Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 10 (1964)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE CONSTRUCTION DE LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE FONDÉE SUR LA NOTION DE RÉFLEXION

Autor: Delessert, André

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-39412

UNE CONSTRUCTION DE LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE FONDÉE SUR LA NOTION DE RÉFLEXION

par André Delessert

TABLE DES MATIÈRES

AVANT-PROPOS

Le texte qui suit a été inspiré par la rédaction d'un manuel de géométrie élémentaire plane (voir [10])[1]. Le maître du second degré qui désire initier ses élèves à l'élaboration d'une théorie mathématique ne trouve pas toujours d'exposé élémentaire qui réponde à son attente. Pour la géométrie euclidienne, les constructions axiomatiques les plus connues — dont celle de Hilbert reste le modèle (voir [12]) — sont presque inutilisables par l'enseignement élémentaire. Le choix des axiomes y est dicté surtout par les exigences du logicien alors que le maître a besoin d'axiomes aussi constructifs et aussi simples que possible. D'autre part, les axiomatiques traditionnelles ne font que trop peu de place aux idées de F. Klein (voir [14]), qui semblent pourtant s'accorder assez heureusement à la mentalité actuelle des élèves.

Le présent exposé a pour but de mettre en évidence quelques-unes des propriétés des groupes fondamentaux de la géométrie euclidienne qui peuvent être utilement exploitées dans l'enseignement élémentaire. Il importe toutefois de préciser que l'on n'y trouvera pas le plan d'un manuel destiné aux jeunes élèves. Au contraire, bien que le travail s'inscrive dans le domaine d'une géométrie euclidienne assez étroitement définie, il permet de deviner quelques perspectives mathématiques intéressantes.

Cet essai, d'abord destiné à un usage tout personnel, n'aurait jamais vu le jour sans l'aide et l'encouragement de M. Jean de Siebenthal, professeur à l'Université de Lausanne et de M. Gustave Choquet, professeur à la Sorbonne. J'ai abondamment bénéficié de leurs conseils et je m'en suis très largement inspiré dans l'établissement de ce texte. Je tiens à leur témoigner ici ma vive gratitude. Enfin je désire remercier MM. les Professeurs G. de Rham et J. Karamata dont les avis bienveillants m'ont été extrêmement précieux.

---

[1]) Les numéros entre crochets renvoient aux références bibliographiques réunies à la fin.

INTRODUCTION

La géométrie dite « élémentaire » est une notion assez confuse. Elle dissimule — si l'on ose dire — certains chapitres de mathématiques derrière une collection de recettes, de conventions et de rites extrêmement subtils qui présentent un caractère quelque peu ésotérique. Ce ne sont pas ces procédés qui nous intéressent ici, mais bien le domaine mathématique auquel ils s'appliquent: celui de la géométrie euclidienne à deux ou trois dimensions. Pour la suite, il nous est nécessaire de préciser ce que nous entendons par là. Nous avons le choix entre trois définitions qui, bien qu'équivalentes, reflètent des attitudes très différentes.

La première définition peut être considérée comme « analytique ». Soit K un corps réel (autrement dit le corps R des nombres réels ou l'un de ses sous-corps) contenant la racine carrée de chacun de ses éléments positifs. On appelle *points* les éléments de K^n; tout point x est un système ordonné de n éléments de K: $x = (x_i) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. On introduit une distance d dans K^n en posant:

$$d(x, y) = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}; \quad x = (x_i), y = (y_i) \in K^n.$$

On appelle *isométrie* de K^n toute application de K^n dans lui-même qui conserve la distance d. On montre qu'une isométrie de K^n est une application biunivoque de K^n sur lui-même. L'ensemble des isométries de K^n constitue donc un groupe que nous désignerons par $GE(n, K)$: le *groupe euclidien de dimension n sur K*. On appelle *géométrie euclidienne de dimension* n *sur* K la recherche et la classification des invariants de K^n vis-à-vis du groupe $GE(n, K)$.

Une *translation* de K^n est une application de K^n dans lui-même définie par $(x_i) \to (x_i + a_i)$ où (a_i) est un point arbitrairement choisi dans K^n. L'ensemble des translations de K^n est un sous-groupe distingué τ_n de $GE(n, K)$. Le groupe τ_n est visiblement isomorphe à K^n_+, où K_+ désigne le groupe additif sous-jacent à K. Le sous-groupe des éléments de $GE(n, K)$ qui laissent fixe le point $(o, o, \ldots, o)$, ou *groupe de stabilité* de $(o, o, \ldots, o)$, est isomorphe au groupe orthogonal à n variables sur K, noté $O(n, K)$. Ce groupe $O(n, K)$ est constitué par l'ensemble des automorphismes de l'espace vectoriel de dimension n sur K (que l'on désigne encore par K^n) qui laissent invariante la forme quadratique

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \,; \qquad x = (x_i) \in K^n \,.$$

On montre que $GE(n, K)$ est le produit semi-direct de τ_n et du groupe de stabilité de $(o, o, \ldots, o)$ (voir 2.3). Il en résulte, en particulier, que les géométries euclidiennes à deux ou trois dimensions ne sont que des épisodes mineurs dans l'étude des formes quadratiques (voir [7]). La définition que nous venons de rappeler a l'avantage de la concision et de la netteté. Elle insère très naturellement la géométrie élémentaire dans l'édifice des mathématiques tel qu'il est conçu actuellement par beaucoup de mathématiciens.

La deuxième définition pourrait être qualifiée de « physique ». C'est celle qui apparaît chez Euclide, celle qui a été mise en forme par Hilbert dans ses Grundlagen. A la suite d'expériences innombrables pratiquées par toutes sortes d'individus, il s'est révélé possible de décrire convenablement une quantité considérable de faits matériels en employant quelques termes et expressions bien choisis: point, droite, intersection, être sur, être entre, etc. Les règles permettant de combiner ces mots entre eux sont consignées une fois pour toutes dans des axiomes, dont l'axiome d'Euclide est le plus fameux. La géométrie euclidienne est alors l'art de découvrir et de classer les propositions correctes que l'on peut formuler à partir des notions fondamentales et des axiomes. Nous ne préciserons pas plus ces notions fondamentales et ces axiomes, renvoyant pour cela aux ouvrages de Hilbert [12] et de Kerékjarto [13]. Disons simplement qu'il est possible de le faire de manière que la définition « physique » de la géométrie euclidienne soit équivalente à la définition « analytique ». Vuc sous cet angle, la géométrie élémentaire constitue une branche de la physique théorique élémentaire, comparable à la mécanique rationnelle, par exemple. Le mérite d'un exposé « physique » de la géométrie élémentaire est de refléter une étape essentielle dans le cheminement historique des mathématiques et, par là-même, de convenir à des intelligences adolescentes qui doivent parcourir en raccourci un cheminement analogue. Le grand inconvénient d'un tel exposé est de dissimuler ce que l'on considère aujourd'hui comme les structures fondamentales des mathématiques.

La troisième définition relève des idées de F. Klein. Soit E_S un ensemble E muni d'une structure bien déterminée S. Soit G un groupe de transformations agissant effectivement et transitivement dans E_S; cela signifie que G est un sous-groupe du groupe des automorphismes de E_S tel qu'à tout couple d'éléments (a, b) de E on puisse faire correspondre au moins un élément de G qui envoie a sur b. G peut être muni d'une structure S' plus forte que celle de groupe (de groupe topologique, par exemple). La géométrie de E_S relativement à G est l'étude des invariants de E_S vis-à-vis de G.

Si l'on désigne par g le sous-groupe de stabilité de l'élément a de E dans G, on peut établir une correspondance biunivoque canonique f entre E et l'espace homogène G/g. Lorsqu'on considère que G agit simultanément dans E et dans G/g, on observe que f commute avec chaque élément de G. L'espace homogène G/g peut souvent être muni d'une structure S'' obtenue à partir de S' « par passage au quotient » suivant g. Il peut alors se produire que f soit un isomorphisme entre G/g et E_S. (A ce propos, voir par exemple [17], page 65.) Nous dirons que la géométrie de E_S par rapport à G est *régulière* dans ce cas. On peut alors substituer G/g à E_S, et pour autant qu'on se borne aux géométries régulières, on peut poser la définition suivante:

Soit G *un groupe (muni éventuellement d'une structure plus forte que celle de groupe) et* g *un sous-groupe de* G *tel que l'intersection des sous-groupes conjugués de* g *dans* G *se réduise à l'élément neutre. On appelle géométrie de* G *relativement à* g *l'étude des invariants de l'espace homogène* G/g *vis-à-vis des transformations qui y sont induites par les éléments de* G.

Les axiomes d'une telle géométrie s'expriment par des hypothèses formulées sur le groupe G uniquement. Une telle situation se présente justement dans le cas de la géométrie euclidienne de dimension n sur un corps K: elle est la géométrie du groupe $GE(n, K)$ par rapport au groupe de stabilité d'un point quelconque de K^n. De ce point de vue, la géométrie euclidienne est un paragraphe de la théorie générale des groupes.

Si l'on néglige la définition dite « physique » qui ne se prête pas à une généralisation suffisante, semble-t-il, il ne reste en présence que la définition « analytique » et la troisième définition que l'on hésite à qualifier de « synthétique », ce terme étant officieusement condamné par les tenants de la première définition. Nous ne prenons pas parti ici entre « analystes » triomphants et « synthétistes » obstinés. Nous remarquerons seulement que la géométrie euclidienne est une introduction à deux domaines très vastes qui ne se recouvrent pas: la théorie des formes quadratiques et celle des groupes de transformations. Loin de condamner une définition au profit de l'autre, l'enseignement élémentaire a tout avantage à adopter à l'égard de la géométrie euclidienne deux attitudes mentales qui se complètent. Dans ce qui suit, nous allons essayer d'examiner la contribution que peut apporter notre troisième définition à la géométrie élémentaire. Pour cela, nous partirons de la définition analytique de $GE\,(n, K)$ et nous formulerons un système d'axiomes dont nous montrerons qu'il caractérise $GE(n, K)$. Afin de préciser notre cheminement, nous allons rappeler quelques faits très simples.

Pour fixer les idées, nous nous plaçons dans le cas de la géométrie plane: $n = 2$. A toute droite d du plan, on peut associer une isométrie distincte de la transformation identique I et laissant fixes tous les points de d. Cette isométrie est unique; on l'appelle la *réflexion* suivant d. Tout élément A de $GE(2, K)$ peut être obtenu en formant le produit d'un certain nombre de réflexions. Ce nombre peut être borné à trois et sa parité est univoquement déterminée par l'élément A. Les éléments de $GE(2, K)$ qui résultent du produit d'un nombre pair de réflexions sont dits *propres* et constituent un sous-groupe d'indice 2 dans $GE(2, K)$. Lorsque trois droites a, b et c passent par un même point ou admettent une même perpendiculaire, le produit des réflexions suivant a, b et c est encore une réflexion; la réciproque est vraie. La condition nécessaire et suffisante pour que deux droites a et b soient perpendiculaires est que les réflexions associées à a et b soient distinctes et commutent. Les seuls éléments involutifs de $GE(2, K)$ sont les réflexions et les demi-tours, tout demi-tour étant le produit de deux réflexions suivant des droites perpendiculaires. En associant à tout demi-tour son centre, on établit une correspondance biunivoque entre l'ensemble des demi-tours et celui des points du plan. Un demi-tour et une réflexion commutent quand le centre du demi-tour est sur l'axe de la réflexion, et dans ce cas seulement.

Comme on le voit, il existe tout un ordre de faits géométriques élémentaires qui s'interprètent très simplement comme des propriétés du groupe $GE(2, K)$. Il est naturel de considérer un groupe G engendré par un ensemble d'éléments involutifs appelés les-uns « droites » et les autres « points », tout point étant le produit de deux droites distinctes qui commutent. Un point P est « sur » une droite d quand P et d commutent. Deux droites sont perpendiculaires quand elles sont distinctes et qu'elles commutent, et ainsi de suite. Après quoi l'on pose un ensemble d'axiomes portant sur les points et les droites de G de sorte que G soit isomorphe à un groupe $GE(2, K)$. Sous l'impulsion de plusieurs géomètres parmi lesquels il faut signaler d'abord Hjelmslev, cette idée s'est développée. Mais il s'est révélé intéressant de ne conserver qu'une partie des axiomes nécessaires à la détermination de $GE(2, K)$ et d'abandonner des axiomes concernant l'ordre, l'existence de droites parallèles et la libre mobilité. L'étude des groupes ainsi caractérisés — parmi lesquels on trouve non seulement $GE(2, K)$, mais encore les groupes fondamentaux des géométries elliptiques et hyperboliques, par exemple — est l'objet de la *géométrie métrique absolue.* L'exposé le plus complet sur la question est le beau traité de M. F. Bachmann qui a paru récemment (voir [3]). Des développements analogues peuvent être faits pour la géométrie de l'espace ($n = 3$) (voir [1], par exemple).

