propres recherches, soit celles qu'elles avaient suscitées.

Nous examinerons maintenant plus en détail ses recherches dans les différents domaines.

Nous suivrons l'ordre chronologique seulement pour chaque domaine scientifique pris isolément et même, dans ce cas, sans nous y conformer toujours strictement.

ARITHMÉTIQUE

Nous parlerons plus loin de la théorie de la mesure de Borel. En vertu de cette théorie, on est amené à considérer l'ensemble des nombres rationnels comme moins serré que l'ensemble des nombres irrationnels. Or on parvient par des démarches naturelles plus simplement aux premiers nombres qu'aux seconds.

On peut alors considérer comme une généralisation de cette remarque, un résultat de Borel qu'il serait long d'énoncer de

façon précise mais qui peut s'interpréter comme suit : les nombres les plus faciles à définir à partir des entiers sont les plus isolés les uns des autres.

Dans une autre direction, Borel a donné, [50]¹⁾, une méthode pour résoudre le problème suivant :

Etant donnés un polynôme à une ou plusieurs variables, à coefficients entiers et un nombre premier arbitraire p , trouver la puissance la plus élevée p^n de p qui divise le polynôme pour toutes les valeurs entières de la variable.

SÉRIES NUMÉRIQUES

I. *Comparaison des convergences*

Considérons deux séries convergentes à termes positifs $s = \sum u_n$, $t = \sum v_n$ et désignons par $r_n = s - s_n$, $\rho_n = t - t_n$ leurs restes de rang n .

Borel dit que la série s converge plus rapidement que la série t si $\frac{\rho_n}{r_n} \rightarrow \infty$ avec n . Nous dirions plutôt dans ce cas que s converge *beaucoup* plus rapidement que t . Et nous proposons d'adoucir la condition de Borel en disant que s converge plus rapidement que t quand la plus petite limite de $\frac{\rho_n}{r_n}$ est supérieure à l'unité. (Notons cependant que la définition de Borel lui a été très utile dans l'étude des fonctions complexes).

Quand on change l'ordre des termes de $\sum u_n$, elle reste convergente avec la même somme. On voit facilement que la série, $\sum u'_n$, obtenue en rangeant les termes de $\sum u_n$ par ordre de grandeur non croissante, converge au moins aussi rapidement que $\sum u_n$. Nous avons même pu donner un exemple²⁾, où en

¹⁾ Nous renverrons par des numéros entre crochets aux mémoires portant le même numéro, dans la liste bibliographique figurant à la fin de l'ouvrage intitulé *Selecta*, publié en 1940 à l'occasion du Jubilé scientifique d'Emile Borel, ou dans le supplément à cette liste terminant la présente notice. Les renvois aux articles publiés dans le volume *Selecta* mentionné plus haut, p. 2, se présenteront sous la forme (S, 201) pour (*Selecta*, p. 201).

²⁾ C. R. du 27 février 1961.

changeant l'ordre des termes, on peut obtenir une série moins rapidement convergente, même au sens de Borel, que $\Sigma u'_n$.

Borel s'attache particulièrement au cas où les séries considérées ont une « convergence régulière » parce que, d'après lui, ce sont les seules séries qui se rencontrent naturellement. Il montre cependant qu'on peut « fabriquer » une convergence irrégulière et, par exemple, construire une série où les sommes partielles s_n sont, pour une suite de valeurs de n , voisines de e^n et pour une autre suite de valeurs de n , voisines de e^{e^n} .

Représentons par la notation

$$\text{Rap. } s \succ \text{Rap. } t$$

le fait que la série s converge plus rapidement que la série t ; on voit facilement que cette notation est transitive. Nous avons pu montrer par un exemple (voir la note ci-dessus) que la relation: $\text{Rap. } s \gtrsim \text{Rap. } t$ (exprimant qu'on n'a pas: $\text{Rap. } t \succ \text{Rap. } s$) *n'est pas* transitive. Mais notre exemple est à convergence irrégulière. Il serait intéressant de voir si la relation redevient transitive quand on se borne aux convergences régulières.

II. *Sommabilité d'une série*

Borel a obtenu ([5]) une condition suffisante pour qu'en opérant un certain changement dans l'ordre des termes d'une série semi-convergente, on n'altère pas sa somme: il suffit que le produit du terme général (de rang m) par le déplacement maximum des termes qui le précédent, tende vers zéro avec $\frac{1}{m}$.

Mais la contribution principale et très remarquable de Borel concernant les séries, c'est sa définition des séries divergentes sommables, [19], [41], [42] et l'étude de leurs propriétés.

L'égalité:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \dots + x^n + \dots$$

n'était traditionnellement valable que pour $|x| < 1$, c'est-à-dire quand la série était convergente au sens classique.

Mais quand $|x| > 1$, le premier nombre garde un sens alors que le second n'en a plus aucun. Ne peut-on généraliser le sens du mot somme de telle façon que, quand la série aurait une somme au nouveau sens, cette somme soit précisément égale au premier nombre. Avec d'autres, Borel a indiqué et étudié une réponse étendue à cette question, mais il en a tiré de nouvelles et importantes conséquences. Il précise d'abord les conditions qu'il est naturel d'imposer à tout procédé de sommation.

- 1^o Toute série convergente doit être sommable avec la même somme généralisée.
- 2^o Si l'on modifie un nombre fini de termes d'une série sommable, $\sum u_n$, on obtient une série $\sum v_n$ qui doit être sommable et les sommes généralisées ne doivent différer que de la façon qui s'impose, c'est-à-dire d'un nombre égal à $(u_0 + \dots + u_r) - (v_0 + \dots + v_r)$ si le dernier terme modifié est de rang r .
- 3^o Si $\sum w_n$ est aussi une série sommable et si β, γ sont deux nombres réels quelconques, la série $\sum (\beta u_n + \gamma w_n)$ doit être aussi sommable et sa somme généralisée doit être égale à $\beta s + \gamma t$ si s et t sont les sommes généralisées de $\sum u_n$ et $\sum w_n$.

Il impose encore deux autres conditions 4^o et 5^o que nous énoncerons plus loin.

Si $s_n = u_0 + \dots + u_n$ reste compris entre deux bornes quand n varie, il est naturel d'imposer à la somme généralisée d'être aussi entre ces deux bornes. Dès lors, Borel observe :

1^o qu'un moyen d'y parvenir est de prendre pour somme généralisée une moyenne des s_n ;

2^o mais la somme généralisée devrait se rapprocher surtout des s_n de rangs élevés. Il y a donc lieu, pour le calcul de leur moyenne, d'affecter les s_n de poids d'autant plus grands que n est plus grand. Pour réaliser cette condition au maximum, Borel propose de faire dépendre les poids d'un paramètre α de façon que la discrimination souhaitée s'accentue quand α augmente. Plus précisément, il propose de prendre une moyenne de la forme :

$$\frac{c_0 s_0 + \dots + c_n \alpha^n s_n + \dots}{c_0 + c_1 \alpha + \dots + c_n \alpha^n + \dots}$$

où les c sont des nombres > 0 , le dénominateur $\neq 0$ et où l'on fait croître a indéfiniment.

Borel abandonne alors ces généralités et choisit de prendre:

$$c_n = \frac{1}{n!}$$

de sorte que le poids de s_n sera:

$$e^{-a} \frac{a^n}{n!}$$

et la somme généralisée sera la limite quand $a \rightarrow +\infty$, de

$$e^{-a} \sum \frac{a^n s_n}{n!} .$$

Il montre que cette définition vérifie les conditions 1^o, 2^o, 3^o, ci-dessus.

On peut observer que ce dernier résultat peut être obtenu pour une sommation beaucoup plus générale.

Appelons P la suite de poids $p_o(a), \dots p_n(a) \dots$ vérifiant naturellement les conditions classiques

$$p_n(a) \geq 0, \quad \sum_n p_n(a) = 1 .$$

Pour réaliser la condition supplémentaire désirée sur les poids, nous supposerons, de plus, que pour chaque n fixe:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} p_n(a) = 0 ,$$

car les premiers des $p_o(a), \dots p_n(a), \dots$ seront très petits pour a assez grand, alors que $\sum p_n(a)$ restant égal à l'unité, les suivants ne le seront que pour a beaucoup plus grand. En résumé, nous dirons qu'une série $\sum u_n$ est sommable P si:

A. La série

$$m(a) = s_o p_o(a) + \dots + s_n p_n(a) + \dots$$

est convergente quel que soit a (ou au moins pour a assez grand).

B. Quand $a \rightarrow +\infty$, $m(a)$ tend vers une limite finie, s .

Alors, s sera appelée la *somme généralisée* P de $\sum u_n$.

A titre d'exemples où les conditions A, B, sont réalisées figurent non seulement la sommation exponentielle de Borel, où

$$p_n(a) = e^{-a} \frac{a^n}{n!}$$

mais aussi plusieurs définitions connues de la sommabilité, où $p_n(a)$ a des expressions différentes.

Par exemple, Cesaro prend dans sa définition (C, 1) a entier et

$$p_n(a) = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{pour } n < a \\ 0 & \text{pour } n \geq a \end{cases}$$

Marcel Riesz prend, dans sa définition (C, δ), a entier et

$$m(a) = u_o + \left(1 - \frac{1}{a}\right)^\delta u_1 + \dots + \left(1 - \frac{a-1}{a}\right)^\delta u_{a-1};$$

donc

$$p_a(a) = p_{a+1}(a) = \dots = 0,$$

$$p_o(a) = 1 - \left(1 - \frac{1}{a}\right)^\delta, \dots p_n(a) = \left(1 - \frac{n}{a}\right)^\delta - \left(1 - \frac{n+1}{a}\right)^\delta,$$

pour $n < a-1$, et

$$p_{a-1}(a) = \left(1 - \frac{a-1}{a}\right)^\delta.$$

Lindelöf prend

$$m(a) = u_o + u_1 + \frac{1}{2} u_2 + \dots + \frac{1}{n} u_n + \dots$$

donc

$$p_o(a) = 0, p_1(a) = 1 - \frac{1}{2}, \dots p_n(a) = \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)} \frac{n+1}{a}, \dots$$

On peut démontrer que les propriétés 1^o, 2^o, 3^o, sont vérifiées pour la sommabilité P la plus générale, ce qui dispense de les

démontrer successivement pour les quatre cas particuliers ci-dessus ou pour les nombreuses autres sortes de sommabilité qui ont été proposées.

Toeplitz et Schur ont obtenu une condition nécessaire et suffisante pour que la condition 1^o soit réalisée par un procédé de sommation de la forme:

$$s = \lim_{a \rightarrow \infty} \sum_n p_n(a) s_n.$$

Quand cette condition de Toeplitz est réalisée, les conditions 2^o et 3^o sont aussi réalisées. La sommation de Toeplitz est un peu plus générale que la sommation P . Mais elle n'est plus une moyenne et perd ainsi le caractère intuitif de la sommation P . C'est sans doute pourquoi la plupart des formules de sommation proposées se trouvent être des sommations P particulières.

Ni les sommations de Toeplitz, ni les sommations P ne suffisent, au contraire, à vérifier les conditions 4^o et 5^o posées par Borel.

Occupons-nous d'abord de la condition 4^o.

4^o Si une série Σu_n est sommable, on doit pouvoir grouper en un seul terme, un nombre fini quelconque, r , des premiers termes de Σu_n , sans modifier, ni sa sommabilité, ni sa somme généralisée.

Pour pouvoir traiter de cette condition 4^o, rappelons qu'avant de définir la sommabilité, Borel avait défini la limite généralisée d'une suite: $x_0, x, \dots x_n, \dots$; c'est la limite quand elle existe, de $e^{-a} x(a)$, quand $a \rightarrow +\infty$ où

$$x(a) = x_0 + x_1 a + \dots + x_n \frac{a^n}{n!} + \dots$$

est supposée convergente quel que soit a .

En vue de 4^o, Borel a cru d'abord [19] avoir démontré que si $x_0, x_1, \dots x_n \dots$ a une limite généralisée, il en est de même de la suite $x_1, \dots x_n \dots$. Toutefois cette démonstration est inexacte, comme l'a signalé Hardy¹⁾ en donnant le très simple exemple suivant: $x(a) = \cos e^a$, pour lequel la suite x_0, x_1, x_2, \dots a une limite généralisée, mais non la suite x_1, x_2, \dots

1) Voir *The Quarterly Journal of Math.*, 35, 1903.

Mais dans son ouvrage ultérieur *Leçons sur les séries divergentes*, Borel ne reproduit pas son erreur. Au contraire, il s'exprime ainsi: « Mais l'étude des séries simplement sommables présente des difficultés analogues à l'étude des séries qui sont convergentes sans l'être absolument; nous la laisserons de côté, pour nous occuper exclusivement des séries *absolument sommables* que nous allons définir. »

Observons cependant que l'on peut sauver le premier résultat en imposant une condition supplémentaire. Plus précisément: quand la série $u_0 + u_1 + \dots$ est sommable P (avec la somme généralisée s), la condition nécessaire et suffisante pour que la série $u_1 + u_2 + \dots$ soit sommable P , avec la somme généralisée $s - u_0$, est que la suite u_1, u_2, \dots ait pour limite généralisée zéro.

Le cas de la condition 5^o est plus compliqué encore. On sait que si les séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ sont absolument convergentes au sens classique et ont pour sommes s et t , alors le produit st est égal à la somme de la série (absolument convergente) $\sum w_n$ où

$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \dots + u_n v_0.$$

Mais quand les séries s et t sont convergentes sans être absolument convergentes, il peut arriver que la série $\sum w_n$ diverge. *A fortiori*, la propriété classique ne peut être vérifiée par la sommabilité P que si l'on impose à « cette sommabilité » une nouvelle condition supplémentaire.