Nous pouvons situer maintenant notre démarche par rapport à la géométrie métrique absolue. En simplifiant un peu, nous pouvons considérer que celle-ci se propose d'étudier certains groupes à l'aide de termes et d'expressions propres à la géométrie élémentaire: point, droite, être sur, etc. Mais on pourrait insister plus particulièrement sur le fait suivant: si l'on reprend le cas de la géométrie plane, on peut observer que le groupe $GE(2, K)$ est engendré par une famille $\Sigma(2, K)$ d'éléments involutifs — les réflexions — telle que le produit d'un nombre impair de ces éléments générateurs ne saurait être égal à l'élément neutre I de $GE(2, K)$. Nous dirons d'un groupe possédant cette propriété qu'il est engendré par des réflexions ou encore que c'est un *R-groupe*. Les groupes symétriques finis, les groupes $GE(n, K)$, les groupes orthogonaux $O(L, \Phi)$ sur les corps L de caractéristique $\neq 2$ et relatifs à des formes quadratiques Φ régulières sont des R-groupes (voir [11]). Plus généralement, tout groupe engendré par une famille d'éléments involutifs est un R-groupe ou le groupe-quotient d'un R-groupe par un sous-groupe distingué d'ordre 2.

Si nous reprenons le groupe $GE(2, K)$, nous voyons que la condition suivante:

(1) « le produit de trois réflexions est une réflexion »

définit dans $\Sigma(2, K)$ une relation intéressante. Géométriquement, cette condition est équivalente au fait que les axes des trois réflexions considérées appartiennent à un même faisceau de droites. Dans l'ensemble des droites du plan, le fait d'appartenir à un même faisceau détermine une relation ternaire *symétrique* (si a_1, a_2, et a_3 appartiennent à un même faisceau, il en est de même de a_i, a_j et a_k, où (i, j, k) est une permutation quelconque des indices 1, 2 et 3), *réflexive* (les droites a, a et b appartiennent à un même faisceau, quelles que soient a et b) et *transitive* (si les droites a et b sont distinctes, si a, b, et c appartiennent à un même faisceau tout comme a, b et d, alors a, c et d appartiennent encore à un même faisceau). Ces trois propriétés caractérisent les *relations d'incidence ternaires*. Les R-groupes dans lesquels la condition (1) définit une relation d'incidence ternaire seront appelés *RI-groupes*. Les exemples donnés plus haut sont des RI-groupes.

La notion de R-groupe semble assez générale pour justifier des recherches plus détaillées. En ce qui concerne en particulier les RI-groupes, on peut signaler les travaux de M. R. Lingenberg (voir [16]). Nous nous sommes proposé ici deux buts. Le premier consiste en l'examen sur un exemple bien connu de quelques notions qui interviendront probablement dans l'étude des R-groupes. Le deuxième est de formuler pour la géométrie euclidienne à n dimensions un système d'axiomes maniables en nombre réduit, en adoptant le langage des R-groupes. Il ne s'agit pas là d'une recherche axiomatique en soi. Notre propos est de donner un exemple de construction de la géométrie élémentaire fondé sur des notions généralement peu exploitées dans l'enseignement du second degré. Le changement de point de vue est susceptible de faire apparaître des perspectives intéressantes.

Afin de ne pas manquer notre second objectif, nous avons fait en sorte de conserver le contact avec les problèmes de la géométrie élémentaire. Ainsi nous avons développé particulièrement la géométrie plane à partir de laquelle il est possible de construire simplement la géométrie euclidienne à n dimensions ($n \geqslant 3$) par une sorte de récurrence. Dans ce domaine restreint, nous avons fait en sorte de donner toutes les démonstrations utiles, même lorsqu'elles sont classiques. Pour les mêmes raisons, nous avons introduit deux axiomes dont le rôle algébrique est assez mince dans notre construction: il s'agit de l'axiome d'Archimède et de celui du compas. Ils ne se justifient ici que par le rôle essentiel qu'ils jouent dans l'enseignement élémentaire. En revanche, nous n'avons généralement pas traduit les propositions énoncées en terme de géométrie élémentaire traditionnelle, laissant ce soin au lecteur curieux d'observer l'incidence des développements qui vont suivre sur l'ordonnance d'un exposé élémentaire de géométrie euclidienne. Il importe de rappeler toutefois qu'ils ne sauraient figurer tels quels dans un cours destiné aux enfants.

1. Les quatre premiers axiomes de la géométrie plane

1.1 On dit qu'une partie Σ d'un groupe G *engendre* G (au sens étroit) lorsque tout élément de G peut s'écrire d'une manière au moins sous forme du produit d'un nombre fini d'éléments de Σ. On peut ainsi remplacer chaque élément de G par un mot dont les lettres sont des éléments de Σ. Comme G est un groupe, chacun de ses éléments peut être représenté par plusieurs mots différents. On appelle *relations de structure* de G relativement à Σ l'ensemble des égalités par lesquelles on donne les mots représentant l'élément neutre I de G. Le groupe G est déterminé quand on se donne l'ensemble Σ et les relations de structure de G relativement à Σ.

Considérons un groupe G, d'élément neutre I, possédant les propriétés suivantes:

1) G est engendré par un ensemble Σ formé d'éléments involutifs de G. Nous désignerons les éléments de Σ par des lettres minuscules: a, b, ...
2) Les relations de structure de G relativement à Σ expriment toutes I par des mots d'un nombre pair de lettres.

Nous appellerons *réflexions* les éléments de Σ et nous dirons que G est un « groupe engendré par des réflexions » ou plus simplement un *R-groupe*. Nous utiliserons la notation (G, Σ) pour préciser que G est un R-groupe engendré par l'ensemble de réflexions Σ.

Les relations de structure du R-groupe G relativement à Σ peuvent prendre deux formes:

$$a)\ x^2 = I \qquad x \in \Sigma ,$$

$$b)\ a_1 a_2 \dots a_{2n} = I \,;\ n > 1 \qquad \begin{array}{l} a_i \in \Sigma \,;\ i = 1, 2, \dots, 2n , \\ a_j \neq a_{j+1} \,;\ j = 1, 2, \dots, 2n-1 . \end{array}$$

A titre d'exemple, on peut se donner arbitrairement un ensemble Σ non vide et se borner aux relations de structure de la forme a). On obtient ainsi le *R-groupe libre* engendré par Σ.

En vertu de la propriété 2), les longueurs des mots représentant un même élément du R-groupe (G, Σ) ont toutes la même parité. On appellera *propres* les éléments de G représentables par des produits d'un nombre pair de réflexions et *impropres* les autres. Les éléments propres de (G, Σ) forment un sous-groupe (distingué) G_0 d'indice 2 dans G, que nous appellerons la *composante propre* de (G, Σ). On obtient tous les éléments impropres de (G, Σ) en prenant la classe aG_0, où a est un élément arbitrairement choisi dans Σ.

Considérons un groupe H d'élément neutre I, engendré par un ensemble non vide E d'éléments involutifs. Introduisons le groupe multiplicatif C d'ordre 2, formé des éléments $+1$ et -1. Soit E' l'ensemble des couples $(a, -1)$, avec a $\in E$. Considérons la loi de formation suivante:

$$(a_1, -1)(a_2, -1)\dots(a_n, -1) = (a_1 a_2 \dots a_n, (-1)^n); \quad a_i \in E.$$

Les éléments ainsi construits constituent manifestement un R-groupe H', d'élément neutre $(I, +1)$, engendré par E'. Lorsque H est lui-même un R-groupe engendré par E, H' est isomorphe à H. Dans le cas contraire, H' est isomorphe au produit direct de H et C; H est isomorphe à la composante propre de (H', E'). Nous dirons que (H', E') est le *R-groupe naturellement associé à H.*

Dans le même ordre d'idées, bornons-nous à signaler un fait intéressant: *quel que soit le groupe* g, *il existe au moins un R-groupe (*G, Σ*) dont la composante propre est isomorphe à* g.

A tout élément T d'un R-groupe (G, Σ) on peut associer un automorphisme intérieur de G défini par:

$$X \to T^{-1} X T.$$

Cet automorphisme est banal lorsque T appartient au centre de G. Il est involutif chaque fois que l'on prend pour T un élément non central de Σ; on dit dans ce cas que l'on a affaire à un *automorphisme intérieur spécial* de G. Tout automorphisme intérieur de G peut être considéré comme le produit d'un nombre fini d'automorphismes intérieurs spéciaux de G. Une partie de G

est dite *distinguée* quand elle est stable pour les automorphismes intérieurs de G. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'elle soit stable pour les automorphismes intérieurs spéciaux de G.

Considérons un R-groupe (G, Σ). La plus petite partie distinguée Σ' de G contenant Σ s'obtient en formant la réunion des images de Σ par les automorphismes intérieurs de G. Il en résulte que Σ' est formée d'éléments involutifs impropres de (G, Σ). Par suite, G peut être considéré comme un R-groupe engendré par Σ'. Les propriétés de (G, Σ) auxquelles nous nous attacherons surtout concernent en fait (G, Σ'). C'est pourquoi nous substituerons systématiquement l'étude de (G, Σ') à celle de (G, Σ) lorsque $\Sigma \neq \Sigma'$. Nous n'introduisons pas de restriction essentielle en admettant que, par la suite, *nous ne considérerons que des R-groupes engendrés par des ensembles distingués de réflexions.*

Dans un R-groupe (G, Σ), nous appellerons *dimension d'un* élément X différent de l'élément neutre I le plus petit entier rationnel r tel que l'on puisse représenter X par un produit de $r+1$ éléments de Σ. Nous attribuerons à I la dimension -1. La *dimension du R-groupe* (G, Σ) est le maximum de la dimension de X lorsque X parcourt G. Par exemple, le groupe des permutations finies d'un ensemble infini E (chacune d'elles laissant fixes tous les éléments de E sauf un nombre fini d'entre eux) est engendré par les transpositions (permutations effectives portant sur deux éléments) de E; comme tel, c'est un R-groupe de dimension infinie. Les groupes finis d'ordres 1 et 2 peuvent être regardés comme des R-groupes de dimensions respectives -1 et 0; par la suite, nous qualifierons ces R-groupes de « banals ».

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le premier axiome concernant le groupe fondamental G d'une géométrie euclidienne plane.

Axiome P I. *Le groupe* G *est un R-groupe non banal engendré par un ensemble distingué* Σ *de réflexions*

Le R-groupe G n'étant pas banal, nous savons que Σ contient au moins deux éléments distincts.

1.2. Soit un ensemble E et une relation ternaire ι définie dans E. Le fait que trois éléments a, b et c de E, pris dans cet ordre, vérifient la relation ι se note $\iota(a, b, c)$. On dit que ι est une *relation d'incidence* (ternaire) lorsqu'elle satisfait les conditions suivantes:

1) Elle est *symétrique:* $\iota(a, b, c)$ implique $\iota(c, b, a)$ et $\iota(b, a, c)$.
2) Elle est *réflexive:* $\iota(a, a, b)$ quels que soient $a, b \in E$.
3) Elle est *transitive:* quand a et b sont deux éléments distincts de E, $\iota(a, b, c)$ et $\iota(a, b, d)$ impliquent $\iota(a, c, d)$.

Les relations d'incidence se rencontrent en géométrie élémentaire; c'est, par exemple, dans l'ensemble des points du plan, le fait pour trois points d'appartenir à une même droite; ou dans l'ensemble des droites du plan le fait pour trois droites d'avoir un point commun ou une direction commune.

Revenons au R-groupe G. Le fait que le produit de trois réflexions est une réflexion définit une relation ternaire dans Σ. Soit a, b, c, trois éléments de Σ tels que $abc \in \Sigma$. Alors:

$$cba = (abc)^{-1} = abc \in \Sigma ,$$

$$bac = c(cba)c = c(abc)c \in \Sigma ,$$

où l'on fait usage du fait que Σ est une partie distinguée de G. D'autre part, il est évident que aab est dans Σ quelles que soient les réflexions a et b. La relation ternaire considérée est donc symétrique et réflexive. Il n'est pas possible de prouver que la condition de transitivité est aussi satisfaite. C'est l'objet de l'axiome suivant.

Axiome P II (Axiome d'incidence). *Le fait que le produit de trois réflexions est une réflexion définit dans Σ une relation d'incidence.*

Nous appellerons *RI-groupe* tout groupe satisfaisant les axiomes P I et P II. Nous adopterons les notations ci-dessus: si $a, b, c \in \Sigma$, $\iota(a, b, c)$ signifie que $abc \in \Sigma$ et l'on dit que a, b et c sont *incidents*.

La relation d'incidence ι dans Σ est conservée par les transformations induites dans Σ par les automorphismes intérieurs de G. Il suffit évidemment de le vérifier pour les automorphismes intérieurs spéciaux de G. Soit alors a, b, c tels que $\iota(a, b, c)$ et soit s une réflexion quelconque:

$$(sas)(sbs)(scs) = s(abc)\,s \in \Sigma\,,$$

où l'on utilise le fait que Σ est une partie distinguée de G. Par suite $\iota(sas, sbs, scs)$.

Plaçons ici une remarque. On peut considérer une notion d'incidence plus générale. Admettons que, dans un ensemble E, pour tout entier naturel n, on a défini une relation R_n en choisissant dans E^n une partie P_n; on note $R_n(a_1, a_2, ..., a_n)$ lorsque l'élément $(a_1, a_2, ..., a_n)$ de E^n appartient à P_n, et $\bar{R}_n(a_1, a_2, ..., a_n)$ dans le cas contraire. Nous disons que les relations R_1, R_2, ..., R_n, ... déterminent une *incidence* (générale) dans E quand les conditions suivantes sont satisfaites:

1) $\bar{R}_1(a)$, $\forall\, a \in E$.

2) *Symétrie:* pour tout entier naturel n et si $a_i \in E$, $R_n(a_1$ $a_2, \ldots, a_n)$ implique $R_n(a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_n})$, où $(i_1, i_2, ..., i_n)$ est une permutation quelconque des indices $(1, 2, ..., n)$.

3) *Réflexivité:* pour tout entier naturel n et quels que soient les a_i dans E, $R_n(a_1, a_1, a_2, ..., a_{n-1})$.

4) *Transitivité:* pour tout entier naturel n supérieur *à* 1, les conditions $\bar{R}_{n-1}(a_1, a_2, ..., a_{n-1})$ et $R_n(a_1, a_2, ..., a_{n-1}, b_k)$, où $k = 1, 2, ..., n$, et a_i, $b_k \in E$, impliquent $R_n(b_1, b_2, ..., b_n)$.

Ainsi, une relation d'équivalence dans E peut être assimilée à une incidence pour laquelle $R_n(a_1, a_2, ..., a_n)$ quels que soient $a_i \in E$, dès que $n > 2$. Dans l'ensemble des éléments non nuls d'un espace vectoriel, la dépendance linéaire est une incidence.

Soit un R-groupe (G, Σ); nous disons qu'il satisfait la condition J, ou encore qu'il est un *RJ-groupe*, si l'on définit une incidence générale dans Σ en posant, pour tout n naturel, $R_n(a_1,$ $a_2, ..., a_n)$ dès que $\dim\,(a_1 a_2 \ldots a_n) < n$-1, avec $a_i \in \Sigma$. On voit qu'un RI-groupe de dimension 2 est un RJ-groupe. On peut aussi dire qu'un RI-groupe est un R-groupe (G, Σ) tel que l'on introduit une incidence générale dans Σ en posant:

1) Si $n = 1, 2, 3$: $R_n(a_1, ..., a_n)$ quand $\dim(a_1 \ldots a_n) < n$-1, $a_i \in \Sigma$.

2) Si $n > 3$: $R_n(a_1, ..., a_n)$ $\forall\, a_i \in \Sigma$.

1.3. Soit a et b deux réflexions distinctes. Nous appellerons *faisceau* déterminé par a et b et nous noterons $\Phi(a, b)$ l'ensemble des éléments de Σ incidents avec a et b. Il est clair que $\Phi(a, b)$ contient a et b et qu'il est identique à $\Phi(b, a)$.

PROPOSITION 1. *Un faisceau est entièrement déterminé par deux quelconques de ses éléments, pourvu qu'ils soient distincts.*

Prenons deux éléments distincts x et y dans un faisceau $\Phi(a, b)$, a et b étant deux réflexions distinctes. On peut supposer sans restriction que a et y sont distincts. Nous voulons prouver que les faisceaux $\Phi(a, b)$ et $\Phi(x, y)$ coïncident. Soit s un élément arbitraire de $\Phi(a, b)$. On peut écrire:

$$(1)\ \iota(a, b, x) \qquad (2)\ \iota(a, b, y) \qquad (3)\ \iota(a, b, s)$$

En vertu de l'axiome *P II*, on peut tirer de (1) et (2):

$$(4)\ \iota(a, x, y) \qquad (5)\ \iota(b, x, y)$$

ce qui montre que chacun des deux faisceaux contient les éléments déterminant l'autre. Par suite, il suffit de prouver que l'un de ces faisceaux contient l'autre. De (2) et (3), on tire $\iota(a, y, s)$; en associant ce fait à (4), on voit que $\iota(x, y, s)$, où l'on tient compte du fait que $a \neq y$. Par conséquent $\Phi(a, b) \subset \Phi(x, y)$. C.Q.F.D.

COROLLAIRE. *Soit* a, b *et* c *trois réflexions distinctes telles que* a = cbc. *Chacune d'elles appartient au faisceau déterminé par les deux autres.*

En effet, $acb = c$; donc $c \in \Phi(a, b)$. Le reste se déduit de la proposition 1.

Lorsque l'on ne désirera pas mettre en évidence un couple particulier d'éléments déterminant un faisceau, on désignera celui-ci par la seule lettre Φ.

Proposition 2. *Soit* G *un* RI-*groupe non banal engendré par un ensemble distingué* Σ *de réflexions et soit* Φ *un faisceau dans* Σ. *Le groupe engendré par* Φ *est un* RI-*groupe* $g(\Phi)$ *de dimension* 1. *Les éléments propres de* $g(\Phi)$ *forment un sous-groupe abélien* $g_0(\Phi)$.

Désignons par a et b deux réflexions déterminant Φ: $\Phi = \Phi(a, b)$. Montrons d'abord que, quels que soient x, y, et z dans Φ, le produit xyz est également dans Φ. Quand $x = y$, $xyz = z \in \Phi$. Quand $x \neq y$, les faisceaux Φ et $\Phi(x, y)$ sont confondus en vertu de la proposition 1. Par suite xyz est une réflexion. Comme $yx.xyz = z \in \Sigma$, xyz appartient à $\Phi(x, y)$, donc à Φ.

Désignons alors par $g(\Phi)$ l'ensemble des mots formés avec des éléments de Φ. Il résulte de ce qui précède que l'on peut obtenir $g(\Phi)$ en prenant tous les mots d'une ou deux « lettres » prises dans Φ. Quels que soient $x, y \in \Phi$, $x^{-1} = x$ et $(xy)^{-1} = yx$. Donc $g(\Phi)$ est un groupe engendré par Φ. Il résulte de la première partie de la démonstration que Φ est une partie distinguée de $g(\Phi)$. Comme l'élément neutre I de G ne peut être représenté par le produit d'un nombre impair d'éléments de Σ, $g(\Phi)$ est un R-groupe. De plus, quels que soient x, y et z dans Φ, $\imath(x, y, z)$. Donc $g(\Phi)$ est un RI-groupe de dimension 1.

L'ensemble $g_0(\Phi)$ des éléments propres de $g(\Phi)$ forment un sous-groupe d'indice 2 dans $g(\Phi)$. Prenons arbitrairement A dans $g_0(\Phi)$ et u dans Φ. On peut affirmer que $Au = v$ et $uA = w$ sont des éléments de Φ. Ainsi tout élément A de $g_0(\Phi)$ peut se mettre sous les deux formes vu et uw, avec u, v, $w \in \Phi$, u étant arbitrairement choisi. On en déduit que l'automorphisme intérieur de $g(\Phi)$ associé à u envoie tout élément de $g_0(\Phi)$ sur son inverse:

$$uAu = u(vu)u = uv = A^{-1}.$$

Il résulte immédiatement de là que $g_0(\Phi)$ est abélien. On peut le voir en prenant quatre éléments c, d, e et f dans Φ et en observant que:

$$(cd)(ef)(cd)^{-1} = c(d.ef.d)c = c.fe.c = ef,$$

C.Q.F.D.

Rappelons le fait suivant que nous avons démontré en passant:

Corollaire. *Quand* x, y *et* z *sont trois éléments d'un faisceau* Φ, *le produit* xyz *appartient à* Φ.

Les faits que nous venons de voir ont une illustration très simple en géométrie élémentaire. Lorsque a et b sont deux réflexions d'axes concourants, $\Phi(a, b)$ est l'ensemble des réflexions dont les axes passent par l'intersection de ceux de a et b. Lorsque les axes de a et b sont parallèles, $\Phi(a, b)$ est l'ensemble des réflexions dont les axes ont la même direction que ceux de a et b. Soit x, y et z trois réflexions dont les axes respectifs $\bar{x}$, $\bar{y}$, et $\bar{z}$ sont concourants. Le produit $t = xyz$ est une réflexion dont l'axe $\bar{t}$ est la conjuguée isogonale de $\bar{y}$ par rapport à $\bar{x}$ et $\bar{z}$.

La géométrie élémentaire étudie la *transformation* ou *inversion isogonale* par rapport à un triangle ABC. Son existence repose sur le théorème suivant: soit x, y et z trois droites passant respectivement par C, A et B; soit x' la conjuguée isogonale de x par rapport à CA et CB, y' celle de y par rapport à AB etAC, et z' celle de z par rapport à BC et BA. Si x, y et z sont incidentes (concourantes ou de même direction), il en est de même de x', y' et z'. La transformation isogonale considérée associe au point d'intersection de x, y et z celui de x', y' et z', quand ils existent. Il est facile de voir que le théorème cité est un cas particulier de la proposition suivante qui concerne les R-groupes en général:

Soit G un R-groupe engendré par un ensemble distingué Σ de réflexions. Soit a, b, c, x, y et z six réflexions telles que: $x' = axb$, $y' = byc$, $z' = cza$ et $t = xyz$ soient dans Σ; alors $t' = x'y'z'$ est aussi dans Σ.

En effet: $x'y'z' = axb.byc.cza = a.xyz.a \quad \in a\,\Sigma\, a = \Sigma$

1.4. Nous appellerons *élément bissecteur* de deux réflexions distinctes a et b tout élément u de Σ tel que $a = ubu$. Il est clair que $b = uau$ et que u est distinct de a et de b. Nous sommes maintenant en mesure de poser le troisième axiome concernant le groupe G, axiome qui est assez restrictif.

AXIOME P III (axiome de bissection). *Toute paire de réflexions distinctes admet au moins un élément bissecteur.*

L'axiome P III implique d'abord que Φ ne contient aucun élément central de G. De plus, l'ensemble des automorphismes intérieurs de G agit transitivement dans Σ. On aurait pu tenter de remplacer l'axiome P III par l'hypothèse suivante, apparemment moins restrictive:

(1) Il existe dans Σ un élément a tel que, quel que soit s différent de a dans Σ, a et s admettent au moins un élément bissecteur.

Mais il est facile de voir que, moyennant ce qui précède, (1) entraîne la validité de l'axiome P III dans G. En effet, soit b et c deux réflexions distinctes et différentes l'une et l'autre de a. Soit u un élément bissecteur de a et b et posons $c' = ucu$. Si $c' = a$, posons $v = a$; si $c' \neq a$, soit v un élément bissecteur de a et c'. Alors

$$c = uc'u = u.vav.u = uvu.b.uvu ,$$

et uvu est un élément bissecteur de b et c.

Tout faisceau contient les éléments bissecteurs de chacune de ses paires d'éléments distincts, d'après le corollaire de la proposition 1. Par suite, tout faisceau contient trois éléments distincts, au moins.

1.5. Remarquons que la notion de faisceau ne se présente dans Σ que lorsque G est de dimension supérieure à zéro. Lorsque G est de dimension 1, Σ ne contient qu'un seul faisceau, et réciproquement. Par la suite nous ne nous intéresserons qu'aux cas où Σ contient plusieurs faisceaux, et nous poserons un axiome à ce sujet. Mais auparavant, il convient de poser quelques définitions.