Nous n'essaierons pas de préciser cette condition. Car il est déjà très difficile de la déterminer pour la sommabilité exponentielle. Pour traiter cette question, il a fallu à Borel, déployer, en dehors de ses dons d'invention, une très grande habileté analytique.

Il particularise encore plus la sommabilité P , non seulement en prenant $p_n(a) = e^{-a} \frac{a^n}{n!}$, mais en exigeant de la série $\sum u_n$ qu'elle soit « absolument sommable », en ce sens que chacune des trois intégrales suivantes doit avoir un sens ¹).

¹) La condition précédente: que $e^{-a} x(a)$ ait une limite quand $a \rightarrow \infty$ est équivalente à la condition que l'intégrale $\int_0^\infty e^{-a} u(a) da$ ait un sens.

$$\int_0^{+\infty} e^{-a} u(a) da, \int_0^{+\infty} e^{-a} |u(a)| da, \int_0^{+\infty} e^{-a} |u^{(r)}(a)| da$$

et ceci quel que soit l'ordre r de dérivation dans $u^{(r)}(a)$.

Ceci étant, Borel démontre ce que deviennent les propriétés 2^o, 3^o, 4^o, 5^o quand on y suppose les séries données absolument sommables et quand on affirme que les séries qui en sont déduites dans ces propriétés sont absolument sommables. La propriété 1^o subsiste aussi sous la forme: toute série convergente est absolument sommable et sa somme est égale à sa somme généralisée. De ces résultats, Borel déduit un théorème très général: si l'on a un polynôme à une ou plusieurs variables réelles, par exemple, $P(u, v, w)$, si l'on y remplace u, v, w par des séries absolument sommables et si l'on développe formellement $P(u, v, w)$ après ce remplacement, on obtient une série absolument sommable dont la somme généralisée est égale au résultat obtenu en remplaçant dans $P(u, v, w)$, u, v, w par leurs sommes généralisées.

Mais c'est l'intervention des séries divergentes dans la théorie des fonctions de variables complexes qui a incité Borel à les rendre convergentes en un sens plus général et qui a fourni la plus importante de ses applications (dont nous parlerons plus loin), sa sommabilité exponentielle. Après les publications de Borel sur ce sujet, le nombre des mémoires d'autres auteurs sur les séries divergentes a décuplé.

THÉORIE DES ENSEMBLES

Plaçons-nous dans un espace R à 1, 2, 3 ou un nombre fini de dimensions. Borel appelle ensemble bien défini et on appelle ensemble borélien (ou ensemble B) soit un ensemble élémentaire (intervalle, rectangle, cube, etc ...) soit un ensemble formé à partir d'ensembles élémentaires par la répétition, un nombre fini ou dénombrable de fois, des deux opérations suivantes:

I. Réunion d'une suite dénombrable finie ou infinie, d'ensembles disjoints déjà définis.

II. Différence de deux ensembles déjà définis dont l'un contient l'autre.

Borel démontre alors deux théorèmes qui sont fondamentaux pour la théorie des fonctions :

I. Si tous les points d'un ensemble borné et fermé sont intérieurs chacun à l'un au moins des ensembles élémentaires F_1, F_2, \dots , ils sont intérieurs chacun à l'un au moins d'un nombre fini fixe ($F_{r_1}, F_{r_2}, \dots F_{r_s}$) des ensembles F_n .

II. Soit E un ensemble borélien et $\varepsilon > 0$. On peut rassembler un nombre fini d'ensembles élémentaires $I_1, \dots I_n$ tel que l'ensemble des points de E qui n'appartiennent à aucun des I_r et des points des I_r qui n'appartiennent pas à E soit compris à l'intérieur de la réunion d'ensembles élémentaires en nombre fini dont l'étendue totale est $< \varepsilon$.

MESURE DES ENSEMBLES

La découverte d'une définition satisfaisante de la mesure d'un ensemble a joué un rôle capital dans l'élaboration des nouvelles théories développées par Borel et ses disciples ou successeurs.

Après avoir exprimé la notion intuitive de la mesure par la longueur d'un segment rectiligne, par l'aire d'un polygone, par le volume d'un polyèdre, etc. ..., les mathématiciens se sont efforcés de traduire cette notion intuitive dans le cas plus général de la mesure d'un ensemble euclidien (en commençant par le cas d'un ensemble linéaire). Des définitions à cet effet ont été progressivement proposées, entre autres par Riemann, Cantor, Darboux et Jordan. Un nouveau progrès était nécessaire.

Chaque progrès avait consisté à estimer la mesure d'un ensemble E au moyen de la longueur totale d'un ensemble d'intervalles couvrant E . Mais on avait toujours pris ces intervalles parmi des intervalles choisis d'avance. Borel a écrit lui-même que son point de départ a été de prendre, pour chaque ensemble, des intervalles non seulement couvrant l'ensemble mais dépendant directement de cet ensemble. En prenant comme intervalles ceux qu'on obtient en divisant un segment en parties égales, Jordan arrivait à la conclusion que l'ensemble

R des points d'abscisse rationnelle entre 0 et 1 avait pour mesure l'unité. En attachant, avec Borel, à chaque point d'abscisse rationnelle, r_n , un segment de longueur $\frac{\varepsilon}{n^2}$, on constate que R est couvert par un ensemble d'intervalles dont la longueur totale est $\varepsilon \sum \frac{1}{n^2}$; sa mesure devant intuitivement être inférieure à ce total est aussi petite que l'on veut avec ε . Borel arrivait ainsi à cette conclusion qui, à l'époque, a paru surprenante, que l'ensemble des nombres rationnels, pourtant dense partout, était de mesure nulle. C'est par cet exemple que Borel a été conduit à la notion générale de mesure.

Les définitions actuellement en usage sont celles de Borel et de Lebesgue. La mesure de Borel ne s'appliquerait qu'au cas d'un ensemble dit mesurable B (on a défini plus haut, p. 52, les ensembles boréliens).

La mesure d'un ensemble mesurable B s'obtient au moyen des opérations mêmes par lesquelles il a été défini plus haut, la mesure d'un intervalle étant prise égale à sa longueur.

Lebesgue a donné une définition de la mesure d'un ensemble, qui garde un sens, que l'ensemble soit ou non mesurable B . Mais quand l'ensemble est mesurable B , il est aussi mesurable au sens de Lebesgue et a même mesure dans les deux sens.

En réalité, ce qu'il y a de curieux dans le cas de la définition de la mesure, c'est que Borel a commencé son étude de la mesure, précisément en donnant une définition des ensembles de mesure nulle¹⁾, qui est valable pour des ensembles non mesurables B . Tout ensemble mesurable au sens de Lebesgue étant la réunion d'un ensemble mesurable B et d'un ensemble de mesure nulle, on peut dire que Borel avait donné implicitement *d'avance*, une définition des ensembles mesurables au sens de Lebesgue, équivalente à la définition de Lebesgue. On peut le voir même encore mieux et d'une façon plus directe. Car, d'après M. Denjoy, Borel écrit en substance: Si un ensemble E contient un ensemble mesurable B , E_2 , de mesure α , la mesure de E est au moins égale

¹⁾ Rappelons qu'un ensemble linéaire est de mesure nulle quand pour tout $\varepsilon > 0$, tous ses points sont chacun intérieur à l'un au moins d'un ensemble de segments $S_1, S_2, \dots, S_n \dots$ dont la somme des longueurs est $< \varepsilon$.

à α . Si E est contenu dans un ensemble E_2 , mesurable B de mesure β , la mesure de E est au plus égale à β . Dans le cas où $\beta = \alpha$ la mesure de E sera $\geq \alpha$ et $\leq \alpha$. De là, à dire que si $\beta = \alpha$ la mesure de E vaut α , il n'y a qu'un pas. Lebesgue le franchit. On peut se demander pourquoi Borel n'a pas franchi ce pas lui-même. Nous pensons que cela tient à ce qu'il veut, très consciemment, éliminer les ensembles qui ne sont pas « bien définis », et que pour lui, les autres ne relevant pas d'une définition constructive, sont sans existence réelle.

Nous avons dit plus haut que si les définitions constructives sont, en effet, plus complètes, et sont nécessaires pour les applications, nous ne voyons pas de raison d'éliminer les définitions descriptives qui rendent généralement plus simples les démonstrations¹⁾.

C'est à ce point de vue que, tout en attribuant à Borel l'antériorité complète pour la notion de mesure, nous pensons que la définition de Lebesgue, d'ailleurs donnée d'une façon différente et intéressante, a déterminé un nouveau progrès.

Toutefois, il faut observer que les propriétés des ensembles mesurables B se conservent dans toute homéomorphie, ce qui n'est pas le cas des ensembles mesurables au sens de Lebesgue.

C'est pourquoi en Calcul des Probabilités, les ensembles « probabilisables » sont les ensembles « boréliens » et non les ensembles mesurables au sens de Lebesgue.

Exemples d'applications

I. Tout ensemble dénombrable est de mesure nulle.

II. La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble E soit de mesure nulle est qu'il existe une suite d'intervalles distincts I_1, I_2, \dots dont la série des longueurs est convergente et telle que tout point de E soit intérieur à une infinité des intervalles I_n .

¹⁾ Il faut d'ailleurs noter que l'opposition de Borel aux définitions descriptives n'a pas été totale. On lit, par exemple, en note¹⁾ de la page 48, de la troisième édition de ses *Leçons sur la Théorie des fonctions*: « Le procédé que nous avons employé revient, en réalité, à ceci: ... définir les éléments nouveaux qu'on introduit, à l'aide de leurs propriétés essentielles, c'est-à-dire de celles qui sont strictement indispensables pour les raisonnements qui vont suivre. » Il n'est fait ici aucune allusion à la « construction » des éléments nouveaux.

Soit alors F l'ensemble des points qui sont chacun intérieurs à une infinité des intervalles I_n . F comprend E et appartient à la fermeture \bar{E} de E . En particulier, si E est fermé, E est identique à F .

III. On trouvera plus loin des applications très nombreuses de la notion de mesure dans la théorie de l'intégration, dans la théorie des fonctions et dans le calcul des probabilités.

RARÉFACTION D'UN ENSEMBLE DE MESURE NULLE

C'est au cours de ses études des fonctions monogènes que Borel a senti la nécessité d'introduire la notion d'ensemble de mesure nulle (*avant* d'avoir défini la mesure d'un ensemble). Les mêmes études lui ont fait voir qu'il faudrait distinguer entre les différentes sortes de mesure nulle. Et cette nécessité s'est présentée à nouveau en calcul des Probabilités. Il a alors introduit la notion de « mesure asymptotique » d'un ensemble [169], dont, beaucoup plus tard, il a légèrement modifié la définition sous le nom de « raréfaction » (d'un ensemble de mesure nulle). Cette notion nouvelle a moins attiré l'attention que celle de mesure. Et pourtant, nous sommes d'accord avec Borel pour penser que l'importance de cette classification des ensembles de mesure nulle « paraît devoir être comparable à celle de la notion même d'ensemble de mesure nulle. »

Mais si Borel a même pu imaginer trois modes distincts de classification, il n'en a pas établi les relations. Et s'il a obtenu des résultats importants, c'est en partant d'hypothèses qui ne sont pas toujours nécessaires et ne sont pas toujours suffisantes. Avant donc de prolonger et d'appliquer la théorie de Borel, il y aurait lieu de la revoir et de la compléter pour la rendre plus cohérente.

Pour toutes ces raisons, nous serions heureux si ces quelques lignes pouvaient inciter de jeunes chercheurs à entreprendre une étude plus systématique et plus complète de la raréfaction et à en donner des applications.

La première idée de Borel, [S, p. 185] consiste à établir une inégalité symbolique, (à définir), entre une sorte de « grandeur »

d'un ensemble de mesure nulle, E , et la rapidité de convergence d'une série convergente à termes positifs associée convenablement à E . Nous avons vu qu'il existe au moins une suite dénombrable d'intervalles I_n qui « surcouvre » E et dont la série des longueurs Σl_n est convergente.

Borel dit alors que « la mesure asymptotique de E » est « inférieure » ou égale à Σl_n . Il est revenu plus tard à la question et a perfectionné son idée primitive. Au lieu de définir la « grandeur » d'un ensemble comme inférieure ou égale à la convergence d'une série, notions qui sont des entités totalement différentes, il compare directement entre eux deux ensembles E, F de mesure nulle et ramène cette comparaison à celle des convergences de séries.

Une première façon d'opérer serait la manière suivante. Disons provisoirement d'un ensemble dénombrable \mathcal{T} d'intervalles qui « surcouvre » E et est de longueur totale finie, qu'il « majore » E . Soient alors, de même, \mathcal{U} un ensemble dénombrable d'intervalles qui majore F . On dira que E est plus *rarefié* que F si la série V des longueurs des intervalles de \mathcal{T} converge plus rapidement (voir p. 45) que la série U analogue pour \mathcal{U} .

Mais plusieurs difficultés se présentent. D'abord, le fait que l'ensemble dénombrable d'intervalles \mathcal{T} majore E est indépendant de l'ordre de ces intervalles, tandis que la rapidité de la convergence, de leurs longueurs peut en dépendre, comme nous l'avons montré ailleurs (voir p. 45). Dans la définition précédente, il ne faut pas faire intervenir T , mais une suite dans un ordre déterminé des intervalles de \mathcal{T} . Borel suppose, plus loin, que l'on a rangé la suite par ordre de longueurs non croissante. D'autre part, non seulement, il y a plusieurs suites formées avec \mathcal{T} qui majorent E , mais il n'y a pas un seul ensemble \mathcal{T} qui majore E .