Lorsque G est au moins de dimension 2, on peut trouver dans Σ trois éléments non incidents a, b et c. Cela implique qu'il existe dans Σ au moins trois faisceaux distincts $\Phi(a, b)$, $\Phi(b, c)$ et $\Phi(c, a)$. L'intersection de deux faisceaux distincts comporte au plus un élément; elle peut être vide. Prenons un faisceau Φ. S'il possède un élément commun avec chacun des autres faisceaux de Σ, on dit qu'il est de *première classe* et on le note Φ_1. Dans le cas contraire, il existe au moins un faisceau de Σ disjoint de Φ;

on dit alors que Φ est de *seconde classe* et on le note Φ_2. Il résulte immédiatement de la définition que s'il existe un faisceau de seconde classe dans Σ, il en existe au moins deux.

Proposition 3. *Tout automorphisme intérieur de* G *transforme un faisceau de Σ en un faisceau de même classe.*

Il suffit d'établir la proposition dans le cas des automorphismes intérieurs spéciaux. Désignons par σ l'automorphisme intérieur de G associé à une réflexion s et soit un faisceau quelconque $\Phi(a, b)$ de Σ. Quel que soit x dans $\Phi(a, b)$, sxs appartient au faisceau $\Phi(sas, sbs)$. Donc σ envoie $\Phi(a, b)$ dans $\Phi(sas, sbs)$. Prenons y dans $\Phi(sas, sbs)$. Comme sas, sbs et y sont incidents, sys appartient au faisceau $\Phi(a, b)$. Mais σ envoie sys sur y. Donc $\sigma\Phi(a, b)$ contient $\Phi(sas, sbs)$. Ce qui prouve que σ transforme le faisceau $\Phi(a, b)$ en le faisceau $\Phi(sas, sbs)$.

Montrons encore que σ transforme tout faisceau Φ en un faisceau de même classe. Lorsque Φ est de seconde classe, il existe un faisceau Φ' disjoint de Φ. Comme σ est un automorphisme, $\sigma\Phi$ et $\sigma\Phi'$ sont disjoints. Donc $\sigma\Phi$ est de seconde classe. Quand Φ est de première classe, $\sigma\Phi$ n'est pas de seconde classe car σ est une transformation involutive. C.Q.F.D.

En géométrie élémentaire plane, un faisceau de première classe est l'ensemble des réflexions dont les axes passent par un point donné; un faisceau de seconde classe est l'ensemble des réflexions dont les axes ont une direction donnée. Pour l'instant, nous ne sommes pas renseignés sur l'existence dans Σ de faisceaux appartenant à l'une ou l'autre des deux classes. Pour nous assurer l'existence de « points », nous allons poser l'axiome suivant:

Axiome P IV. (Axiome des faisceaux de première classe) *Dans Σ, il existe au moins deux faisceaux dont un de première classe.*

Nous dirons de deux réflexions distinctes qu'elles *se coupent* ou qu'elles sont *sécantes* lorsqu'elles déterminent un faisceau de première classe.

L'axiome P IV entraîne immédiatement un fait important.

Proposition 4. *Le* R-*groupe* G *est de dimension* 2.

Nous avons déjà observé que l'existence de deux faisceaux distincts implique que la dimension de G égale au moins 2. Pour établir qu'elle est exactement 2, il suffit de montrer que, quelles que soient les réflexions a, b, c et d, le produit $abcd$ peut s'écrire sous la forme rs, où r et s sont des réflexions convenables. Le fait est banal quand a, b et c sont incidentes. Plaçons-nous donc dans le cas où elles ne le sont pas. Nous savons qu'il existe dans Σ un faisceau de première classe Φ_1. Si a appartient à Φ_1, posons $a' = a$ et $b' = b$. Si a n'appartient pas à Φ_1, désignons par a' l'élément commun aux faisceaux Φ_1 et $\Phi\,(a, b)$. Dans tous les cas, on peut écrire:

$$ab = a'.a'ab = a'b', \qquad b' = a'ab \in \Phi(a, b), \qquad b' \neq c.$$

Désignons alors par e l'élément commun à Φ_1 et $\Phi(b', c)$. Posons $f = eb'c \in \Sigma$. On peut écrire:

$$abcd = a'b'cd = a'e.eb'c.d = a'e.fd.$$

Lorsque $\iota(e, f, d)$, la démonstration est achevée. Sinon désignons par g l'intersection des faisceaux Φ_1 et $\Phi(f, d)$, et posons:

$$r = a'eg \in \Phi_1\,; \quad s = gfd \in \Phi(f, d).$$

On a alors:

$$abcd = a'e.fd = a'eg.gfd = rs. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Il convient de souligner que la démonstration de cette proposition ne fait pas intervenir l'axiome P III. Lorsqu'on fait usage de cet axiome, on peut affirmer l'existence dans Σ de plusieurs faisceaux de première classe. Plus précisément, on peut montrer que toute réflexion appartient à deux faisceaux de première classe, au moins. Prenons en effet un faisceau de première classe Φ_1 et une réflexion s n'appartenant pas à Φ_1. Choisissons un élément a dans Φ_1 et soit u un élément bissecteur de a et s. Le faisceau $u\Phi_1 u$ est de première classe. Comme il contient s, il est distinct de Φ_1. L'élément commun à Φ_1 et $u\Phi_1 u$ appartient à deux faisceaux de première classe distincts. En vertu de l'axiome de bissection, il en est de même de toute réflexion.

1.6. Il est facile de reconnaître les éléments involutifs propres de G. Comme G est de dimension 2, tout élément propre de G peut se mettre sous la forme ab, où a, $b \in \Sigma$. Pour que ab soit involutif, il faut que a et b commutent. En géométrie euclidienne plane, cela revient à exiger que les axes des réflexions a et b soient confondus ou perpendiculaires. Nous conviendrons donc d'appeler *perpendiculaires* deux réflexions distinctes qui commutent. La relation ainsi définie dans Σ est symétrique. De plus, elle est invariante pour les automorphismes intérieurs de G. En effet, soit a, b et s trois réflexions, a et b étant perpendiculaires; sas et sbs sont des réflexions distinctes et:

$$sas.sbs = sabs = sbas = sbs.sas\,.$$

Nous allons énoncer un théorème d'existence au sujet des éléments perpendiculaires de Σ, mais il convient auparavant d'établir un lemme.

Lemme. *Soit* G *un* RI-*groupe engendré par un ensemble distingué Σ de réflexions satisfaisant l'axiome de bissection. Pour que tous les éléments d'un même faisceau Φ commutent avec une même réflexion* s, *il faut et il suffit que* s *n'appartienne pas à Φ et que les faisceaux Φ et* sΦs *soient confondus.*

Montrons d'abord la nécessité de ces conditions. Prenons un faisceau Φ dont tous les éléments commutent avec une même réflexion s. Il est clair que les faisceaux Φ et $s\Phi s$ sont confondus. Soit a un élément de Φ distinct de s. Si s était contenu dans Φ, tout élément bissecteur de a et s appartiendrait à Φ sans toutefois commuter avec s. Donc s n'appartient pas à Φ.

Réciproquement, considérons un faisceau Φ et une réflexion s n'appartenant pas à Φ telle que les faisceaux Φ et $s\Phi s$ coïncident. Prenons dans Φ un élément quelconque x. Il résulte des hypothèses que $x' = sxs$ appartient aussi à Φ. Les réflexions x et x' sont confondues, car sinon s appartiendrait à $\Phi(x, x') = \Phi$. Par suite, x commute avec s. Comme s n'appartient pas à Φ, on peut même affirmer que s et x sont perpendiculaires. C.Q.F.D.

Nous dirons qu'un faisceau Φ est *entièrement perpendiculaire* à une réflexion s quand chaque élément de Φ est perpendiculaire à s. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que Φ ne contienne pas s mais en revanche qu'il contienne deux éléments distincts perpendiculaires à s, en vertu du lemme précédent.

Proposition 5. *Soit une réflexion* s *et un faisceau de première classe* Φ_1 *ne contenant pas* s *;* Φ_1 *contient au moins un élément perpendiculaire à* s *; s'il en contient plus d'un, il est entièrement perpendiculaire à* s.

Considérons le faisceau de première classe $s\Phi_1 s$. Lorsque Φ_1 et $s\Phi_1 s$ sont distincts, leur élément commun t commute avec s. Comme s n'appartient pas à Φ_1, s et t sont perpendiculaires.

Lorsque Φ_1 et $s\Phi_1 s$ sont confondus, Φ_1 est entièrement perpendiculaire à s, comme l'indique le lemme ci-dessus. Cela se produit dès que Φ_1 contient deux éléments distincts perpendiculaires à s. C.Q.F.D.

Il convient de remarquer que, quel que soit le faisceau de première classe Φ_1, on peut trouver une réflexion s non contenue dans Φ_1 et perpendiculaire à un seul élément de Φ_1. En effet, soit a un élément de Φ_1 et b une réflexion non contenue dans Φ_1; il suffit de prendre pour s un élément bissecteur de a et b.

Proposition 6. *Tout faisceau de première classe contient au moins quatre éléments distincts.*

Soit Φ_1 un faisceau de première classe, b un élément de Φ_1 et s une réflexion non contenue dans Φ_1 et non perpendiculaire à b. Soit a l'élément de Φ_1 perpendiculaire à s. La réflexion $b' = sbs$ est contenue dans $s\Phi_1 s$, mais elle n'appartient ni à $\Phi(a, b) = \Phi_1$ ni à $\Phi(a, s)$.

Considérons un élément bissecteur t de a et s; il est distinct de a et de s et il ne leur est pas perpendiculaire. Il s'ensuit que la réflexion $t' = sts$ est distincte de a, de s et de t. Les réflexions a, s, t et t' appartiennent à un même faisceau qui ne contient pas b'. Par suite les faisceaux $\Phi(b', a)$, $\Phi(b', s)$, $\Phi(b', t)$ et $\Phi(b', t')$ sont distincts. Comme b' n'appartient pas à Φ_1, les intersections de ces faisceaux avec Φ_1 fournissent quatre éléments distincts de Φ_1. C.Q.F.D.

COROLLAIRE. *Toute réflexion appartient à quatre faisceaux distincts au moins.*

On vient de voir, en effet, que c'est le cas de b'; c'est vrai par conséquent pour toute réflexion, en vertu de l'axiome P III.

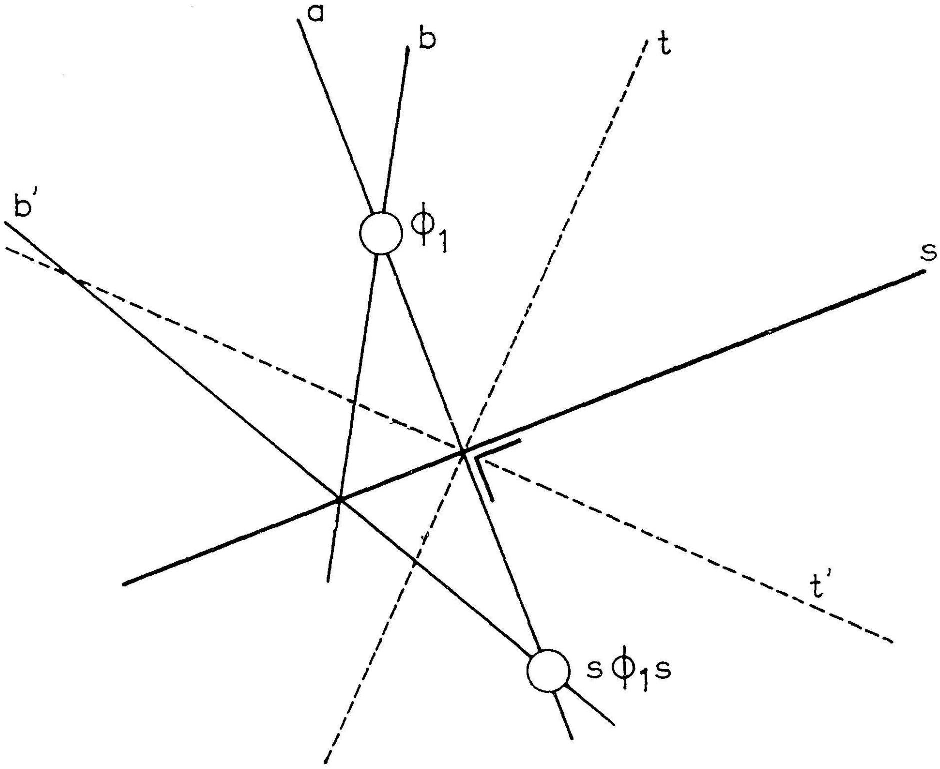

Fig. 1.

PROPOSITION 7. *Soit une réflexion* s *et un faisceau de première classe* Φ_1 *contenant* s. *Il existe dans* Φ_1 *un élément perpendiculaire à* s, *au moins.*

Nous savons que la réflexion s appartient au moins à quatre faisceaux; deux d'entre eux au moins, soit Φ_1 et Φ_1', sont de première classe. Il existe donc une réflexion a non perpendiculaire à s et n'appartenant à ni Φ_1 à ni Φ_1'. Soit u un élément bissecteur de a et s. Les faisceaux $u\Phi_1 u$ et $u\Phi_1' u$ contiennent a mais pas s. En vertu de la proposition 5, ces faisceaux contiennent chacun un élément perpendiculaire à s. Soit b et c ces éléments; ils sont distincts car a, qui n'est pas perpendiculaire à s, est le seul élément commun à $u\Phi_1 u$ et $u\Phi_1' u$. Le faisceau $\Phi(b, c)$, qui contient deux éléments distincts perpendiculaires à s, est entièrement perpendiculaire à s. Il est distinct de Φ_1.

Par suite la réflexion t commune à Φ_1 et $\Phi(b, c)$ répond aux conditions de l'énoncé. C.Q.F.D.

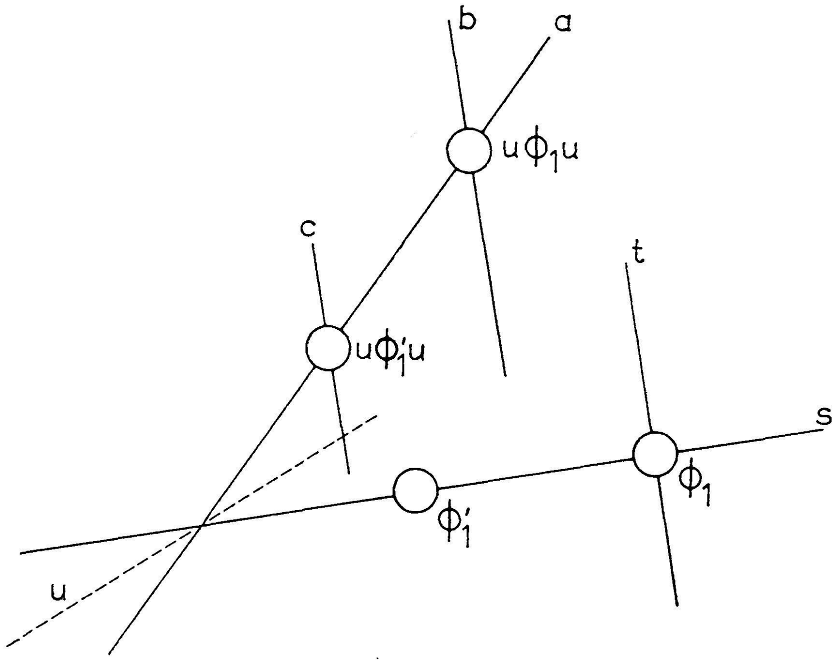

Fig. 2.

Corollaire. *A toute réflexion, on peut faire correspondre au moins deux réflexions qui la coupent perpendiculairement et qui déterminent avec elle des faisceaux distincts.*

Proposition 8. *Deux réflexions perpendiculaires se coupent.*

Soit a et s deux réflexions perpendiculaires. On peut trouver une réflexion b coupant s, perpendiculaire à s, et telle que $\Phi(s, a) \neq \Phi(s, b)$. Le faisceau $\Phi(a, b)$ est entièrement perpendiculaire à s. Prenons un élément bissecteur u de a et b. Il appartient à $\Phi(a, b)$; il est donc perpendiculaire à s. L'automorphisme intérieur de G associé à u envoie b sur a et laisse s fixe. Par conséquent $\Phi(a, s) = u\Phi(b, s)u$. Comme $\Phi(b, s)$ est de première classe, il en est de même de $\Phi(a, s)$. C.Q.F.D.

Corollaire. *Toute réflexion appartient à trois faisceaux de première classe, au moins.*

En effet, dans la démonstration précédente le faisceau $\Phi(a, b)$ contient u mais pas s. Comme les éléments a, b et u sont distincts, il en est de même des faisceaux $\Phi(s, a)$, $\Phi(s, b)$ et $\Phi(s, u)$. La proposition 8 affirme qu'ils sont de première classe.

Proposition 9. *Soit une réflexion* s *et un faisceau de première classe Φ_1 contenant* s; *Φ_1 ne contient qu'un seul élément perpendiculaire à* s.

D'après la proposition 7, tout faisceau de première classe contenant s possède au moins un élément perpendiculaire à s.

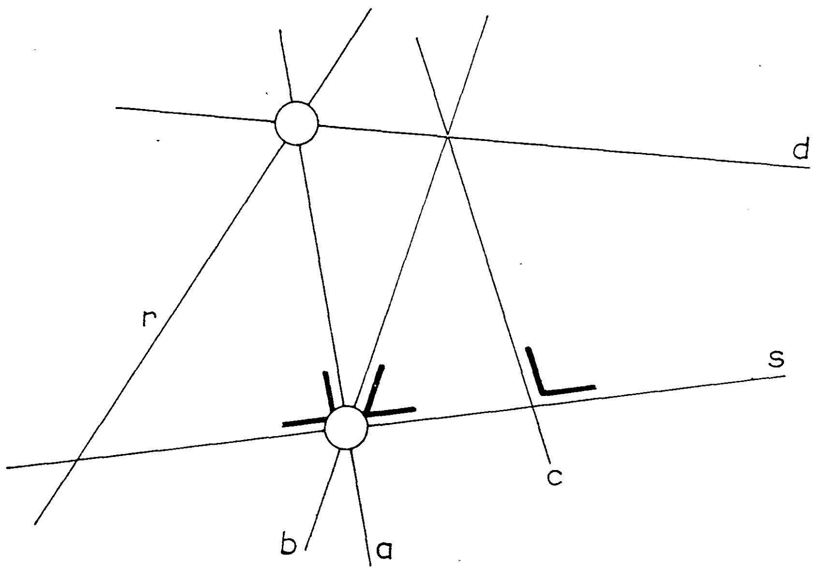

Fig. 3.

D'autre part, soit x et x' deux éléments perpendiculaires à s tels que $\Phi(s, x) \neq \Phi(s, x')$, et soit u un élément bissecteur de x et x'. Le faisceau $\Phi(x, x')$ étant entièrement perpendiculaire à s, u est perpendiculaire à s. L'automorphisme intérieur de G associé à u laisse s fixe et transforme l'un en l'autre les faisceaux $\Phi(s, x)$ et $\Phi(s, x')$. Il résulte immédiatement de là que si l'un des faisceaux de première classe contenant s ne possède qu'un seul élément perpendiculaire à s, il en est de même de tous les autres.

Soit r une réflexion distincte de s et non perpendiculaire à s. Il existe un faisceau de première classe contenant r mais pas s. Prenons dans ce faisceau l'élément a perpendiculaire à s. Admettons, par absurde, que le faisceau de première classe $\Phi(s, a)$ contienne un élément b distinct de a et perpendiculaire à s. Il existe une réflexion c perpendiculaire à s et n'appartenant pas à $\Phi(s, a)$. Le faisceau $\Phi(b, c)$, qui ne contient ni a, ni s, est entièrement perpendiculaire à s. En particulier, l'élément d commun à $\Phi(a, r)$ et $\Phi(b, c)$ est perpendiculaire à s. Le faisceau $\Phi(a, r)$ contient donc deux éléments distincts perpendiculaires à s, soit a et d, et un élément non perpendiculaire à s, soit r, ce qui est absurde. Il en résulte que $\Phi(s, a)$ ne contient qu'un seul élément perpendiculaire à s. Comme on l'a vu, cela implique qu'il en est de même pour tout faisceau de première classe Φ_1 contenant s. C.Q.F.D.

1.7.

PROPOSITION 10. *L'ensemble des éléments de Σ perpendiculaires à une même réflexion constitue un faisceau.*

En vertu de la proposition 7 et du corollaire de la proposition 8, il existe trois réflexions distinctes a, b et c perpendiculaires à une même réflexion s. Le faisceau $\Phi(a, b)$ est entièrement perpendiculaire à s. Il suffit donc de montrer que a, b et c sont incidentes. Considérons l'élément c' commun aux faisceaux distincts $\Phi(a, b)$ et $\Phi(c, s)$. Il est perpendiculaire à s comme tout élément de $\Phi(a, b)$. Il résulte alors des propositions 8 et 9 que c' est confondu avec c, donc que a, b et c sont trois réflexions incidentes. C.Q.F.D.

Convenons d'appeler *système polaire* de la réflexion s et de noter $\Pi(s)$ le faisceau formé des réflexions perpendiculaires à s. La réflexion s est une *base* de $\Pi(s)$. Tout élément de Φ est une base d'un système polaire bien déterminé. Cependant, il peut arriver que les systèmes polaires de deux réflexions distinctes coïncident.

Remarquons que, s'il existe des faisceaux de seconde classe dans Σ, toute réflexion s appartient à l'un d'eux, au moins. En effet, soit Φ'_2 un faisceau de seconde classe contenant une réflexion a distincte de s. Si l'on désigne par u un élément bissecteur de a et s, il est clair que le faisceau de seconde classe $\Phi_2 = u\Phi'_2u$ contient s. Nous pouvons en déduire, en particulier que le système polaire $\Pi(s)$ est de seconde classe. Car, sans cela, l'élément commun à $\Pi(s)$ et Φ_2 serait une réflexion perpendiculaire à s mais ne coupant pas s, contrairement à la proposition 8. Ainsi, quand Σ contient des faisceaux de seconde classe, tout système polaire est de seconde classe. Signalons toutefois qu'il peut éventuellement se trouver dans Σ des faisceaux de seconde classe qui ne sont pas des systèmes polaires.

Lorsque deux réflexions distinctes s et t ont le même système polaire, elles ne se coupent pas. En effet, si a est un élément quelconque de $\Pi(s)$, le système polaire de a est $\Phi(s, t)$ en vertu de la proposition 10. L'intersection de $\Pi(a)$ et $\Pi(s)$ est vide, sinon il existerait dans $\Pi(a) = \Phi(s, t)$ un élément perpendiculaire *à* s et t à la fois, contrairement aux propositions 8 et 9. Par suite, $\Phi(s, t)$ est de seconde classe. On peut déduire de là que, lorsqu'il n'existe pas de faisceau de seconde classe dans Σ, la correspondance entre les réflexions s et les systèmes polaires $\Pi(s)$ est biunivoque.

1.8. Nous sommes maintenant en mesure de donner plus de détails au sujet des éléments bissecteurs de deux réflexions. Commençons par établir un lemme.

LEMME. *Soit* u, v *et* x *trois réflexions incidentes. La condition nécessaire et suffisante pour que* uvx *soit perpendiculaire à* x *est que* u *et* v *soient elles-mêmes perpendiculaires.*

Nous avons vu que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un élément de dimension 1 dans G soit involutif est que, lorsqu'il est mis sous la forme ab, où $a, b \in \Sigma$, les réflexions a et b soient perpendiculaires. Supposons donc que u et v sont perpendiculaires. Alors uv et $xuvx$ sont des éléments involutifs de dimension 1. Par hypothèse, uvx est une réflexion; nous pouvons affirmer qu'elle est perpendiculaire à x. Réciproquement, si x et uvx sont deux réflexions perpendiculaires, $uvx.x = uv$ est un élément involutif de dimension 1 dans G; il en résulte que u et v sont perpendiculaires. C.Q.F.D.

PROPOSITION 11. *Deux réflexions non sécantes ont exactement un élément bissecteur. Deux réflexions sécantes ont exactement deux éléments bissecteurs, qui sont perpendiculaires.*

Soit a et b deux réflexions distinctes. Nous savons qu'elles ont au moins un élément bissecteur u. Admettons qu'il existe un élément bissecteur v de a et b distinct de u. Nous pouvons observer que u et v appartiennent tous deux au faisceau $\Phi(a, b)$ et que, par suite, uva est une réflexion. Comme:

$$a = uvavu = uva.a.avu = uva.a.uva\,,$$

uva est une réflexion perpendiculaire à a. Donc u et v sont perpendiculaires en vertu du lemme précédent.