Borel fait face à cette difficulté en se plaçant dans le cas où, parmi les suites S d'intervalles qui majorent E , il y en a une, S_o , qui converge plus rapidement¹⁾ que toutes les autres. En réalité, cela n'est pas possible, mais il suffit de supposer que S_o converge au moins aussi rapidement que tous les S . Quand il y a, de même, pour F , une suite ε_o d'intervalles majorant F qui con-

¹⁾ Expression abrégée pour dire que la série des longueurs des intervalles de S_o converge plus rapidement que la série analogue pour S .

vergée au moins aussi rapidement que toute autre suite ε analogue, on dira que E est plus raréfié que F si la suite S_o converge plus rapidement que ε_o .

Borel écrit [285, p. 164] « nous discuterons plus loin les difficultés que peut présenter ce choix [celui de S_o]; ce qui est certain, c'est qu'il y a de nombreux exemples où ce choix s'impose et ne peut être modifié; les ensembles de mesure nulle correspondants sont donc classés les uns par rapport aux autres sans ambiguïté ».

Borel traite, en effet, de nombreux exemples d'ensembles de mesure nulle auxquels il associe des suites majorantes déterminées. Ces associations sont naturelles d'un point de vue intuitif. Mais nous n'avons pas vu démontré par Borel que ces suites majorent au moins aussi rapidement (au sens de sa propre définition) que toutes les autres suites correspondantes: c'est, par exemple, ce qu'on constate, aux 11^e et 12^e lignes de la p. 179 [285]. Tout se passe comme si Borel, dans ses exemples, ignorait sa propre définition de l'inégalité de deux raréfactions pour y substituer une définition intuitive. C'est encore ce qu'il fait dans les pages 184 à 191 de son livre consacrées au « calcul de la raréfaction ». Il y introduit un symbolisme très ingénieux de la raréfaction. Par exemple, la raréfaction d'un ensemble E réduit à un point est symbolisée par ω^{-1} , où ω est le premier nombre transfini de Cantor. La raréfaction de l'ensemble F des nombres décimaux qui n'utilisent pas un chiffre donné (par exemple, 7) est symbolisée par $\omega^{-(1-b)}$ où :

$$b = \frac{\log 9}{\log 10}.$$

Mais si $1-b$ est bien plus petit que 1, si l'on est tenté d'écrire que ω^{-1} est plus petit que $\omega^{-(1-b)}$ et d'en conclure que E est plus raréfié que F , cette dernière conclusion n'est pas démontrée par Borel quand on a recours à sa première définition.

D'autre part, Borel introduit deux autres limitations qui ne nous paraissent pas indispensables. Il se restreint à l'étude des ensembles boréliens (de mesure nulle) et au cas où la convergence des séries de longueurs qu'il considère est « régulière ». Or,

comme nous l'avons montré (C. R. du 27 Février 1961), on peut obtenir un certain nombre de propriétés de la raréfaction qui subsistent quand on n'impose aucune de ces deux limitations.

Borel définit encore deux autres sortes de raréfaction. La première est la « raréfaction logarithmique ». Il considère un ensemble E de mesure nulle non dense, contenu dans $(0, 1)$ et déterminé par la connaissance d'une infinité d'intervalles contigus $I_i = a_i b_i$ de longueurs m_i . Il désigne par $N(x) - 1$ le nombre des I_i dont la longueur est $\geq x$ et par $P(x)$ la longueur totale des $N(x)$ intervalles à l'intérieur desquels sont les points de E (quand les I_i n'ont pour extrémité ni 0, ni 1).

Quand $x \rightarrow 0$, le rapport:

$$\rho(x) = \frac{\log N(x)}{\log N(x) - \log P(x)}$$

a une plus grande limite finie ρ que Borel appelle *raréfaction logarithmique* de E . A titre d'exemple, Borel considère l'ensemble de mesure nulle constitué des points dont les abscisses entre 0 et 1 ont un développement décimal n'utilisant que les nombres 2, 5, 8. Il trouve que sa raréfaction logarithmique a pour valeur:

$$\rho = \frac{\log 3}{\log 10}.$$

Or, il avait déjà symbolisé la raréfaction de tels ensembles par la notation $\frac{\omega^\rho}{\omega}$. Il y voit une rencontre et une confirmation de la compatibilité de ces définitions. Mais aucun rapport n'est signalé entre cette définition et sa définition primitive par comparaison de rapidité de convergence des suites majorantes.

En application, Borel étudie la « somme vectorielle » $C = (A) + (B)$ de deux ensembles A, B compris dans $(0, 1)$, définie comme l'ensemble de ceux des points de $(0, 1)$ dont l'abscisse est la somme des abscisses d'un point de A et d'un point de B .

Il donne un exemple où la somme des raréfactions logarithmiques étant égale à l'unité, la somme vectorielle a pour mesure l'unité:

Après démonstration simplifiée d'un résultat dû à Marshall Hall, Borel donne une troisième définition de la raréfaction, distincte des précédentes et qu'il appelle la *raréfaction relative minimum* ou plus brièvement la raréfaction R .

On considère un ensemble E de mesure nulle, compris dans $(0 ; 1)$, comprenant les extrémités 0 et 1 mais dense nulle part. On l'obtient en enlevant du segment $(0 ; 1)$ des intervalles N contigus à E et denses dans tout intervalle. On peut supposer qu'on les place dans leur ordre de grandeur non croissante. Soit b_n la longueur du plus petit de $n+1$ intervalles B : ceux qui restent quand on a placé n intervalles N , dont le plus petit est de longueur a_n . En posant :

$$\mu_n = \frac{b_n}{a_n + b_n}$$

Borel désigne par R le plus grand nombre inférieur à tous les μ_n .¹⁾

Dans le cas où l'on a $b_n \geq a_n$, pour tout n , on aura

$$r_n \geq \frac{1}{2}, \quad \text{donc} \quad R \geq \frac{1}{2}.$$

Borel montre que: pour que la somme vectorielle de deux ensembles E , E' de raréfaction R et R' renferme tous les points de l'intervalle $(0; 2)$, il suffit que l'on ait :

$$R + R' \geq 1.$$

Plus généralement, la somme vectorielle de E , E' a une raréfaction R'' telle que :

$$R'' \geq R + R'.$$

Borel, toujours novateur, a ainsi défini trois sortes de raréfactions. Mais il les a étudiées indépendamment, sans s'occuper de savoir si les définitions de l'inégalité de raréfaction qui en découlent sont compatibles.

Borel a écrit [285, p. 191]: « La théorie de la raréfaction qui complète celle de la mesure est un sujet d'étude assez vaste; je souhaiterais qu'il tentât de jeunes chercheurs. »

¹⁾ Voir notre Note aux *C. R.* 1962.

Il pense évidemment aux prolongements de ses résultats. Les diverses observations que nous avons faites plus haut conduisent à penser qu'il y aurait d'abord lieu de reprendre l'exposé de ses résultats en y introduisant les compléments qu'ils réclament.

Il est regrettable que le souhait de Borel n'ait pas encore été exaucé, malgré l'importance de la notion de raréfaction, des définitions si originales de Borel et de leurs applications possibles.

(La notion de raréfaction est utile, entre autres, dans l'étude des fonctions de variable complexe et dans le calcul des probabilités).

FONCTIONS RÉELLES (DE VARIABLES RÉELLES)

Borel a démontré [87, p. 37] que si $r_n(x)$ est le reste de rang n d'une série de fonctions de x , mesurables, qui converge sur un segment (a, b) , la mesure de l'ensemble des points x où $|r_n(x)| > \varepsilon$

tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$ pour toute valeur positive de ε . Borel

a aussi démontré [133, s, p. 158] que: étant donnée une fonction $F(x)$, bornée, définissable analytiquement sur un segment (a, b) et deux nombres positifs, ε, α , on peut trouver un polynôme $P(x)$ tel que la mesure B de l'ensemble des points x où $|F(x) - P(x)| > \varepsilon$ soit inférieure à α .

En faisant tendre ε et α vers zéro, Borel en déduit qu'il y a une suite de polynômes $P_1(x), \dots, P_n(x), \dots$ qui converge vers $F(x)$ *presque partout* (c'est-à-dire sauf, peut-être, sur un ensemble de mesure nulle).

Borel conclut: « Les singularités des fonctions $f(x)$ occupent très peu de place; il est, par suite, possible, dans bien des circonstances, d'opérer comme si elles n'existaient pas. »

C'est un de ses arguments pour écarter l'étude des fonctions définies abstrairement et pour se restreindre à celle des fonctions « calculables ».

Intégration.

Borel déduit des résultats précédents une définition de l'intégrale, totalement différente de celle de Lebesgue, quoiqu'elle lui soit équivalente dans le cas où la fonction intégrée est bornée.

Par définition, si $f(x)$ est bornée et définissable analytiquement sur un segment (a, b) et par suite s'il existe une suite de polynomes $P_n(x)$ qui converge presque partout vers $f(x)$ sur (a, b) , l'intégrale de $f(x)$ sur a, b sera la limite de la suite des intégrales $\int_a^b P_n(x) dx$.

Cette définition semble plus simple que celle de Lebesgue. Mais elle se prête moins à l'extension d'une définition de l'intégrale au cas où la variable et la fonction sont deux éléments de deux espaces de Banach, extension nécessaire dans le calcul des probabilités et ailleurs.

Une polémique s'est élevée ensuite entre Borel et Lebesgue sur la définition de l'intégrale, dans quatre articles ou notes des *Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, de 1918 à 1920. Dans la première, Borel avait présenté sa définition, qu'il considérait comme constructive, contrairement à celle de Lebesgue.

Lebesgue a réagi violemment. Dans sa réclamation, à côté de remarques justes, on s'aperçoit qu'il interprète, à tort, certaines remarques de Borel de la façon qui lui est la plus défavorable (à lui, Lebesgue), et c'est ce qui lui permet, en partant de là, d'en établir le mal-fondé. Cette attaque excessive a été très pénible à Borel, qui rappelle en quels termes admiratifs il a célébré les travaux de Lebesgue.

En résumé, la priorité de Lebesgue dans la définition de l'intégrale est incontestable. Mais, d'une part, elle utilise de façon essentielle la notion de mesure introduite par Borel, et, d'autre part, elle n'enlève rien à l'intérêt de la définition, entièrement différente, de Borel. Au reste, plus tard, F. RIESZ et HAAR, en donnant chacun une définition différente des précédentes, témoignent eux-mêmes que leurs définitions, qui sont constructives, ont suivi la voie tracée par Borel.

Séries dérivées.

Borel a prouvé qu'étant donnés des nombres réels arbitraires a_0, a_1, \dots , on peut toujours former une fonction de variable

réelle, $f(x)$, telle que pour $x = 0$, par exemple, $f(x)$ ait des dérivées de tous les ordres et que pour $x = 0$, $f(x)$ et ses dérivées successives aient respectivement les valeurs a_0, a_1, \dots . On peut choisir en particulier a_0, a_1, \dots de sorte que le développement de $f(x)$ en série de Taylor diverge plus rapidement qu'une série entière donnée d'avance.

D'autre part, Borel a montré que toute fonction de variable réelle $\varphi(x)$, admettant des dérivées de tout ordre dans un intervalle I donné, peut être mise sous la forme de la somme d'une série de Taylor et d'une série de Fourier, ces séries et les dérivées successives terme à terme de ces séries convergeant uniformément dans I . Et leurs sommes respectives convergent vers les dérivées correspondantes de $\varphi(x)$.

Ces théorèmes importants ont été obtenus par Borel en faisant usage d'une méthode ingénieuse et nouvelle pour la résolution d'un système d'une infinité d'équations linéaires à une infinité d'inconnues.

Avant lui, on avait cherché à résoudre un tel système en utilisant l'analogie avec les systèmes finis comportant le même nombre d'inconnues que d'équations. Borel, au contraire, observe que, du moment qu'il y a une infinité d'inconnues, on peut déterminer pour chaque équation autant d'inconnues que l'on veut: on aura toujours un nombre suffisant d'indéterminées dans les équations suivantes. De plus, Borel indique comment procéder pour ces choix successifs de valeurs des inconnues.

Interpolation.

La formule d'interpolation de Lagrange permet de déterminer le polynôme $P_q(x)$ de degré q qui est égal à une fonction donnée $f(x)$ pour $q+1$ valeurs données de x . D'autre part, on sait, d'après WEIERSTRASS, qu'on peut déterminer un polynôme aussi approché que l'on veut d'une fonction continue donnée. Il est alors naturel de se demander si le polynôme $P_q(x)$ ne pourrait fournir un tel polynôme en l'égalant à $f(x)$ pour un grand nombre q de valeurs de x .

Sans savoir que MÉRAY, puis RUNGE avaient déjà répondu par la négative, Borel a d'abord formé [86] « un exemple d'une fonction pour laquelle la formule de Lagrange, loin de donner

une approximation indéfinie, diverge lorsque q augmente indéfiniment ».