Nous déduisons de là que, lorsque a et b ne se coupent pas, elles ne possèdent qu'un seul élément bissecteur. En revanche, quand elles se coupent, elles ne sauraient en avoir plus de deux. Il nous faut montrer qu'elles en ont effectivement deux dans ce cas. Prenons l'élément u' perpendiculaire à u dans le faisceau de première classe $\Phi(a, b)$. Comme $uu'a$ est une réflexion, on peut écrire:

$$uu'.a.u'u = uu'a.u'u = au'u.u'u = a\,,$$

et, par suite:

$$b = uau = u'au'\,.$$

Donc u' est aussi élément bissecteur de a et b. C.Q.F.D.

Proposition 12. *Lorsqu'il existe des faisceaux de seconde classe dans Σ, le centre de* G *se réduit à l'élément neutre* I. *Lorsque Σ ne contient que des faisceaux de première classe, le centre de* G *est d'ordre* 2.

Nous savons que Σ ne contient pas d'élément du centre de G. Recherchons alors les éléments centraux propres de G. Soit ab l'un d'eux, où a, $b \in \Sigma$. Comme ab commute avec a, $(ab)^2 = \mathrm{I}$. Par suite, a et b sont confondus ou perpendiculaires. Si a et b étaient perpendiculaires, on pourrait trouver une réflexion s non incidente avec a et b, perpendiculaire à a mais pas à b. On pourrait alors écrire:

$$ba.s.ab = bsb \neq s\,,$$

ce qui serait absurde. Il s'ensuit que a et b sont confondus et que I est le seul élément central propre de G.

Le carré d'un élément central de dimension 2 est un élément central propre. Ce qui précède montre qu'un tel élément est involutif. Nous sommes donc conduits à la recherche des éléments involutifs de dimension 2 dans G. Soit A l'un d'eux et soit x une réflexion arbitraire. On peut poser: $A = xyz$, où x, y et z sont trois réflexions non incidentes. Comme A est involutif, on a:

$$xyx = zy.xzx\,,$$

ce qui montre que les réflexions xyx et xzx appartiennent au faisceau $\Phi(y, z)$. En vertu du lemme de la proposition 5, $\Phi(y, z)$ est entièrement perpendiculaire à x. Par suite:

$$(yz)^2 = xyz.xyz = A^2 = I\,.$$

Donc y et z sont perpendiculaires et le système polaire $\Phi(y, z)$ de x est de première classe. Prenons un élément quelconque y' dans $\Phi(y, z)$ et posons $z' = y'yz$. D'après ce qui précéde, $A = xy'z'$ et z' est la réflexion perpendiculaire à y' dans $\Phi(y, z)$. D'autre part, A commute avec x; et comme x est arbitrairement choisi dans Σ, A est un élément central de G.

En résumé G ne possède d'élément central distinct de I que lorsque les systèmes polaires sont de première classe, autrement dit quand il n'existe pas de faisceaux de seconde classe dans Σ. Dans ce cas, G ne contient qu'un seul élément de cette espèce. C.Q.F.D.

Corollaire. *Lorsqu'il contient des faisceaux de seconde classe, Σ constitue l'ensemble de tous les éléments involutifs impropres de* G. *Dans le cas contraire, il existe dans* G *un élément involutif impropre n'appartenant pas à Σ, et un seul. Cet élément engendre le centre de* G. *Il peut être mis sous la forme* abc, *où* a, b *et* c *sont trois réflexions deux à deux perpendiculaires.*

2. L'axiome d'Euclide

2.1 Les axiomes précédents ne permettent aucune conclusion quant à l'existence de faisceaux de seconde classe dans Σ, particulièrement de ceux d'entre eux qui ne sont pas des systèmes polaires, et que nous qualifierons de *singuliers*. Remarquons à ce propos que si l'on admet l'existence de faisceaux singuliers dans Σ, toute réflexion appartient à deux d'entre eux, au moins. En effet, prenons un faisceau singulier Φ_s, un élément a dans Φ_s et une réflexion quelconque t. Si u est un élément bissecteur de a et t, $\Phi_s' = u\Phi_s u$ est un faisceau singulier contenant t. Soit alors m une réflexion perpendiculaire à t; elle n'est pas dans Φ_s' en vertu de la proposition 8. Le faisceau $\Phi_s'' = m\Phi_s' m$ est singulier et il contient t. De plus il est distinct de Φ_s', car sans cela Φ_s' serait le système polaire de m (lemme prop. 5), contrairement à l'hypothèse faite sur Φ_s.

Parmi les hypothèses les plus simples que l'on puisse poser au sujet de l'existence de faisceaux singuliers dans Σ, il convient de signaler les trois suivantes:

a) il n'existe pas de faisceau de seconde classe dans Σ

b) toute réflexion appartient à un faisceau de seconde classe et un seul

c) toute réflexion appartient à deux faisceaux singuliers exactement.

L'hypothèse *a*) est vérifiée dans le cas de la géométrie elliptique plane continue. Le groupe fondamental G_1 de cette géométrie est engendré par des éléments involutifs, mais ce n'est pas un R-groupe. En revanche, le R-groupe G naturellement associé à G_1 satisfait les quatre premiers axiomes ainsi que l'hypothèse *a*). Il est isomorphe au R-groupe des isométries de l'espace euclidien R^3 laissant fixe un point de cet espace. Nous dirons d'un groupe vérifiant les quatre premiers axiomes et l'hypothèse *a*) qu'il est de *type elliptique plan.* L'hypothèse *c*) caractérise les géométries de *type hyperbolique plan.* Nous ne nous attarderons pas aux hypothèses *a*) et *c*); nous allons admettre l'hypothèse *b*) et montrer que, jointe aux quatre premiers axiomes, elle fixe assez étroitement la structure algébrique de G.

Axiome P V. (Axiome d'Euclide). *Toute réflexion appartient à un faisceau de seconde classe, et à un seul.*

On peut aussi énoncer cet axiome en disant que Σ contient des faisceaux de seconde classe et que deux faisceaux de seconde classe distincts sont disjoints: il résulte de l'axiome de bissection que les faisceaux de seconde classe de Σ déterminent une partition de Σ. Nous qualifierons de *parallèles* deux réflexions distinctes ou non appartenant à un même faisceau de seconde classe. Le parallélisme est une relation d'équivalence dans Σ. En vertu de la proposition 3, cette relation est compatible avec les transformations induites dans Σ par les automorphismes intérieurs de G.

Il découle immédiatement de l'axiome P V que tout faisceau de seconde classe est un système polaire, et réciproquement. De plus, tout faisceau de seconde classe est déterminé par un seul de ses éléments et nous désignerons parfois par $\Phi_2(s)$ le faisceau de seconde classe contenant la réflexion s.

Les systèmes polaires attachés à deux réflexions parallèles a et b sont confondus. En effet, a et b appartiennent à un même système polaire $\Pi(s)$, où $s \in \Sigma$. La réflexion s appartient aux systèmes polaires $\Pi(a)$ et $\Pi(b)$ qui, n'étant pas disjoints, sont confondus. Il s'ensuit que l'ensemble des bases du système polaire $\Pi(s)$ est $\Phi_2(s)$.

2.2. Considérons le R-groupe $g(\Phi_1)$ engendré par les éléments d'un faisceau de première classe Φ_1. Il résulte de la proposition 2 que l'ensemble des éléments propres de $g(\Phi_1)$ constitue un sous-groupe abélien d'indice 2 dans $g(\Phi_1)$. Nous désignerons ce groupe par $\rho(\Phi_1)$ et nous l'appellerons *groupe des rotations autour de* Φ_1. De même, à toute réflexion s on peut associer le R-groupe $g(\Pi(s))$ engendré par les éléments du système polaire $\Pi(s)$. Les éléments propres de $g(\Pi(s))$ forment un sous-groupe abélien d'indice 2 dans $g(\Pi(s))$. Nous noterons ce groupe $\tau(s)$ et nous l'appellerons *groupe des translations de direction s.* L'élément neutre I de G est à la fois une rotation et une translation que nous qualifierons de *banales*. Nous pouvons affirmer qu'il n'existe pas de translation involutive non banale. En revanche, le groupe des rotations autour du faisceau de première classe Φ_1 contient une rotation involutive non banale (prop. 7) et une seule (prop. 9 et lemme prop. 11). Nous appellerons cette rotation le *demi-tour* autour de Φ_1. On voit ainsi apparaître une correspondance biunivoque entre l'ensemble des demi-tours et celui des faisceaux de première classe.

Proposition 13. *Le produit de deux demi-tours est une translation. Réciproquement, il est possible de considérer toute translation comme le produit de deux demi-tours dont l'un peut être librement choisi à l'avance.*

Soit D et D' les demi-tours relatifs à deux faisceaux de première classe Φ_1 et Φ'_1. Quand $D = D'$, le produit DD' est la translation banale I. Quand $D \neq D'$, désignons par s la réflexion commune à Φ_1 et Φ_1'. Prenons les éléments u et v perpendiculaires à s dans Φ_1 et Φ_1' respectivement. On peut écrire:

$$DD' = us.sv = uv\,,$$

qui est une translation de direction s.

Réciproquement, soit T une translation de direction a, avec $a \in \Sigma$, et soit un demi-tour D autour d'un faisceau de première classe Φ_1. Soit b et c les éléments de Φ_1 respectivement parallèle et perpendiculaire à a. Il existe dans le système polaire $\Pi(b)$ deux éléments d' et d'' tels que:

$$T = cd' = d''c\,.$$

Il est clair que D égale bc et cb. Les éléments bd' et $d''b$ sont deux demi-tours D' et D'', respectivement. De plus:

$$T = cb.bd' = DD'\,, \qquad T = d''b.bc = D''D\,. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Corollaire. *Le produit de trois demi-tours est un demi-tour.*

Soulignons le fait que si D et D' sont les demi-tours opérant autour des faisceaux de première classe distincts Φ_1 et Φ_1', DD' est une translation dont la direction est donnée par l'élément s commun à Φ_1 et Φ_1', ou par toute autre réflexion parallèle à s.

Proposition 14. *Dans G, l'ensemble des translations constitue un sous-groupe distingué abélien $\mathcal{T}$.*

Soit T_1 et T_2 deux translations. Donnons-nous un demi-tour D. En vertu de la proposition 13, il existe deux demi-tours D_1 et D_2 tels que:

$$T_1 = D_1 D\,, \qquad T_2 = D_2 D\,.$$

D'où:

$$T_1 T_2^{-1} = (D_1 D)(D_2 D)^{-1} = D_1 D.DD_2 = D_1 D_2 ,$$

ce qui montre que l'ensemble $\mathcal{T}$ des translations est un sous-groupe de G. De plus, comme:

$$DT_1 D = D(D_1 D)D = DD_1 = T_1^{-1} ,$$

l'automorphisme intérieur de G associé à un demi-tour D envoie toute translation sur son inverse. Il en découle que T est abélien, car:

$$T_2 T_1 T_2^{-1} = D_2 D(D_1 D)DD_2 = D_2 DD_1 D_2 = D_1 D = T_1 .$$

Enfin le fait que $\mathcal{T}$ est distingué dans G résulte de la conservation du parallélisme par les automorphismes intérieurs de G.

C.Q.F.D.

Proposition 15. *Le groupe $\mathcal{T}$ des translations est isomorphe au produit* τ(a) $\times$ τ(a), *où* a *est une réflexion quelconque.*

Quelles que soient les réflexions a et b, les groupes $\tau(a)$ et $\tau(b)$ sont isomorphes. En effet, si a et b sont distinctes, prenons un élément bissecteur u de a et b; l'application $T \rightarrow uTu$ définit un isomorphisme entre $\tau(a)$ et $\tau(b)$. Dès lors, il nous suffit d'établir que $\mathcal{T}$ est isomorphe au produit direct $\tau(r) \times \tau(s)$, où r et s sont deux réflexions sécantes.

Considérons l'ensemble $\tau(r).\tau(s)$ des produits de la forme $T_r T_s$, où $T_r \in \tau(r)$ et $T_s \in \tau(s)$. Comme $\mathcal{T}$ est abélien, $\tau(r).\tau(s)$ est un sous-groupe de $\mathcal{T}$. Les réflexions r et s étant sécantes, l'intersection de $\tau(r)$ et $\tau(s)$ se réduit à l'élément neutre et $\tau(r).\tau(s)$ est isomorphe au produit direct $\tau(r) \times \tau(s)$.