Ayant obtenu ce résultat négatif, Borel a cherché s'il ne serait pas possible de préciser le théorème de Weierstrass d'une autre façon. Il y a réussi au moyen de la formule remarquable

$$f(x) = \lim_{q \rightarrow \infty} \sum_p M_{p,q}(x) f\left(\frac{p}{q}\right)$$

où l'on suppose $0 \leq x \leq 1$, où $\frac{p}{q}$ est une valeur rationnelle de x

et où $M_{p,q}(x)$ est un polynôme déterminé de degré q qui est indépendant de $f(x)$. On peut d'ailleurs choisir parmi les expressions possibles de $M_{p,q}(x)$. Serge BERNSTEIN a montré qu'on pouvait prendre l'expression particulièrement simple suivante:

$$M_{p,q}(x) = C_q^p x^p (1-x)^{q-p}.$$

FONCTIONS COMPLEXES DE VARIABLES COMPLEXES

Séries de Taylor

Borel a établi ce résultat inattendu qu'il pouvait y avoir une influence de la nature arithmétique des coefficients d'une série de Taylor sur la nature analytique de sa somme. En effet, en utilisant une propriété des déterminants obtenue par M. HADAMARD, Borel a pu prouver qu'une série de Taylor à coefficients entiers ne peut représenter une fonction méromorphe que si celle-ci est une fraction rationnelle¹⁾.

Borel a pu aussi compléter et étendre le théorème célèbre de M. Hadamard, d'après lequel: si $\varphi(z) = \sum a_n z^n$, $\Psi(z) = \sum b_n z^n$, $f(z) = \sum a_n b_n z^n$ et si α, β sont deux points singuliers respectifs de $\varphi(z)$ et de $\Psi(z)$, α, β est un point singulier de $f(z)$. Par exemple, d'après Borel: si $\varphi(z)$ et $\Psi(z)$ sont des fonctions uniformes à singularités ponctuelles, il en est de même de $f(z)$; en particulier, si $f(z)$ et $\Psi(z)$ sont méromorphes, il en est de même de $f(z)$.

¹⁾ Dans sa *Notice* (146), Borel a oublié de mentionner ce cas d'exception, qu'il avait pourtant signalé dans son mémoire original [11].

Dans une autre direction, Borel a démontré qu'en général le cercle de convergence d'une série de Taylor est une coupure de la fonction représentée par cette série. Ici, en général, peut signifier: si les coefficients de la série sont des nombres aléatoires indépendants.

Fonctions entières

Une fonction entière étant une fonction analytique sans point singulier, WEIERSTRASS avait démontré qu'elle peut se mettre sous la forme:

$$e^{G(z)} \prod_{n=1}^{\infty} P_k \left(\frac{z}{a_n} \right)$$

où $a_1, a_2 \dots$ sont les zéros de la fonction $F(z)$ considérée, où

$$P_k(u) = (1-u) e^{\frac{u}{1} + \frac{u^2}{2} + \dots + \frac{u^k}{k}},$$

dans lequel k est le plus petit nombre entier tel que la série

$$\sum_n \frac{1}{|a_n|^{k+1}} \quad \text{avec} \quad |a_1| \leq |a_2| \leq \dots$$

soit convergente et où $G(z)$ est une fonction entière.

Dans le cas où il n'existe pas de nombre k et dans celui où, k existant, $G(z)$ n'est pas un polynôme, LAGUERRE dit que la fonction $F(z)$ est de genre infini. Dans le cas contraire, LAGUERRE appelle *genre* de $F(z)$, le plus grand des deux nombres k et q , q étant le degré de $G(z)$. C'est le grand mérite de LAGUERRE d'avoir vu que les propriétés de $F(z)$ dépendent de son genre plus que de k ou de q séparément.

Les résultats de LAGUERRE ont été rendus plus précis par Borel au moyen de son introduction de « l'ordre » réel de $F(z)$. Il appelle ainsi le nombre ρ tel que, si l'on pose $r_n = |a_n|$, la série:

$$\sum_n \frac{1}{r_n^\alpha}$$

soit convergente pour $\alpha > \rho$ et divergente pour $\alpha < \rho$ (elle peut être convergente ou divergente pour $\alpha = \rho$). On voit qu'alors:

$$k \leq \rho \leq k+1.$$

Le renseignement donné par ρ étant plus précis que celui donné par k (qui pour ρ non entier n'en est que sa partie entière), on conçoit que la connaissance de ρ ait permis à Borel d'obtenir des propriétés plus précises que pour ses prédecesseurs.

C'est un nouvel exemple d'une notion introduite par Borel qui lui permet d'obtenir des résultats nouveaux et d'ouvrir une nouvelle voie à ses émules et à ses successeurs.

Ainsi H. POINCARÉ avait prouvé que si la fonction entière $F(z)$ est de genre p , on a

$$|F(z)| < e^{\alpha r^{p+1}}$$

où $r = |z|$, quel que soit le nombre positif α , pour r assez grand. Borel démontre que si $F(z)$ est d'ordre réel ρ , on a :

$$|F(z)| < e^{r^{\rho+\varepsilon}}$$

quel que soit $\varepsilon > 0$, pour $|z|$ assez grand.

La série $\Sigma \frac{1}{r_n^p}$ peut être convergente ou divergente ; quand elle est convergente, Borel montre qu'on a même

$$|F(z)| < e^{\alpha r^\rho}$$

quel que soit $\alpha > 0$, pour r assez grand.

H. POINCARÉ avait aussi limité supérieurement les modules des coefficients A_m de la même série de Taylor qui représente une fonction entière. Borel a exprimé ce résultat sous la forme suivante :

Si $F(z) = \Sigma A_q z^q$ est une fonction entière de genre p , $A_q (q !)^{\frac{1}{p+1}}$ tend vers zéro avec $\frac{1}{q}$.

Soient $M(r)$ le module maximum de $F(z)$ pour $|z| = r$ et $m(r)$ le module maximum des termes $A_q z^q$ de la série de Taylor de $F(z)$ pour $|z| = r$. Borel démontre que :

$$\frac{\log M(r)}{\log m(r)} \quad (1)$$

tend vers 1 lorsque r croît indéfiniment en restant en dehors d'une suite d'intervalles tels que la longueur totale de ceux qui sont compris entre R et kR soit infiniment petite par rapport à R . (Plus tard G. VALIRON a démontré que si $F(z)$ est d'ordre fini, le rapport (1) tend vers 1 quand $r \rightarrow \infty$ de façon quelconque).

M. HADAMARD avait prouvé les réciproques des deux résultats de H. Poincaré; Borel a ensuite précisé aussi ces réciproques au moyen de son introduction de l'ordre.

Emile PICARD avait démontré que si, pour une fonction entière $F(z)$, il existe deux valeurs exceptionnelles: $a \neq b$, qui ne sont jamais prises par $F(z)$, $F(z)$ est une constante. La démonstration faisait usage des « fonctions modulaires ». Pendant plus de quinze ans, les mathématiciens avaient cherché en vain à simplifier la démonstration de Picard. Borel a réussi à démontrer cette importante propriété sans faire usage de ces fonctions modulaires.

Emile PICARD avait même démontré un théorème plus général: s'il existe deux nombres distincts, a, b , tels que la fonction entière $F(z)$ ne soit égale à chacun d'eux que pour un nombre fini de valeurs distinctes de z , $F(z)$ est un polynôme. Borel a démontré un théorème un peu plus général encore: Soient $P(z)$ et $Q(z)$ deux polynômes différents. Si $F(z)$ est une fonction entière de genre fini et si les équations $F(z) = P(z)$, $F(z) = Q(z)$ n'ont chacune qu'un nombre limité de racines, $F(z)$ est un polynôme. Le même mode de démonstration lui permet de nombreuses généralisations. Par exemple, si $F(z)$, $G(z)$ sont des fonctions entières de genre fini, alors quels que soient les polynômes $P(z)$, $Q(z)$, $R(z)$, l'équation $P(z)F(z) + Q(z)G(z) = R(z)$ a nécessairement un nombre infini de racines, sauf le cas exceptionnel évident où $R(z)$ étant identiquement nul, $\frac{F(z)}{G(z)}$

serait une fraction rationnelle. D'après le second théorème de Picard cité ci-dessus, toute fonction entière, $F(z)$ non polynomiale, prend une infinité de fois n'importe quelle valeur, sauf, peut-

être, une valeur exceptionnelle. Soit $\varphi_b(r)$ le nombre des racines de l'équation

$$F(z) = b,$$

dont les modules sont inférieurs à r . D'après un théorème de Picard, $\varphi_b(r)$ tend vers l'infini avec r . Borel a aussi précisé ce résultat [175, pp. 95-104].

La méthode employée par Borel pour donner une démonstration élémentaire du premier des théorèmes de Picard cités ci-dessus a été utilisée par Borel et par de nombreux auteurs pour prolonger ces résultats dans des directions variées. C'est en utilisant la démonstration de Borel mais en y précisant les valeurs de certaines constantes que LANDAU a démontré un résultat important et inattendu. A savoir que la connaissance des deux premiers coefficients du développement en série de Taylor d'une fonction entière, suffit pour déterminer le rayon d'un cercle à l'intérieur duquel la fonction prend certainement les valeurs 0 et 1.

Borel attache beaucoup d'importance à ce qu'il appelle la croissance régulière.

Soit $F(z)$ une fonction entière d'ordre fini et différent de zéro et $M(r)$ le maximum de $|F(z)|$ pour $|z| = r$. Borel a d'abord démontré que le quotient:

$$\frac{\log \log M(r)}{\log r} \tag{2}$$

reste compris entre deux nombres fixes quand r varie. Borel dit alors que $M(r)$ et $F(z)$ sont à croissance régulière si ce quotient tend vers une limite quand $r \rightarrow \infty$.

Si a_1, a_2, \dots sont les zéros de $F(z)$, Borel dit que $r_n = |a_n|$ a un ordre d'infinitude déterminé, quand:

$$\frac{\log n}{\log r_n} \tag{3}$$

tend vers une limite déterminée.

En combinant un théorème de Poincaré et un théorème de M. Hadamard, Borel en déduit d'abord que si les deux quotients

(2) et (3) ont chacun une limite, ces deux limites sont égales. Il démontre ensuite que, si l'un de ces quotients a une limite, l'autre a aussi une limite (alors égale à la première limite). Il observe qu'ainsi, quand la fonction entière $F(z)$ est à croissance régulière, on peut obtenir l'expression asymptotique précise du module de ses zéros en fonction de n . Ce résultat est d'autant plus important que, d'après Borel, « toutes les fonctions entières rencontrées jusqu'ici en Analyse sont des fonctions à croissance régulière ». Cette affirmation s'est trouvée s'appliquer plus tard aux fonctions entières nouvelles découvertes par Painlevé.

Ceci n'a pas empêché Borel d'indiquer des procédés variés pour obtenir des fonctions entières à croissance irrégulière. Mais il fait observer que le caractère artificiel de ces procédés ne fait que confirmer l'assertion ci-dessus.

Fonctions monogènes

Nous arrivons maintenant à l'une des découvertes les plus sensationnelles de Borel. Sa définition des fonctions monogènes et les propriétés qu'elle entraîne conduisent à un élargissement considérable de la théorie des fonctions analytiques telle qu'elle existait avant Borel.

Il explique lui-même [146, p. 39] comment il a été conduit à cet élargissement.

Digression. — Et c'est là l'occasion, pour nous, de signaler un trait commun aux cheminements de pensée qui ont conduit Borel à des généralisations très importantes dans des domaines variés. C'est une façon de penser très différente de celles qui ont conduit d'autres auteurs à d'autres généralisations.

Ces auteurs sont frappés de voir que certaines théories développées dans des domaines différents, dans des langages différents, offrent cependant de grandes similitudes. Ils cherchent, et certains arrivent, à dépouiller ces théories semblables de ce qu'elles ont de distinct et à les faire apparaître comme des formes particulières d'une théorie générale. C'est ainsi, par exemple, qu'ont été créées l'Analyse vectorielle, la Théorie des ensembles, celle des éléments aléatoires abstraits, etc...

Borel, lui, ne s'intéressait pas particulièrement aux généralisations. Il semble même, parfois, qu'il s'en défiait. C'est l'étude

attentive de problèmes particuliers, où il rencontre des sortes de paradoxes, qui le constraint, pour ainsi dire, à modifier les définitions qui conduisent à ces paradoxes, afin d'éviter ces derniers. Et il découvre alors, presque malgré lui, que les définitions auxquelles il arrive ont une portée plus générale.

Par exemple, dans la théorie de la mesure, il constatait que l'ensemble des nombres entre 0 et 1, et celui des nombres rationnels compris entre 0 et 1, quoique ayant des puissances différentes, avaient même mesure (même « étendue ») au sens de Jordan. Ce résultat, qui lui paraissait paradoxal, le conduisait à considérer ce second ensemble comme étant de mesure nulle. Et, ce premier pas franchi, il arrivait à sa notion générale de mesure.

Il trouvait le même genre de paradoxe, en constatant que dans l'égalité

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + \dots + z^n + \dots$$

le premier membre gardait un sens quand $z \neq 1$, tandis que le second n'en avait que pour $|z| < 1$. Il cherchait à éviter ce paradoxe en attribuant une convergence généralisée et une somme généralisée au second membre, pour $z \neq 1$. Et il arrivait ainsi à sa sommation exponentielle des séries divergentes, création d'une portée s'étendant infiniment au-delà de ce cas particulier.

On pourrait citer d'autres exemples. Signalons au moins celui de la théorie des fonctions monogènes.

Retour aux fonctions monogènes. — Borel dit lui-même: « Mes recherches sur les fonctions monogènes ont eu pour origine l'étude approfondie d'une série signalée dans un mémoire... » de Poincaré:

$$F(z) = \sum_p \sum_q \sum_r \frac{\alpha^p \beta^q \gamma^r}{z - \frac{pa + qb + rc}{p + q + r}} \quad (4)$$

les entiers p, q, r prenant toutes les valeurs positives. Cette série converge évidemment en dehors du triangle ABC dont les sommets ont pour affixes a, b, c , et la somme y représente une fonction analytique uniforme. GOURSAT et POINCARÉ avaient

montré que $F(z)$ ne pouvait être prolongée, au sens de WEIERSTRASS, à l'intérieur du triangle quand p, q, r peuvent aussi avoir des valeurs nulles (avec $p+q+r \neq 0$).

Selon Borel, on n'aperçoit d'abord aucune raison pour que, si l'on exclut les valeurs nulles de p, q et r et si la fonction $F(z)$ peut être prolongée à l'intérieur du triangle¹⁾, ses valeurs y aient un rapport quelconque avec la série qui définit $F(z)$ hors du triangle.

Il y avait évidemment une infinité de pôles de $F(z)$ aussi voisins que l'on veut de tout point à l'intérieur du triangle. On en avait conclu, un peu hâtivement, à la divergence de la série en tout point intérieur au triangle.

Borel montre, au contraire, que $F(z)$ non seulement converge en certains points du triangle ABC , mais même qu'il y a une infinité de courbes traversant ABC sur lesquelles la série $F(z)$ converge uniformément ainsi que toutes les séries dérivées de la série $F(z)$. Ainsi la somme de la série $F(z)$ représente sur ces courbes une fonction continue admettant des dérivées continues de tous les ordres. De plus, soit γ un petit cercle intérieur à ABC , Borel montre qu'il existe au moins un point M intérieur à γ tel qu'il existe au moins une droite de convergence de la série $F(z)$ dans tout angle de sommet M . Puisque la dérivée de $F(z)$ sur chacune de ces droites est égale à la somme de la série dérivée de $F(z)$, cette dérivée de la fonction $F(z)$ est indépendante de la droite de convergence considérée. La fonction sera donc dite monogène au sens de Cauchy. L'intégrale de cette fonction sur un contour intérieur à ABC , sur lequel la série $F(z)$ converge uniformément, sera égale, selon Borel, au produit par $2\pi i$ de la somme des résidus des pôles intérieurs à ce contour. On obtient ainsi une généralisation d'un des théorèmes les plus importants de Cauchy, pour cette fonction $F(z)$.

Ayant obtenu ces résultats sur la fonction de Poincaré (4), Borel retient des définitions qui leur ont donné naissance, tout ce qui peut s'exprimer pour une fonction $f(z)$, qu'elle soit représentable ou non sous la forme particulière (4). Il arrive ainsi à sa conception générale de fonction monogène.

¹⁾ C'est-à-dire si la série n'a aucun pôle formel sur les côtés du triangle ABC.

Il considère certaines suites d'ensembles parfaits C_1, C_2, \dots , chacun intérieur au suivant et leur réunion C . Il considère une certaine classe (C) de tels ensembles C (ainsi nommés en l'honneur de Cauchy). Une fonction $f(z)$ sera dite monogène sur C si:

1. Elle est continue (et donc uniformément continue) sur chacun des ensembles parfaits C_p ;

2. Elle admet en tout point z_0 de C une dérivée unique *au sens suivant*. z_0 appartient à une infinité des C_p ; soit z' un point de l'un de ces C_p . On suppose que $\frac{f(z') - f(z_0)}{z' - z_0}$ a une limite quand z'

tend vers z sur un de ces C_p . Si cette limite existe pour tous les C_p auxquels appartient z_0 , elle sera indépendante de p puisque C_p appartient à C_{p+q} . C'est cette limite qu'on appellera la dérivée de $f(z)$ sur C .

La nouveauté apportée par Borel, c'est que la famille de ses ensembles C est plus vaste que la famille des ensembles W sur chacun desquels on peut prolonger une fonction analytique et elle contient la famille des W . Ceci étant, toute fonction analytique au sens de WEIERSTRASS est aussi une fonction monogène sur le même ensemble, mais l'inverse n'a pas lieu.

(Pour arriver plus vite aux conséquences, nous reporterons plus loin la définition des ensembles C et C_p qui est assez compliquée.)

Borel montre qu'en généralisant la notion de fonction analytique, les fonctions monogènes conservent d'importantes propriétés des fonctions analytiques, soit littéralement, soit sous une forme un peu plus compliquée.

Par exemple, l'existence de la dérivée première (définie comme plus haut) entraîne, pour une fonction monogène, l'existence des dérivées de tous les ordres; par exemple, encore: deux fonctions monogènes qui sont égales sur un arc de courbe appartenant à leur domaine commun d'existence, soit Δ , sont égales sur tout Δ [S., p. 42]. Il en est de même si, en un point de C , les deux fonctions et toutes leurs dérivées sont respectivement égales, c'est-à-dire correspondent à la même série de Taylor.

Revenons, pour mieux les caractériser, aux ensembles C . Les ensembles W , sur lesquels WEIERSTRASS définissait une

fonction analytique, étaient des domaines ouverts (c'est-à-dire des ensembles d'un seul tenant et formés de points tous intérieurs à l'ensemble W considéré). Nous avons déjà dit que Borel définit ses fonctions monogènes sur certains ensembles C plus généraux que les W . Précisons que les C_p (dont la réunion constitue C) peuvent être non denses quel que soit p et que l'ensemble complémentaire de C_p est formé de régions disjointes, en nombre fini ou non, mais dont les frontières, γ_p , ont une longueur totale finie L_p .

Soit Γ_p l'ensemble des points x de C où l'intégrale:

$$\int_{\gamma_p} \frac{|dz|}{|z-x|^{\alpha+1}}$$

est finie pour tout $\alpha > 0$. Soit $f(z)$, une fonction bornée sur chaque C_p et qui possède une dérivée finie et continue relativement à Γ_p .

Borel montre que $f(x)$ sera donnée dans Γ_p , par

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_p} \frac{f(z) dz}{z-x}$$

et obtient ainsi une généralisation de la formule célèbre de Cauchy.

Après que Borel eut créé et étudié la théorie des fonctions monogènes, d'éminents mathématiciens comme CARLEMAN, DENJOY, MANDELBROJT, ..., ont approfondi et prolongé sa théorie.

Prolongements. — Borel avait démontré [57] qu'on peut développer $\frac{1}{1-z}$ en série de polynômes:

$$\frac{1}{1-z} = \sum \sigma_n(z)$$

convergeant absolument en dehors de la demi-droite où z est réel et > 1 . C'était un premier exemple de série de polynômes permettant de sortir du cercle de convergence d'une série de Taylor (ici Σz^n).

Borel généralise le résultat précédent. Il montre qu'il est possible de substituer à une série de Taylor ayant un rayon de convergence fini, une série de polynômes ayant pour coefficients

des combinaisons linéaires des coefficients de la série de Taylor et qui peut converger non seulement à l'intérieur du cercle de convergence de la série de Taylor mais même au-delà.

Borel a aussi découvert un autre moyen de sortir du cercle de convergence d'une série de Taylor. C'est en vue de ce moyen, qu'il avait créé la « sommation exponentielle absolue », définie plus haut (p. 51). Celle-ci lui permet d'assigner une somme généralisée à la série de Taylor, qui coïncide avec la somme ordinaire à l'intérieur du cercle de convergence mais qui existe encore jusqu'à une certaine distance de ce cercle sur tout rayon prolongée au-delà d'un point non singulier sur la circonférence du cercle. Plus précisément, la somme généralisée existe à l'intérieur du « polygone de sommabilité » de la série. Ce polygone s'obtient en menant une tangente au cercle en tout point singulier. (Ce polygone peut s'étendre dans certaines directions jusqu'à l'infini. Par exemple, pour la série Σz^n , le polygone de sommabilité sera évidemment le demi-plan contenant le cercle $|z| < 1$ et limité par la tangente au cercle au point $z = 1$).

Ce résultat important dépasse ceux de WEIERSTRASS. Car Borel a formé des fonctions pour lesquelles il existe des régions où le prolongement a son sens, de la série de Taylor correspondante, est possible alors qu'il ne l'est pas par la méthode de Weierstrass du prolongement analytique.

EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Borel a étudié les relations entre une équation différentielle linéaire :

$$\mathcal{L}[y] \equiv L(x)y^{(n)} + P(x)y^{(n-1)} + \dots + T(x)y' + U(x)y = 0$$

et son équation adjointe :

$$\mathcal{M}[y] \equiv (Lz)^{(n)} - (Pz)^{(n-1)} + \dots + (-1)^n Uz = 0.$$

On savait déjà, depuis LAGRANGE, que, par une suite d'intégration par parties, on arrive à la relation :

$$\int z \mathcal{L}[y] dx - \int y \mathcal{M}[z] dx = A(x, y, y', \dots y^{n-1}, z, z', \dots z^{(n-1)})$$

où A dépend linéairement de $y, y', \dots y^{(n-1)}$ et de $z, z', \dots z^{(n-1)}$.

D'où il résultait que, si l'on connaît une solution z de l'équation adjointe, l'intégration de l'équation donnée est ramenée à celle d'une équation différentielle linéaire en y d'ordre $n-1$. Borel exprime géométriquement [S., p. 213] les relations entre une équation et son adjointe. On peut faire correspondre à $\mathcal{L}[y] = 0$ une courbe de l'espace à $n-1$ dimensions en regardant n intégrales distinctes de l'équation comme les coordonnées homogènes d'un point de la courbe dépendant du paramètre x . On pourra, de même, faire correspondre à l'équation adjointe, une autre courbe. Il résulte des relations établies par DARBOUX entre les solutions d'une équation et de son adjointe que les courbes qui leur sont attachées se correspondent dualistiquement. Borel observe qu'on pourrait prendre cette propriété géométrique comme définition de l'équation adjointe et que cette définition mettrait en évidence le fait que la relation entre les deux équations est réciproque. Mais il ajoute qu'il serait nécessaire de préciser un peu cette définition; d'abord les points correspondants des deux courbes devraient correspondre à la même valeur de x . Il faudrait ensuite multiplier les premiers membres des équations qui correspondent aux courbes pour que ces équations deviennent adjointes l'une de l'autre.

Borel cherche ensuite à quelle condition une équation est équivalente à son adjointe (cas où le recours aux solutions de l'adjointe pour intégrer l'équation donnée devient inopérant). Cette question a été d'abord étudiée par DARBOUX, qui a montré qu'entre n intégrales distinctes $y_1(x), \dots, y_n(x)$, il doit exister, alors, une relation quadratique:

$$\mathcal{C}[y] \equiv \sum_{i,k} a_{ik} y_i(x) y_k(x) = 0$$

DARBOUX avait montré que cette relation subsiste quand on y remplace les $y_i(x)$ par leurs dérivées jusqu'à un certain ordre:

$$\mathcal{C}[y] = 0, \quad \mathcal{C}[y'] = 0, \dots$$

Les considérations géométriques par lesquelles Borel retrouve ce résultat, lui permettent, en outre, d'en démontrer la réciproque et surtout de la généraliser. Il observe d'abord que si $2x+3$ fonctions et leurs dérivées jusqu'à l'ordre n inclusivement, vérifient une même relation quadratique homogène à coefficients cons-

tants, ce sont les solutions d'une équation d'ordre $2n+3$ équivalente à son adjointe. Puis il généralise ce résultat, toujours par ses méthodes géométriques.

Revenant ensuite au problème posé, Borel montre que, dans le cas où \mathcal{C} n'est pas identiquement nulle (et où par suite les équations cherchées doivent être d'ordre impair), la recherche des équations identiques à leur adjointe se ramène à celle des lignes asymptotiques de la surface du second degré:

$$\sum_{ik} a_{ik} x_i x_k = 0.$$

Il montre alors géométriquement comment les solutions de l'équation $\mathcal{L}[y] = 0$ s'expriment complètement sans signe de quadrature. Il passe alors au cas des équations $\mathcal{L}[y] = 0$ d'ordre pair et montre qu'on peut suivre une méthode géométrique analogue à celle suivie pour le cas de l'ordre impair en faisant jouer à un complexe «linéaire» le rôle que jouait la quadrique $\mathcal{C}(y) = 0$. Cependant on n'arrive pas à la détermination sans intégration des courbes cherchées. La méthode permet cependant d'obtenir tout au moins pour le sixième ordre, des expressions renfermant un seul signe de quadrature et relativement assez simples.

Borel a porté aussi son attention sur le mode de croissance des solutions des équations différentielles. Il a obtenu, par exemple, ce résultat d'une précision inattendue dans des circonstances si générales: Soit une équation différentielle dont on suppose seulement qu'elle est du premier ordre, qu'elle est algébrique en x, y, y' et que l'intégrale considérée, y , ne devient infinie pour aucune valeur finie de x : on peut dès lors affirmer que y croît moins vite que e^{ex} .

L'invention de la sommabilité a permis à Borel d'obtenir un théorème remarquable qui a été depuis souvent utilisé par divers auteurs pour déterminer exactement certaines solutions irrégulières de certaines équations différentielles. C'est le théorème suivant: si une série absolument sommable vérifie formellement une équation différentielle, la somme généralisée de la série est une intégrale de l'équation.

CAUCHY a montré que l'intégrale générale d'un système d'équations aux dérivées partielles dépend de certaines fonc-

tions arbitraires dépendant de certaines variables. Borel a précisément énormément ce résultat, dans le cas d'une seule équation, en montrant que l'intégrale générale peut s'exprimer comme une fonction déterminée d'une seule fonction arbitraire dépendant d'une seule variable.