Il reste à montrer que $\mathcal{T} = \tau(r).\tau(s)$. Prenons une translation quelconque; elle peut se mettre sous la forme DD'', où D est le demi-tour autour de $\Phi(r, s)$ et D'' est le demi-tour autour d'un faisceau de première classe convenable Φ_1. Prenons dans Φ_1 l'élément s' parallèle à s et soit D' le demi-tour autour de $\Phi(r, s')$. On peut écrire: $DD'' = DD'.D'D''$, où $DD' \in \tau(r)$ et $D'D'' \in \tau(s)$.

C.Q.F.D.

Etant données deux réflexions sécantes r et s, nous appellerons *isomorphisme canonique* de $\mathcal{T}$ sur $\tau(r) \times \tau(s)$ l'application $T \to (T_r; T_s)$ dans laquelle $T = T_r T_s$, $T_r \in \tau(r)$ et $T_s \in \tau(s)$.

2.3. On dit qu'un groupe Γ est le *produit semi-direct* de deux sous-groupes Γ_1 et Γ_2 pris dans cet ordre lorsque tout élément X de Γ possède exactement deux décompositions

$$X = X_1 X_2 = X_2 X'_1 ,$$

où X_1 et X'_1 sont dans Γ_1 et X_2 est dans Γ_2. Cela entraîne, en particulier, que Γ_1 est distingué dans Γ et que Γ/Γ_1 est isomorphe à Γ_2. La définition précédente nous permet d'énoncer un théorème important sur la structure algébrique de G.

THEORÈME 1. *Le sous-groupe* G_0 *des éléments propres de* G *est le produit semi-direct du groupe* $\mathcal{T}$ *des translations et du groupe* $\rho(\Phi_1)$ *des rotations autour d'un faisceau de première classe* Φ_1.

Prenons un faisceau de première classe Φ_1 et un élément quelconque A dans G_0. Si A est une translation non banale, désignons par a l'élément de Φ_1 perpendiculaire à la direction de A. Si A est une rotation autour d'un faisceau de première classe Φ'_1, désignons par a un élément commun à Φ_1 et Φ'_1. Dans tous les cas, il existe une réflexion b telle que $A = ab$. Soit b' l'élément de Φ_1 parallèle à b. On peut écrire:

$$A = ab = ab'.b'b = (a.bb'.a)ab' .$$

Il est clair que $T_1 = bb'$ et $T_2 = abb'a$ sont des translations et que $R = ab'$ est une rotation autour de Φ_1. D'où:

$$A = RT_1 = T_2 R .$$

Ces deux décompositions sont univoquement déterminées par le choix de A et de Φ_1, car l'intersection de $\mathcal{T}$ et de $\rho(\Phi_1)$ se réduit à l'élément neutre I. C.Q.F.D.

COROLLAIRE. *Tout élément impropre de* G *peut être considéré comme le produit d'une réflexion et d'une translation.*

En effet, soit X un élément impropre de G, Φ_1 un faisceau de première classe et a un élément de Φ_1. L'élément aX est propre.

On peut donc le mettre sous la forme RT, où R est une rotation autour de Φ_1 et T une translation. On peut poser $R = ab$ où b est dans Φ_1. D'où $X = bT$. On peut encore écrire $X = T'b$, où T' est la translation bTb.

La réflexion b est entièrement déterminée par le choix de X et de Φ_1, comme on le voit sans peine. Signalons enfin que, quel que soit l'élément impropre X, on peut trouver une réflexion s et une translation U de direction s telles que $X = sU = Us$.

2.4. Nous allons examiner quelques faits relatifs aux automorphismes intérieurs de G. Pour simplifier, nous appellerons *transformation* par l'élément A de G l'automorphisme intérieur de G défini par $X \to A^{-1}XA$.

PROPOSITION 16. *Pour que la transformation par un élément* A *de* G *envoie toute réflexion sur une réflexion parallèle, il faut et il suffit que* A *soit un demi-tour ou une translation.*

Soit D le demi-tour autour d'un faisceau de première classe Φ_1. Prenons une réflexion quelconque s. Soit a et b les éléments de Φ_1 respectivement parallèle et perpendiculaire à s. Il est clair que $D = ab$. Par suite, $DaD = a$. Donc la transformation par D laisse a fixe; comme elle conserve le parallélisme, elle envoie s sur une réflexion parallèle à s. Il résulte de la proposition 13 qu'il en est de même pour toute translation.

Passons à la réciproque. Considérons d'abord deux réflexions sécantes non perpendiculaires a et b. L'élément aba coupe b. Par suite, la transformation par une réflexion n'envoie pas chaque élément de Σ sur un élément parallèle. Examinons ensuite le cas d'une rotation R autour d'un faisceau de première classe Φ_1. Il existe dans Φ_1 deux éléments c et d tels que $R = cd$. L'élément

$$c' = R^{-1}cR = dcd\,,$$

appartient à Φ_1. Pour que c et c' soient parallèles — c'est-à-dire confondus, dans ce cas— il faut que c et d soient confondus ou perpendiculaires; R est alors la rotation banale ou le demi-tour autour de Φ_1. Prenons enfin un élément impropre X de G. En vertu du corollaire du théorème 1, X peut se mettre sous la forme Ts où s est une réflexion et T une translation. La transformation par X est donc le produit de la transformation par T qui envoie toute réflexion sur une réflexion parallèle, et de la transformation par la réflexion s qui ne possède pas cette propriété. Il s'ensuit que la transformation par X ne la possède pas non plus. C.Q.F.D.

Le *groupe de stabilité* d'une partie E de G est le sous-groupe de G formé des éléments X tels que $X^{-1}EX = E$.

PROPOSITION 17. *Le groupe de stabilité d'un faisceau de première classe Φ_1 est le sous-groupe* $\mathrm{g}(\Phi_1)$ *de* G *engendré par les éléments de Φ_1.*

Comme Φ_1 n'est pas un système polaire, les seules réflexions appartenant au groupe de stabilité de Φ_1 sont les éléments de Φ_1.

Recherchons maintenant les éléments propres du groupe étudié. Ils peuvent se mettre sous la forme rs, où r, $s \in \Sigma$. Il résulte de ce qui précède que si r est dans Φ_1, il en est de même de s. Plaçons-nous dans le cas où r n'appartient pas à Φ_1. Il existe un faisceau Φ contenant r et s. Soit v la seule réflexion appartenant à la fois à Φ et à Φ_1. On peut poser $rs = uv$, où $u = rsv \in \Phi$. Il est clair que u appartient au groupe de stabilité de Φ_1. Par conséquent u est dans Φ_1, et $u = v$. Donc rs est l'élément neutre I de G.

Il reste à considérer les éléments du groupe de stabilité de Φ_1 qui sont de dimension 2 dans G. Un tel élément peut toujours se mettre sous la forme axy, où a est arbitrairement choisi dans Φ_1 et où x et y sont des réflexions distinctes convenables. Il est clair que xy appartient au groupe de stabilité de Φ_1. Il résulte alors de ce qui précède que x et y sont dans Φ_1 et qu'il n'existe pas d'élément de dimension 2 dans le groupe étudié.

En résumé, le groupe de stabilité de Φ_1 est le R-groupe de dimension 1 engendré par Φ_1. C.Q.F.D.

COROLLAIRE 1. *Le groupe* G *est le produit semi-direct du groupe des translations et du groupe de stabilité d'un faisceau de première classe.*

Cela découle immédiatement de ce qui précède et des considérations accompagnant le corollaire du théorème 1.

Corollaire 2. *Lorsqu'une réflexion commute avec un demi-tour* D *elle appartient au faisceau de première classe associé à* D, *et réciproquement.*

En effet, comme le demi-tour D détermine univoquement le faisceau Φ_1 autour duquel il opère, toute réflexion commutant avec D appartient au groupe de stabilité de Φ_1, et réciproquement.

Corollaire 3. *Soit trois faisceaux de première classe sans élément commun. L'ensemble des éléments de* G *qui déterminent une transformation laissant invariant chacun de ces faisceaux se réduit à* $\{I\}$.

En effet, soit Φ_1 et Φ_1' deux de ces faisceaux. Ils n'ont en commun qu'une seule réflexion a. Tout élément propre du groupe de stabilité de Φ_1 peut se mettre sous la forme ab, où $b \in \Phi_1$. Cet élément ab ne peut appartenir au groupe de stabilité de Φ_1' que si $b = a$. Soit Φ''_1 le troisième faisceau considéré. Il ne contient pas a. L'intersection des groupes de stabilité des faisceaux Φ_1, Φ_1' et Φ_1'' se réduit donc à $\{I\}$.

Deux éléments A et B de G sont dits *congrus*, ce que l'on note $A \sim B$, quand il existe un élément propre X dans G tel que la transformation par X envoie A sur B. On définit ainsi une relation d'équivalence dans G. L'ensemble Σ consitue une classe d'équivalence vis-à-vis de cette relation. Les éléments de G congrus à une rotation sont des rotations; les éléments congrus à une translation sont des translations. Il résulte immédiatement de la définition que $AB \sim BA$ dès que l'un au moins des éléments A et B est propre.

Soit a, b et c trois réflexions quelconques. On peut écrire $ab \sim c(ba)c$, car $cbac = ca(ab)ac$. Donnons-nous une rotation R et un faisceau de première classe Φ_1. Le groupe $\rho(\Phi_1)$ des rotations autour de Φ_1 contient une rotation R' congrue à R. C'est évident quand R est banale; ça l'est aussi quand R est dans $\rho(\Phi_1)$. Sinon soit Φ le faisceau de première classe autour duquel opère R, avec $\Phi \neq \Phi_1$, et soit s l'élément commun à Φ et Φ_1. Considérons les réflexions a et b perpendiculaires à s dans Φ et Φ_1 respectivement, et soit m l'élément bissecteur de a et b. Le demi-tour sm transforme a en b et s en lui-même. Il transforme donc Φ en Φ_1 et R en une rotation congrue R_1 opérant autour de Φ_1. Nous verrons que R_1 est entièrement déterminée par R et Φ_1.

Proposition 18. *La condition nécessaire et suffisante pour que deux rotations* R_1 *et* R_2 *soient congrues est qu'il existe une translation* T *telle que* $\mathrm{R}_2 = \mathrm{TR}_1$.

Soit R_1 et R_2 deux rotations congrues. Quand l'une d'elles est banale, il en est de même de l'autre et la proposition est vraie dans ce cas. Dès maintenant, plaçons-nous dans le cas où R_1 et R_2 ne sont pas banales. Par hypothèse, il existe dans G_0 un élément A tel que:

$$R_2 = A^{-1} R_1 A .$$

Désignons par Φ le faisceau de première classe autour duquel opère R_1. En vertu du théorème 1, il existe une rotation R autour de Φ et une translation T_1 telles que $A = RT_1$. D'où:

$$R_2 = T^{-1} R^{-1} R_1 R T_1 = T^{-1} R_1 T_1 ,$$

car le groupe des rotations autour de Φ est abélien. On peut alors trouver une translation T_2 telle que $R_1 T_1 = T_2 R_1$. En introduisant la translation $T = T_1^{-1} T_2$, on obtient $R_2 = TR_1$.

Réciproquement, soit R_1 une rotation non banale autour d'un faisceau de première classe Φ et soit une translation T que l'on peut aussi supposer non banale, sans restriction. Soit a l'élément de Φ perpendiculaire à la direction de T. Il existe dans Σ un élément b parallèle à a et dans Φ un élément c tels que $T = ba$ et $R_1 = ac$. Considérons alors la rotation $R_2 = TR_1 = bc$. Nous devons montrer que R_1 et R_2 sont congrues. Comme R_1 n'est pas banale, b et c se coupent. Prenons les éléments r et s perpendiculaires à c dans Φ et $\Phi(b, c)$ respectivement. La translation T n'étant pas banale, r et s sont distincts; soit u leur élément bissecteur. Il est clair que $u\Phi u = \Phi(b, c)$, car u est perpendiculaire à c. Par suite, la transformation par le demi-tour $D = uc$ envoie tout élément de Φ sur un élément parallèle de $\Phi(b, c)$, et en particulier a sur b et c sur lui-même. Il en découle que:

$$DR_1 D = DacD = DaD.DcD = bc = R_2 . \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Corollaire 1. *Quels que soient les faisceaux de première classe* Φ *et* Φ', *il existe au moins une réflexion* u *telle que* $\Phi' = \mathrm{u}\Phi\mathrm{u}$.