On savait depuis longtemps que la nature analytique d'une fonction dépendant d'un paramètre peut dépendre considérablement de la nature arithmétique de ce paramètre. Tel est le cas de la fonction de z , z^a , dont la nature change selon que le paramètre, a , est entier, fractionnaire ou irrationnel. Mais la fonction z^a reste analytique.

Borel a étendu considérablement la portée de cette observation. Il a donné un exemple d'une équation aux dérivées partielles très simples :

$$\frac{\partial^2 \mathcal{C}}{\partial x^2} - \alpha^4 \frac{\partial^2 \mathcal{C}}{\partial y^2} = \psi(x, y)$$

où une intégrale périodique, généralement analytique, cesse de l'être pour certaines valeurs du paramètre α . On a ainsi un exemple d'une fonction continue de deux variables réelles dont toutes les dérivées sont continues, mais qui n'est analytique en aucun point (x, y) . Cet exemple est d'autant plus frappant qu'il ne s'agit pas ici d'un cas pathologique mais d'un problème fort simple où toutes les données sont supposées analytiques.

GÉOMÉTRIE

Rappelons d'abord que la définition et l'étude des propriétés de la mesure et de la raréfaction par Borel, si elles sont d'une importance extrême en analyse, relèvent cependant de la géométrie.

De même, Borel a étudié l'équation adjointe dont il a été question plus haut (p. 75) par des méthodes géométriques. Il y a en particulier obtenu d'importantes propositions concernant les « plans génératrices » des quadriques dans les espaces à n dimensions (qui jouent le même rôle que les génératrices des quadriques classiques).

Mais le travail le plus important réalisé par Borel en géométrie est celui qui a fait l'objet d'une question mise au concours par l'Académie des Sciences et dont Borel a obtenu le prix correspondant.

Il s'agit de l'étude des déplacements à trajectoires sphériques. Avant Borel, des solutions particulières avaient été données. Sans avoir obtenu la solution la plus générale, Borel a pu établir une classification qui lui a permis, non seulement de retrouver les solutions connues, mais d'obtenir de nombreuses solutions nouvelles et de préparer des recherches complémentaires. Pour arriver à cette classification, Borel observe que la condition imposée aux déplacements envisagés se traduit par une équation de la forme:

$$\sum_{i=1}^{17} E_i T_i = 0$$

où chacun des 17 termes E_i est une « fonction de l'espace » et chacun des 17 termes T_i est une fonction du temps. Pour en obtenir la solution, on est ramené à un problème d'algèbre classique, qu'on résout en établissant k relations linéaires entre les E_i , d'où résultent $17 - k$ relations linéaires entre les T_i . La discussion montre qu'on arrive à une classification où les solutions correspondent aux différents modes d'intersection d'un certain nombre de quadriques.

Parmi les conséquences les plus frappantes, citons ces deux-ci:

I. Il existe un mouvement où tous les points d'une cubique plane rigide décrivent des courbes sphériques, huit points situés hors du plan de la cubique décrivant aussi des courbes sphériques.

II. Etant donnés deux triangles rigides non semblables situés dans deux plans parallèles, on peut relier leurs sommets par des barres rigides et déplacer l'un des triangles de sorte que son plan reste parallèle au plan de l'autre triangle. Dans ce mouvement un quatrième point fixe dans le premier plan, reste à une distance invariable d'un quatrième point fixe dans l'autre plan.

LES TRAVAUX DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Nous avons expliqué plus haut, p. 17, que, si c'est après la première guerre mondiale que Borel s'est particulièrement occupé des mathématiques appliquées, il s'y était intéressé déjà auparavant en raison de leur connexion avec certains de ses travaux de mathématiques pures.

Parmi les mathématiques appliquées, Borel a consacré surtout son attention et ses recherches au calcul des probabilités et à la physique mathématique.

I. Calcul des probabilités

Là encore, Borel a été un initiateur en introduisant implicitement la conception de convergence presque certaine, liée à une généralisation remarquable du théorème de Bernoulli et en créant la théorie des jeux psychologiques.

Remarques. — L'idée a été émise que les idées les plus originales de Borel ont été publiées avant la première guerre et concernent toutes l'Analyse. Nous croyons que les deux sujets que nous venons de mentionner sont d'une originalité aussi grande et ont chacun donné lieu aussi à d'innombrables publications postérieures, par ses contemporains et successeurs.

En sortant du calcul des probabilités, les quatre définitions (non équivalentes) mentionnées plus haut, p. 58, de la raréfaction d'un ensemble de mesure nulle, étaient tout à fait inattendues et n'ont pourtant été développées par Borel qu'après la seconde guerre mondiale.

Probabilités dénombrables.

I. Avant Borel, on avait étudié, comme lui, le cas d'une infinité dénombrable d'épreuves. Mais on s'était limité aux propriétés asymptotiques d'une probabilité dépendant d'un nombre fini croissant d'épreuves. Avec Borel s'ouvre un domaine tout nouveau dans le calcul des probabilités: celui des probabilités « dénombrables ». Et Borel réussit à trouver les valeurs exactes

des probabilités d'événements dont la réalisation dépend d'une infinité d'épreuves.

Il commence par démontrer un théorème fondamental et assez inattendu [S., p. 163].

Soient $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ une suite d'événements indépendants et $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ leurs probabilités respectives. La probabilité pour qu'une infinité de ces événements se réalisent est égale à 0 si la série Σp_n est convergente et 1 si elle est divergente.

En appelant A_k la probabilité pour que k des événements E_i se produisent, Borel a complété son théorème en montrant que si Σp_k est convergente, les A_k ne sont pas nulles (au contraire de A_∞); si Σp_k est divergente, les A_k sont nulles (alors que $A_\infty = 1$).

Enfin, dans un mémoire ultérieur, [S. p. 302], Borel a étendu son théorème au cas où les E_i ne sont pas indépendants, moyennant certaines restrictions sur le sens à attribuer aux cas de convergence et de divergence.

Dans le même mémoire, Borel réalise un progrès encore plus grand. Mais, suivant une caractéristique de son esprit que nous avons signalée plus haut, ce progrès est réalisé dans des cas particuliers et il laisse au lecteur ou à ses successeurs le soin d'en comprendre et d'en formuler la portée générale. Il s'agit, d'une part, d'un théorème apportant une précision nouvelle et très importante au théorème de Bernoulli et, d'autre part, de la conception d'une nouvelle sorte de convergence: la convergence presque certaine (dite aussi presque sûre).

Borel ne considère explicitement que le cas où l'on étudie la fréquence φ_n ¹⁾ d'un chiffre déterminé dans les n premiers chiffres d'un nombre N pris au hasard (en supposant que la probabilité de l'apparition d'un chiffre déterminé est indépendante de ce chiffre et par suite, égale à $\frac{1}{10}$). Quand n croît, la convergence de

φ_n vers $\frac{1}{10}$ est un événement fortuit, Borel démontre que la probabilité de cet événement est égale à l'unité. Mais le raisonne-

1) La fréquence d'un événement dans n épreuves est le rapport $\frac{r_n}{n}$ où r_n est le nombre de répétitions de l'événement dans les n épreuves.

ment de Borel est général et permet d'énoncer explicitement le résultat suivant:

Soient f_n la fréquence de n épreuves indépendantes d'un événement E de probabilité constante p . Alors la probabilité que f_n tende vers p est égale à l'unité.

On voit immédiatement qu'on a là un énoncé à la fois plus frappant et plus précis que celui du théorème de Bernoulli. D'après ce dernier, il est très probable que $|f_n - p|$ soit petit quand n est grand, mais il n'en résulte pas que f_n tende vers p . Au contraire, si l'on admet le théorème de Borel, le théorème de Bernoulli en résulte, c'est-à-dire que si ε est un nombre positif arbitraire, la probabilité pour que $|f_n - p| < \varepsilon$ tend vers l'unité quand $n \rightarrow \infty$. Le théorème de Bernoulli est donc une simple conséquence d'un théorème plus général, celui de Borel et une conséquence moins simple à saisir — et pour cette raison, souvent mal interprétée — du théorème de Borel.

On n'a malheureusement pas encore pris l'habitude de considérer le théorème de Borel sous cet aspect. Avant Borel, le théorème de Bernoulli était un théorème fondamental. Après Borel, c'est le théorème de Borel qui doit lui être substitué.

La démonstration de Borel est analytique, mais il avait indiqué qu'on pourrait donner aussi une démonstration géométrique de son théorème. Cette démonstration géométrique a été explicitement obtenue, plus tard, par F. Hausdorff.

La démonstration analytique de Borel est assez compliquée. Une démonstration à la fois plus simple et d'une portée plus générale a été donnée plus tard par Cantelli. Mais on doit noter que la démonstration de Borel a l'avantage de se prêter mieux à une étude plus précise du comportement de la fréquence.

Nous avons aussi signalé plus haut une autre caractéristique du théorème de Borel: c'est qu'il introduit (encore une fois implicitement) une espèce nouvelle de convergence: « la convergence presque certaine ».

Généralisant la circonstance qui se présente dans le théorème de Borel, on est partout convenu maintenant de dire qu'un nombre aléatoire X_n converge presque certainement vers un nombre aléatoire X quand la convergence de $X_1, X_2, \dots, X_n \dots$

vers X est un événement presque certain, c'est-à-dire dont la probabilité est égale à l'unité.

On peut dire que par la précision donnée au théorème de Bernoulli et par l'introduction de la convergence presque certaine, Borel s'est placé au premier rang des successeurs de Laplace et de Poincaré.

II. Poursuivant son étude des « probabilités dénombrables », Borel considère [S., p. 131] les lois de probabilité des quotients incomplets, A_n , de la fraction continue

$$X = \frac{1}{A_1 + \frac{1}{A_2 + \dots}}$$

représentant un nombre incommensurable X compris entre 0 et 1 et dont la loi de probabilité est uniforme.

En appelant $\varphi(n)$ une fonction positive croissante de n , Borel trouve que:

I si la série $\sum \frac{1}{\varphi(n)}$ est convergente, la probabilité pour que l'on ait

$$A_n < \varphi(n)$$

à partir d'un certain rang est égale à un;

II si cette série est divergente, il y a une probabilité égale à un pour que l'on ait

$$A_n > \varphi(n)$$

à partir d'un certain rang.

En d'autres termes, il est infiniment probable que la croissance asymptotique de A_n est comprise entre celle de toute fonction

$\varphi(n)$ telle que la série $\sum \frac{1}{\varphi(n)}$ soit convergente et celle de toute

fonction $\varphi(n)$ telle que cette série soit divergente.

Dans le même mémoire, Borel exprime une opinion qu'il a souvent répétée, à savoir qu'une « probabilité nulle ou extrêmement petite doit être considérée comme équivalente à l'impossibilité ». C'est une opinion qui avait déjà été formulée, longtemps auparavant, par Buffon, puis par Cournot. Buffon et Borel ont

même chiffré, chacun de leur côté, ce qu'ils appellent « extrêmement petite ». Borel en a donné une image concrète très frappante, le « miracle des singes dactylographes ». Peut-on concevoir que si un million de singes travaillaient dix heures par jour sur un million de machines à écrire et si leur production était successivement reliée en volumes, l'ensemble des volumes obtenus au bout d'un an se trouverait renfermer la copie exacte des livres de toute nature et de toutes les langues conservés dans les plus riches bibliothèques du monde ? Il n'est douteux pour personne qu'un tel événement doit être considéré comme impossible, bien que sa probabilité si elle est extraordinairement petite, ne soit pas rigoureusement nulle.

Théorie des jeux stratégiques.

Sortant de la théorie pure pour aller vers les applications (du calcul des probabilités), Borel s'est encore ici montré un novateur dont les idées et les résultats ont donné lieu à un nombre énorme de travaux.

Jusqu'à lui — sauf dans des problèmes très particuliers dont aucune généralisation n'était entreprise — l'étude des jeux de hasard en calcul des probabilités s'était bornée aux cas où chacun des événements considérés avait une probabilité déterminée : jeu de pile ou face, jeu de dés, etc. L'intelligence, le caractère des joueurs n'y avaient aucune part. Il n'en est pourtant rien dans la plupart des jeux en usage : jeu de dames, jeu d'échecs, jeu de bridge, etc. ... On doit alors admirer avant tout que Borel ait eu l'audace de vouloir établir une théorie générale des jeux psychologiques et de concevoir la possibilité d'y parvenir en appliquant le calcul des probabilités à des hypothèses convenablement choisies. Il a choisi, à cet effet, des hypothèses plausibles, et a pu déterminer dans des cas particuliers les conséquences de ces hypothèses. Ce n'est pas tout ; il a aperçu, dès sa première publication sur ce sujet, que le problème posé par lui avait des applications dans des domaines variés : économie politique, stratégie, psychologie, etc. ...

Pour éclairer ce qui précède, il nous faut, maintenant, préciser les hypothèses de Borel. Contrairement à certains esprits, nous ne pensons pas que ces hypothèses soient inéluctables et

d'ailleurs elles ont été discutées. Mais ce sont des hypothèses qui, d'une part, sont plausibles et qui, d'autre part, se prêtent à un traitement mathématique du problème, deux qualités qui sont très loin d'être toujours conciliaires. L'un des principaux mérites de Borel est d'avoir montré qu'un tel choix d'hypothèses est possible, même si l'on n'admet pas qu'il soit nécessairement le seul ni le meilleur possible.

Les hypothèses de Borel.

A chaque coup à jouer, un joueur se trouve dans une circonsistance déterminée dont certains éléments lui sont connus; par exemple, au jeu de cartes, l'ensemble des cartes qu'il a dans la main et la suite des coups précédents. Sur la base de ces données et sur l'hypothèse qu'il fait sur la psychologie des autres joueurs, il décide son coup. Borel élimine cette hypothèse¹ et considère l'ensemble des données et du choix du joueur. Il y a, dans la plupart des jeux, un nombre fini, quoique très grand, de tels ensembles. Au cours d'un jeu, un joueur adopte successivement un nombre fini de tels ensembles et caractérise ainsi sa « méthode de jeu ». Il y a un nombre fini de méthodes de jeu possibles: C_1, C_2, \dots, C_n et chaque joueur adopte nécessairement l'une d'elles à chaque coup. Mais il y a au début du jeu (par exemple, quand on distribue les cartes) ou au cours du jeu, une intervention du hasard. Si donc, en considérant le cas de deux joueurs, A et B , le joueur A adopte la méthode de jeu C_i et le joueur B la méthode C_k , c'est le calcul des probabilités qui permettra de calculer la probabilité π_{ik} pour que A gagne finalement. On a alors à chercher d'abord s'il existe une méthode de jeu C_i pour A , telle que π_{ik} soit positif quel que soit k (c'est-à-dire quelle que soit la méthode C_k adoptée par B). Alors A aurait intérêt à adopter la méthode C_i (ou l'une des méthodes C_i pour lesquelles π_{ik} est positif quel que soit k).

Borel se place dans le cas où une telle méthode de jeu n'existe pas et il se demande s'il n'est pas possible de jouer d'une manière avantageuse en variant son jeu. « Si l'on veut formuler une règle précise pour varier le jeu, cette règle ne faisant intervenir que

¹⁾ Voir page suivante, la citation où Borel énonce cette élimination, qui évidemment, éloigne un peu la théorie de la réalité.

les faits observés et non pas des remarques psychologiques sur le joueur auquel on est opposé, cette règle équivaut forcément à un énoncé tel que le suivant: la probabilité pour que, en un moment donné du jeu, A adopte, pour fixer sa conduite à ce moment, le code C_i est p_i ; la probabilité analogue pour B pourra être désignée par q_k et, en désignant par n le nombre de codes qui subsistent, on a

$$\sum_{i=l}^n p_i = 1, \quad \sum_{k=l}^n q_k = 1'' \quad (1)$$

La probabilité de gain de A est donc

$$P = \sum_{i=l}^n \sum_{k=l}^n \pi_{ik} p_i q_k .$$

Borel se place alors, pour simplifier, dans ce qu'il appelle le cas symétrique, caractérisé par l'égalité $\pi_{ii} = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire que si les deux joueurs adoptent la même méthode de jeu, leurs chances de gagner sont égales. Il observe que dans la plupart des jeux de cartes où l'un des joueurs joue le premier, ces deux chances ne sont pas égales, mais qu'elles le deviennent si le jeu consiste en deux parties où l'un des joueurs commencera le jeu dans la première et l'autre dans la seconde. Comme on a évidemment

$$\pi_{ik} + \pi_{ki} = 1$$

ou

$$\pi_{ik} = \frac{1}{2} + \alpha_{ik}, \quad \pi_{ki} = \frac{1}{2} + \alpha_{ki}$$

avec $\alpha_{ik} + \alpha_{ki} = 0$, on aura

$$P = \frac{1}{2} + \alpha,$$

$$\text{avec } \alpha = \sum_{i=l}^n \sum_{k=l}^{i-1} \alpha_{jk} (p_i q_k - p_k q_i) .$$

Tout ce qui précède figure dans la première Note de Borel.

Dans cette même Note, Borel prouve que, dans le cas où $n = 3$, « il est facile de trouver des nombres positifs p_1, p_2, p_3 vérifiant (1) et tels que α soit nul et donc $P = \frac{1}{2}$ quels que soient les nombres q_1, q_2, q_3 . Il est donc possible d'adopter une manière de jouer permettant de lutter avec des chances égales contre tout joueur ».

Dans sa dernière Note sur les jeux, Borel procède autrement mais ramène au même problème mathématique. Au lieu de partir de la probabilité pour le joueur A de gagner, il part du gain moyen de A , soit g_{ik} quand A adopte le code C_i et B le code C_k . La symétrie du jeu entraîne

$$g_{ik} + g_{ki} = 0.$$

Quand les codes C_i et C_k ne sont adoptés par A et B qu'avec les probabilités p_i et q_k , le gain moyen de A sera

$$G = \sum g_{ik} p_i q_k.$$

Par une méthode différente de la précédente, Borel montre alors que, pour $n = 3$ et $n = 5$, on peut trouver des probabilités q_k telles que G soit nul quels que soient les p_i .

Le problème de démontrer qu'il n'en est pas ainsi avait été d'abord prouvé insoluble pour $n = 3$ par Borel. Dans ses Notes successives, il lui avait paru d'abord soluble pour $n = 5$; puis ayant pu prouver qu'il était insoluble pour $n = 5$, il avait à ce moment pensé qu'il était soluble pour $n = 7$. Enfin, il termine sa dernière Note en écrivant que ce même problème « insoluble pour $n = 3$ et $n = 5$ me paraît également insoluble pour $n = 7$. Il serait intéressant, soit de démontrer qu'il est insoluble en général, soit d'en donner une solution particulière ».

Il est clair que l'évolution de sa pensée le conduit à croire que, quel que soit le nombre n des manières de jouer, on peut choisir les probabilités q_k pour B de choisir les codes C_k de sorte que, quelles que soient les probabilités p_i pour A de choisir les codes C_i , la moyenne du gain total de A et celle du gain total de B soient toutes deux nulles.

Toutefois, on doit constater que Borel n'a pas démontré qu'il en était ainsi quel que soit n et qu'il n'a même pas,

contrairement à son habitude, exposé en détail dans un mémoire, les Notes qui résumaient ses résultats dans les C.R.

On peut trouver l'explication de ces faits dans l'évolution de ses activités. Borel, pendant une certaine période, a, en effet, été pris de plus en plus par son activité politique (voir p. 12). D'abord maire de sa ville natale, puis conseiller général de son département, il a été élu député en 1924 et l'est resté jusqu'en 1936. Dans l'intervalle, il a même été quelques mois, ministre de la Marine et nous avons même eu l'honneur de le remplacer comme professeur et de le dispenser ainsi de faire ses cours à la Faculté des Sciences. De sorte qu'après avoir posé le problème et l'avoir résolu dans les cas les plus simples, Borel n'a plus eu le temps d'étudier en détail le problème mathématique qui restait à résoudre.

C'est après la dernière Note (de 1927) de Borel que von Neumann en 1928, adoptant exactement les mêmes hypothèses, a réussi à démontrer un théorème (dit du minimum — maximorum) équivalent au théorème de Borel, dans le cas général de n quelconque. Puis, associé avec l'économiste Morgenstern, il en a tiré une théorie économique générale.

La théorie de von Neumann-Morgenstern a eu un retentissement considérable, tandis que les Notes de Borel restaient ignorées. C'est pourquoi nous avons décidé de rappeler l'antériorité de Borel et nous avons publié dans « *Econometrica* » en 1953, une excellente traduction en anglais, réalisée par M. Savage des trois Notes les plus importantes de Borel, avec un commentaire. Nous avions auparavant communiqué ce commentaire à von Neumann dont la réponse a été publiée dans le même numéro d'*Econometrica*. Tout naturellement von Neumann a réagi vigoureusement, alléguant que rien ne pouvait être retenu de la théorie de Borel, avant sa propre démonstration du théorème général. D'après lui « en 1921 et ultérieurement Borel suppose que le théorème est ou risque d'être faux ». Mais si cette assertion est rigoureusement exacte, elle doit être complétée par la citation de Borel faite plus haut, montrant que Borel a fini par pencher vers l'exactitude générale du théorème.

Von Neumann ajoutait « j'avais moi-même élaboré mes idées sur le sujet avant d'avoir lu ses Notes (les Notes de Borel) ».

Mais en tout cas, il en avait lu une avant de publier son premier Mémoire (de 1928) où il cite lui-même cette Note de Borel.

Si notre publication dans *Econometrica* avait révélé à beaucoup l'antériorité de Borel, elle n'avait pas atteint tous les intéressés. C'est pourquoi, d'accord avec M. Guitton, rédacteur de la Revue d'Economie politique, nous avons publié, dans cette revue en 1959, à nouveau, mais cette fois en français, dans le texte original, les trois Notes de Borel et notre commentaire ainsi que la traduction du commentaire en anglais de von Neumann.

Dans les innombrables publications sur les jeux psychologiques et sur leurs applications à l'Econométrie, il ne sera plus admissible d'ignorer l'antériorité de Borel.

Malheureusement, tel n'est pas encore le cas. En 1959, dans une Notice, d'ailleurs très intéressante sur le grand mathématicien que fut von Neumann, l'auteur commence ainsi:

« Theory of games.

The essential ingredients of von Neumann's theory of games are already to be found in his 1928 paper . . .

The first application of game theory to an economic problem was given in a 1937 paper ».

Et sur ces deux sujets, le nom de Borel n'est même pas mentionné. Or:

1^o le premier mémoire de von Neumann sur la théorie des jeux a été publié après la dernière Note de Borel sur le même sujet, et en connaissance de la théorie de Borel, qu'il cite. Les hypothèses à la base de la théorie de von Neumann sont en outre identiques à celles de Borel.

2^o Borel, et non von Neumann, a été le premier à signaler que la théorie des jeux est applicable, non seulement à l'Economie politique, mais aussi à l'art militaire, à la psychologie, etc.

Ceci dit, il faut reconnaître que von Neumann et Morgenstern ont très bien développé l'application de la théorie des jeux à l'Economie politique.

II. *Physique mathématique*

Sans aucun doute, les activités exercées par Borel pendant la première guerre, — activités qui l'ont amené à étudier des problèmes concrets — ont conduit Borel à s'intéresser de plus en plus à la Physique. Mais cet intérêt s'était déjà manifesté auparavant et pour des raisons toutes différentes.

Dès 1906, Borel s'occupe de la théorie cinétique des gaz et de la loi de Maxwell correspondante, après avoir constaté combien sont insuffisantes les diverses démonstrations de cette loi. Pour y apporter la rigueur [96], il prépare le lecteur en étudiant d'abord la répartition des petites planètes et montrant la nécessité de donner un sens aux positions antérieures du problème. Dans le cas des gaz, la discussion est un peu plus compliquée, mais elle l'amène encore à rejeter les formes du problème antérieurement admises et à leur substituer un problème qui, après une réduction que nous allons expliquer, prend la forme G énoncée plus loin.

On part d'hypothèses précises sur les molécules du gaz, qui conduisent à ramener l'étude du gaz à celui du mouvement de n sphères égales se mouvant dans un certain domaine où elles peuvent se réfléchir à la suite d'un choc, soit sur les parois, soit entre deux d'entre elles. Borel ramène le mouvement des n centres des n sphères dans l'espace usuel à 3 dimensions au cas du mouvement d'un point P dans un domaine D de l'espace à 3 n dimensions, où les lois de la réflexion sur les parois sont analogues aux lois classiques. En vertu de la conservation de l'énergie, la vitesse de P est constante. Soit \overline{OV} le vecteur d'origine fixe O , équipollent à cette vitesse. V se déplace sur une sphère S . Borel énonce alors ainsi la forme finale, G , qu'il donne au problème.

Il admet que la position de la paroi et les données initiales sont des éléments aléatoires dont les lois de probabilité sont connues. Le problème est de déterminer la probabilité que le point V soit dans un domaine élémentaire $d\omega$ de la surface de S à une époque t comprise entre des limites connues, que l'on fera ensuite croître indéfiniment.

Borel démontre alors que la probabilité limite cherchée est proportionnelle à $d\omega$, c'est-à-dire que toutes les directions de OV sont également probables (pour un temps suffisamment long).

En précisant le calcul, Borel retrouve enfin la loi de Maxwell. D'après lui, ce calcul fournit la plus simple des démonstrations rigoureuses de cette loi.

Dans sa conférence au Rice Institute [S., p. 317], Borel étudie plusieurs aspects du passage du fini à l'infini en mathématique et observe le parallélisme avec le problème de savoir si la Nature est discontinue ou continue, ce qui entraîne la question de la légitimité en Physique des théories moléculaires.

Borel note d'abord que c'est souvent « une simplification en Mathématiques que de remplacer par l'infini un nombre fini très grand ». Il en cite plusieurs exemples. Limitons-nous au premier qui conduit à constater « que le calcul des intégrales définies est souvent plus simple que celui des formules sommatoires ». Mais il étudie aussi le passage inverse de l'infini au fini, qui correspond en physique à l'introduction des théories moléculaires. Il observe alors que « les considérations basées sur l'existence des molécules n'y jouent qu'un rôle auxiliaire ».

« La théorie moléculaire a donc été un guide précieux pour l'analyste en lui suggérant la marche à suivre pour étudier les équations du problème, mais elle est éliminée de la solution définitive ».

On pourrait encore préciser ces réflexions. Il est exact que, pendant longtemps, les mathématiciens ont abordé les problèmes où figuraient des variables continues en remplaçant celles-ci par des variables discontinues et passant à la limite. Comme le dit Borel, cette façon de procéder permettait de pressentir la forme de la solution. Mais pour établir celle-ci, il fallait établir l'existence et la forme d'une limite et c'était là souvent un problème très difficile. Depuis lors, la tendance s'est faite jour, de plus en plus, d'éviter cette difficulté en cherchant à préciser dans la discussion du cas discontinu tout ce qui gardait un sens, que le nombre des valeurs des variables soit fini ou non. On arrive ainsi à une solution s'appliquant directement au problème posé dans le cas continu. C'est ainsi que l'étude des équations intégrales symétriques faite par Hilbert en résolvant le problème difficile

d'un passage à la limite s'est révélée à la fois plus simple et plus élégante dans l'étude directe de E. Schmidt. Un exemple analogue est fourni par la démonstration de Fredholm de l'existence d'une solution de son équation intégrale. Sa marche est analogue à celle de la solution d'un système de n équations linéaires à n inconnues; mais si elle s'est trouvée ainsi guidée par l'étude de ce problème, à aucun moment sa démonstration ne fait intervenir le passage à la limite du cas d'un nombre fini de variables à un nombre infini.

Borel revient au cas discontinu en observant qu'il « peut être intéressant de se proposer, au point de vue purement mathématique, l'étude directe de fonctions ou d'équations dépendant d'un nombre fini de variables, mais très grand ». Il se trouve alors ramené à une question qui lui tient à cœur et qu'il a souvent agitée sous différentes formes:

« La première difficulté qui se présente lorsqu'on veut étudier des fonctions d'un très grand nombre de variables, est la définition précise d'une telle fonction, j'entends par là une définition *individuelle*, permettant de distinguer la fonction définie de l'infinité des fonctions analogues ». Borel se demande « si l'on peut considérer comme donné » un ensemble de nombres dont « la vie d'un homme ne suffirait à en énumérer une faible partie ». Pour lui, un tel ensemble peut être considéré comme déterminé « par la connaissance d'une formule assez simple pour être effectivement écarté, tandis qu'il n'est pas possible d'écrire effectivement autant de nombres distincts... ». Il peut être aussi déterminé en considérant l'ensemble comme l'ensemble des valeurs que peut prendre un nombre aléatoire dont la loi de probabilité est donnée.

Ces considérations sont tout à fait justifiées quand il s'agit de définitions et d'applications « constructives ». S'il s'agit de définitions et d'applications « descriptives », la situation est différente. La démonstration, par exemple, que le terme général d'une série convergente tend vers zéro quand son rang croît indéfiniment, nous paraît correcte sans que ce terme général soit représenté par une formule simple ou qu'il relève du calcul des probabilités et même si la vie d'un homme ne suffisait pas à énumérer une faible partie de la suite des termes de la série.

Cette observation n'enlève rien à l'intérêt de la distinction que fait Borel des ellipsoïdes « très irréguliers » parmi les ellipsoïdes dans un espace à un très grand nombre de dimensions. Borel appelle ainsi ceux pour lesquels la moyenne des inverses des quatrièmes puissances des longueurs des axes n'est pas du même ordre de grandeur que le carré de la moyenne des inverses des carrés des longueurs des axes. D'après Borel, il convient, pour obtenir des résultats utiles sur les ellipsoïdes, d'exclure ces ellipsoïdes très irréguliers. « Lorsqu'un ellipsoïde n'est pas très irrégulier, plusieurs de ses propriétés permettent de l'assimiler à une sphère »...

« Une figure qui dépend d'un nombre extrêmement grand de paramètres ne peut être considérée comme numériquement déterminée que si ses paramètres sont définis au moyen de données numériques assez peu nombreuses pour nous être accessibles ».

Plus loin, Borel développe les raisons pour lesquelles il convient souvent de remplacer une variable ayant un nombre de valeurs fini mais très grand par une variable ayant une suite infinie mais énumérable de valeurs. Et ceci, plutôt que par une variable continue comme on faisait en physique mathématique classique où l'on supposait la matière continue.

Une autre des suggestions mathématiques qu'offrent les théories moléculaires concerne les fonctions d'une variable complexe. Pour le montrer, Borel considère le potentiel d'un système formé d'une suite infinie de points isolés, la masse concentrée en chacun de ces points étant finie ainsi que la masse totale. Pour simplifier, limitons-nous au cas d'un système plan et, par suite, d'un potentiel dit logarithmique. Supposons, de plus, que les masses sont réparties en un ensemble de points qui, dans une certaine région, est partout dense. Mais « l'hypothèse que les masses attirantes sont de simples points matériels sans dimension est difficile à accepter au point de vue physique. On est ainsi conduit à disperser cette masse dans un petit cercle ayant le point pour centre sans changer le potentiel à l'extérieur de ce cercle qu'on nommera le cercle d'action de son centre. On répartit les masses et les densités de telle manière que la densité s'annule ainsi que ses dérivées sur le périmètre du cercle; elle est ainsi non seulement finie mais continue ».

Borel démontre que, par une répartition convenable de la densité, on arrive à un résultat qui peut étonner. On aurait pu craindre qu'il n'y eût pas de place libre entre des points matériels tellement serrés par hypothèse. En fait, Borel démontre « qu'il y a des points en lesquels se croisent une infinité de droites sur lesquelles la densité est nulle; en ces points, la fonction potentielle logarithmique satisfait à l'équation de Laplace ».

Borel passe alors à la situation correspondante dans la théorie des fonctions d'une variable complexe. Soit une fonction à pôles denses dans une région; on peut définir dans cette région « une infinité de droites, se croisant dans tous les sens, la fonction admettant des dérivées continues sur ces droites et la dérivée ayant la même valeur dans toutes les directions en chacun des points de croisement de ces droites. Nous retombons ainsi sur la théorie des fonctions monogènes résumée plus haut (p. 69), mais reliée ici à une théorie physique moléculaire. C'est une extension magnifique de la théorie des fonctions analytiques grâce à laquelle Borel a pu dépasser l'extension précédente due à Weierstrass.

A la fin du même mémoire, Borel survolant son sujet, s'exprime ainsi: « C'est toujours au contact de la Nature que l'Analyse mathématique s'est renouvelée, ce n'est que grâce à ce contact permanent qu'elle a pu échapper au danger de devenir un pur symbolisme, tournant en rond sur lui-même ». On ne saurait mieux dire, pourvu qu'on complète cette assertion. Les mathématiciens sont, en effet, nécessairement amenés à réaliser un travail interne, consistant en une refonte continue de l'armature des mathématiques, pour les simplifier et les harmoniser. Il y a une tendance vers l'abstraction qui semble éloigner les mathématiques de la Nature, mais qui, en réalité, n'a pour but que de dégager l'essentiel et le commun dans les problèmes, généralement particuliers, posés par la Nature et ainsi de rendre leurs solutions applicables à de nouveaux problèmes posés par la Nature.

L'irréversibilité.

Depuis Loschmidt en 1876, on fait souvent la remarque suivante: les équations de la dynamique ne sont pas modifiées

quand on change les signes des vitesses, ce qui revient à changer le signe du temps. Ces équations ne permettent donc pas de prévoir dans l'avenir une évolution différente de ce que serait l'évolution en remontant vers le passé. Dès lors, il semble en résulter que les phénomènes irréversibles sont impossibles. Borel a donné [S., p. 341] une explication de ce paradoxe.

Il admet que cette objection serait valable, si toutes les conditions initiales étaient données avec une exactitude absolue. Mais cette hypothèse lui paraît irréalisable. Cette exactitude absolue devra laisser place à un certain flottement. Il en résulte que l'avenir n'est pas entièrement déterminé, alors qu'on ne peut parler d'une indétermination du passé. Il n'y a donc plus une réversibilité absolue. Dans certains cas, on aura des phénomènes presque réversibles, dans d'autres ils seront irréversibles.

LISTE DES TRAVAUX PAR ANNÉE DE PUBLICATION
DEPUIS 1940, JUSQU'A LA MORT D'ÉMILE BOREL (1956) ¹⁾

1940

E. BOREL et S. CHÉRON. Théorie mathématique du bridge à la portée de tous. 134 tableaux de probabilité, avec leurs modes d'emploi. Formules simples, application. Environ 4000 probabilités. (*Monographies des Probabilités, Fas. V. Gauthier-Villars, XXI, t. 392 p.*)

260. Objections à la définition empirique de la probabilité. *C.R. Ac. Sc.*, t. 211, p. 261.

1941

261. Application du calcul des probabilités aux problèmes concernant les nombres premiers. Théorème de Goldbach, *C.R.*, t. 212, p. 317-320.
262. Théorie de l'hérédité, définitions et problèmes, *C.R.*, t. 212, p. 777-780.
263. Sur certains problèmes de l'hérédité connexes au problème de la ruine des joueurs, *C.R.*, t. 212, p. 821-825.

1942

264. Sur l'emploi du théorème de Bernoulli pour faciliter le calcul d'une infinité de coefficients. Application au problème de l'attente à un guichet. *C.R.*, t. 214, p. 452-456.

1946

265. L'axiome du choix et la mesure des ensembles, *C.R.*, t. 222, p. 309-310.
266. Les paradoxes de l'infini. Chez Gallimard.
267. Les ensembles homogènes, *C.R.*, t. 222, p. 617-618.

¹⁾ Cette liste fait suite à la liste arrêtée à 1939 et figurant dans le volume « Selecta, jubilé scientifique de Monsieur Emile Borel », chez Gauthier-Villars, 1940 (et désigné par [S] dans le texte).

1947

268. Sur les probabilités dénombrables et le pari de Pascal, *C.R.*, t. 224, p. 77-78.
269. Sur l'illusion des définitions numériques, *C.R.*, t. 224, p. 765-767
270. Les paradoxes de l'axiome du choix, *C.R.*, t. 224, p. 1537-1538
271. Sur les difficultés des définitions asymptotiques, *C.R.*, t. 224, p. 1597-1599.
272. Sur les développements unitaires normaux. *C.R.*, t. 225, p. 51.

1948

273. Sur les sommes de développements unitaires normaux, *C.R.*, t. 226, p. 365.
274. Sur les systèmes généraux de numération, *C.R.*, t. 226, p. 1405-1407.
275. A propos de l'axiome du choix, *Ark. Mat. Ash. Fys.* 34 B, n° 15, 2 p.
276. Sur l'addition vectorielle des ensembles de mesure nulle, *C.R.*, t. 227, p. 103-105.
277. Sur l'addition vectorielle d'une infinité dénombrable d'ensembles de mesure nulle, *C.R.*, t. 227, p. 167-168.
278. Sur la raréfaction R et l'addition vectorielle des ensembles de mesure nulle, *C.R.*, t. 227, p. 453-455.
279. Sur la somme vectorielle des ensembles non parfaits de mesure nulle; *C.R.*, t. 227, p. 545.
280. Sur la somme vectorielle de deux ensembles de mesure nulle, dont un seul est parfait, *C.R.*, t. 227, p. 790-792.
281. Sur une inégalité numérique et sur l'addition vectorielle de certains ensembles *C.R.*, t. 227, p. 1065-1066.
282. Sur les développements unitaires normaux, *Ann. Soc. Polon. Math.*, t. 21, p. 74-79.
283. Sur les séquences en météorologie, Annuaire du Bureau des Longitudes, A1-A 18, 1948.

1949

284. Probabilité et certitude, *Dialectica* 3, p. 24-27.
285. Eléments de la théorie des ensembles, Albin Michel, 319 p.
286. Le paradoxe de Saint Pétersbourg, *C.R.*, t. 229, p. 404-405.

287. Sur une propriété singulière de la limite d'une espérance mathématique, *C.R.*, t. 229, p. 429-431.
288. Sur une martingale mineure, *C.R.*, t. 229, p. 1181-1183.

1950

289. Sur les chiffres décimaux de $\sqrt{2}$ et divers problèmes de probabilités en chaîne. *C.R.*, t. 230, p. 591-593.
290. Analyse et géométrie euclidienne, *C.R.*, t. 230, p. 1989-1990.
291. Leçons sur la théorie des fonctions (Principes de la théorie des ensembles en vue des applications à la théorie des fonctions), *Gauthier-Villars*, 4^e édition; XIII+295 p.
292. Probabilité et certitudes, Presses Universitaires, 136 p.

1951

293. Le calcul numérique des séries divergentes, *C.R.*, t. 232, p. 457-458.
294. Sur l'emploi des coordonnées de la droite pour l'étude des radiations, *C.R.*, 1329-1331.
295. Les décimales de e et de π , *C.R.*, t. 233, p. 1973-1974.
296. La définition en mathématiques — *Congrès Intern. de Phil. des Sciences. Vol. III*, p. 89-99, *Actualités Sc. et Ind. Hermann*.
297. Sur une propriété arithmétique des suites illimitées d'entiers, *C.R.*, t. 233, p. 769-770.
298. Sur la transmission d'un caractère héréditaire dans les générations successives *C.R.*, t. 233, p. 1241-1243.
299. Les nombres inaccessibles; avec une note de Daniel Dugué, *Gauthier-Villars*, X+141 p.
300. Démonstration élémentaire du théorème de Dirichlet relatif aux nombres premiers d'une progression arithmétique, *C.R.*, t. 234, p. 769-770.
301. Étude élémentaire de la fréquence des nombres premiers dans les progressions arithmétiques, *Rend. Cir. Mat. Palermo* (2), I., p. 111-128.

1953

302. Les nombres premiers, *Presses Universitaires*, 135 p.
303. Sur les intervalles séparant deux nombres premiers consécutifs, *C.R.*, t. 236, p. 1713.

1955

304. Probabilités; Erreurs. Borel, Deltheil et Huron, 9^e Edition.