Corollaire 2. *Tout élément congru à une rotation* R *peut être obtenu en transformant* R *par une translation convenable.*

Corollaire 3. *La condition nécessaire et suffisante pour que deux rotations* R_1 *et* R_2 *soient congrues est qu'il existe une translation* T′ *telle que* $\mathrm{R}_2 = \mathrm{R}_1\mathrm{T}'$.

Cela résulte de la proposition 18 et du fait que deux éléments de G sont congrus en même temps que leurs inverses.

Corollaire 4. *Quels que soient la rotation* R *et le faisceau de première classe* Φ, *il existe une rotation congrue à* R *opérant autour de* Φ, *et une seule.*

C'est une conséquence de la proposition 18 et du théorème 1. En particulier, on peut affirmer que deux rotations congrues opérant autour d'un même faisceau de première classe sont confondues.

Proposition 19. *Soit* a, a′, b *et* b′ *quatre réflexions telles que* a *coupe* b *et que* a *et* a′ *soient parallèles. Si* b *et* b′ *sont parallèles,* ab *et* a′b′ *sont congrus. Réciproquement, si* ab *et* a′b′ *sont congrus,* b *et b′ sont parallèles.*

Prenons d'abord le cas où a et b sont deux réflexions sécantes et où a′ et b' sont deux réflexions respectivement parallèles à a et b. Les éléments ab, $a'b$ et $a'b'$ sont des rotations, tandis que aa' et bb' sont des translations. En vertu de la proposition 18, ab est congru à $a'b$, car $ab = aa'.a'b$. En vertu du corollaire 3 de la proposition 18, $a'b$ est congru à $a'b'$, car $a'b = a'b'.b'b$. Par suite $ab \sim a'b'$.

Réciproquement, considérons quatre réflexions a, b, a' et b' telles que a coupe b, que a et a' soient parallèles et que $ab \sim a'b'$. Les rotations ab et $a'b'$ ne sont pas banales. Prenons dans $\Phi(a', b')$ l'élément b'' parallèle à b. Il résulte de la première partie de la démonstration que ab et $a'b''$ sont congrus. Mais en vertu du corollaire 4 de la proposition 18, $a'b' = a'b''$. Par conséquent b'' est confondu avec b', et b' est parallèle à b. C.Q.F.D.

Proposition 20. *Soit* A, B *et* C *trois éléments propres de* G. *Si* A *et* B *sont congrus et si* AC *est une rotation non banale,* AC *et* BC *sont congrus.*

Il résulte des hypothèses que lorsque A est une translation, B en est une également et que C est une rotation non banale.

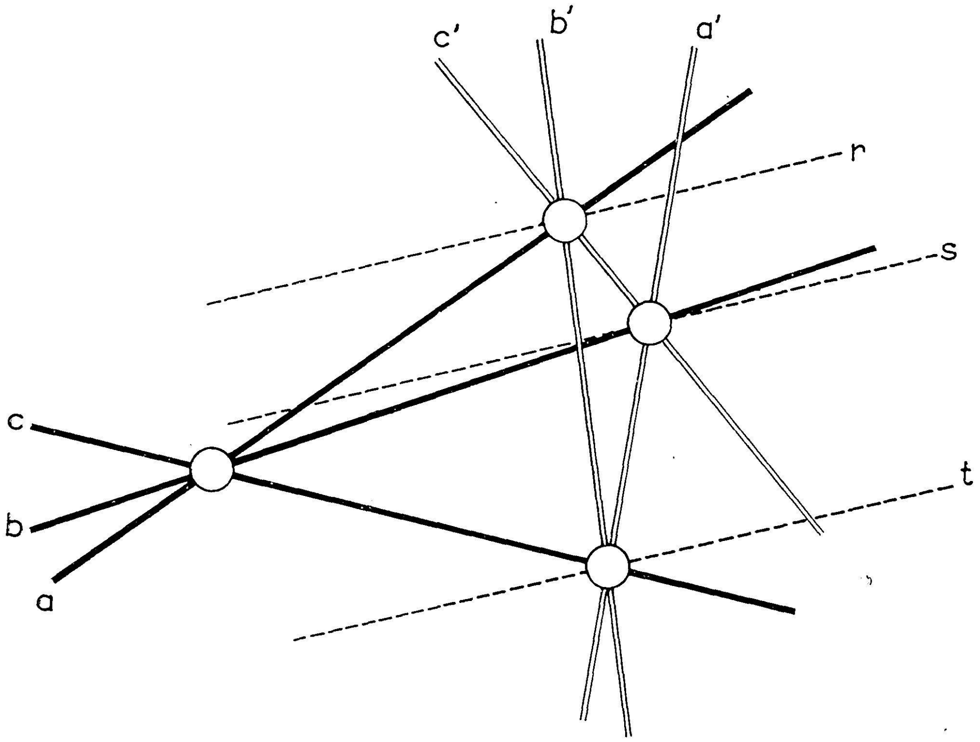

Fig. 4.

Dans ce cas, la conclusion découle immédiatement de la proposition 18. Plaçons-nous donc dans le cas où A est une rotation non banale autour d'un faisceau de première classe Φ. En vertu du théorème 1 et de la proposition 18, il existe trois translations T, T' et T'' ainsi qu'une rotation R autour de Φ telles que:

$$B = TA\,; \quad C = T'R\,; \quad AC = AT'R = T''AR\,;$$
$$BC = TAT'R = TT''AR\,.$$

Il résulte du fait que AC n'est pas une rotation banale qu'il en est de même de AR et, par suite, de BC. En vertu de la proposition 18, AC et BC sont congrues à AR, donc congrues entre elles. C.Q.F.D.

2.5. Il nous faut encore établir deux propositions dont les conséquences algébriques se révèlent importantes. La première a trait à une propriété élémentaire des angles du quadrilatère inscriptible. La deuxième est connue sous le nom de « théorème de Pappus ».

Considérons quatre faisceaux de première classe tels que trois quelconques d'entre eux n'aient pas d'élément commun. Les intersections de ces faisceaux pris par paires déterminent six réflexions distinctes qui sont les *côtés* d'un *quadrangle complet.* Désignons par a, b et c les trois côtés appartenant à l'un des quatre faisceaux. Soit a' l'élément commun aux deux faisceaux ne contenant pas a. Nous dirons que a et a' sont *opposés.* Introduisons de même les côtés b' et c' respectivement opposés à b et c. Nous désignerons le quadrangle complet considéré par $(a, a'; b, b'; c, c')$.

Proposition 21. *Dans un quadrangle complet donné, on considère toutes les congruences de la forme* ab $\sim$ b'a' *où* a, b, a' *et* b' *sont quatre côtés distincts du quadrangle complet,* a' *et* b' *étant respectivement opposés à* a *et* b. *La validité de l'une de ces congruences entraîne celle de toutes les autres.*

Soit a, b et c trois côtés incidents du quadrangle complet et soit a', b' et c' les côtés respectivement opposés. On peut écrire les incidences suivantes: $\iota(a, b, c)$, $\iota(b', a, c')$, $\iota(c', b, a')$ et $\iota(a', c, b')$. Introduisons les réflexions:

$$r = b'ac' \qquad s = c'ba' \qquad t = a'cb'$$

Elles sont incidentes, car:

$$rst = b'.abc.b' .$$

Remarquons que t coupe b' car sinon a et c' seraient confondus, ce qui est impossible dans un quadrangle complet. Comme a, b et a' ne sont pas incidents, t est distinct de rst.

Admettons maintenant que ab et $b'a'$ soient congrus. Alors:

$$b'.rst.b'c = ab \sim b'a' . \tag{1}$$

Comme $b'a'.cb' = b't$ est une rotation non banale, la proposition 20 permet de déduire de (1) que $b'rst$ est congru à $b't$. Il découle alors de la proposition 19 que rst est parallèle à t. Puisque rst et t sont distincts, r, s et t sont parallèles. On tire de là:

$$ac' = ar.rc' = a.rb'.a \sim b'r \sim b't = b'.a'c.b' \sim ca' .$$

On peut établir de la sorte toutes les congruences annoncées.

C.Q.F.D.

On remarque que la démonstration précédente revient essentiellement à établir un fait bien connu concernant l'image du cercle circonscrit au triangle de base dans une transformation isogonale.

Soit r et s deux réflexions distinctes. Soit un cycle de six faisceaux de première classe distincts, différents de $\Phi(r, s)$, numérotés de 1 à 6, et tels que les faisceaux portant un numéro impair contiennent r, les autres contenant s. Introduisons les réflexions a, b, c, a', b' et c' représentant les intersections respectives des faisceaux 1 et 2, 2 et 3, 3 et 4, 4 et 5, 5 et 6, 6 et 1; elles constituent un *hexagone inscrit dans la paire (r, s)* dont elles sont les *côtés*; a', b' et c' sont les côtés respectivement *opposés* à a, b et c (voir fig. 5).

PROPOSITION 22. (Théorème de Pappus). *Lorsque, dans un hexagone inscrit dans une paire de réflexions, deux paires de côtés opposés sont formées d'éléments parallèles, il en est de même de la troisième paire.*

Reprenons les éléments de la figure 5. Il existe dans le faisceau 3 un élément a_1 tel que:

$$ra_1 \sim as . \tag{2}$$

Comme a coupe r, a_1 coupe s en vertu de la proposition 19. Appelons b_1 l'intersection du faisceau 1 et de $\Phi(a_1, s)$. Lorsque

a_1 est différent de b, on voit apparaître le quadrangle complet $(r, s; a, a_1; b, b_1)$; à cause de (2):

$$bs \sim rb_1 \quad (3) \qquad\qquad ar \sim sa_1 \quad (4)$$

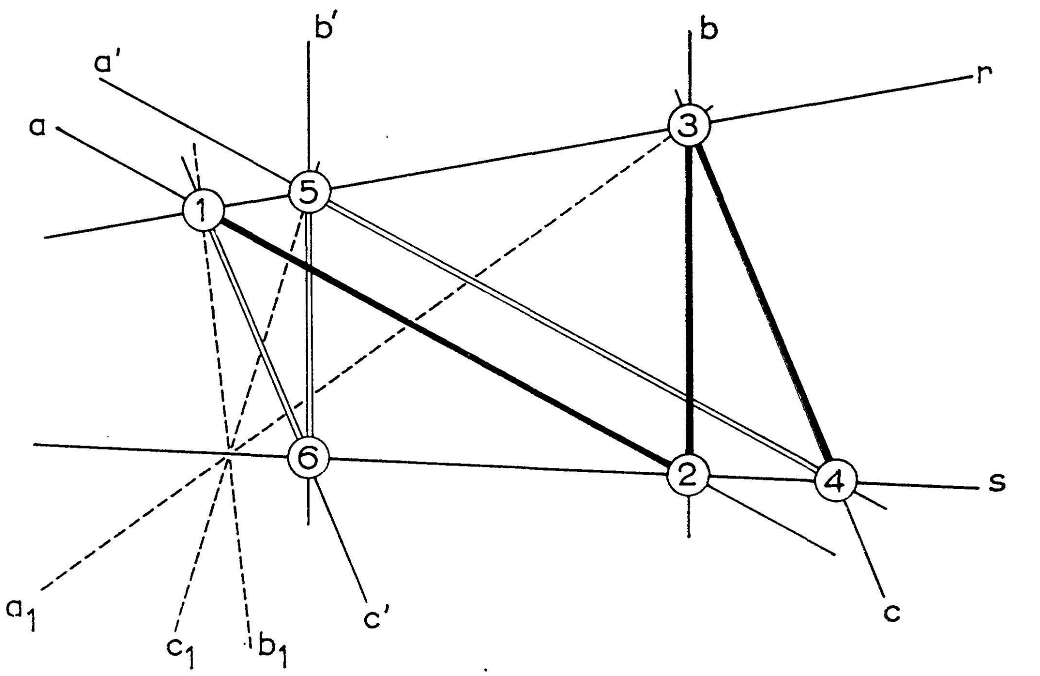

Fig. 5.

Lorsque a_1 se confond avec b, b_1 se confond avec a. En faisant usage de la proposition 20, on tire de (2):

$$bs = a_1 s \sim a.sa_1.a \sim ra_1.a_1 a = ra = rb_1 ,$$

puis:

$$ar = b_1 r \sim sb = sa_1 ,$$

ce qui redonne encore (3) et (4).

Admettons maintenant que a et a' sont parallèles. On déduit alors de (4) et (2) que:

$$a' r \sim ar \sim sa_1 \quad (5) \qquad\qquad a' s \sim as \sim ra_1 \quad (6)$$

Désignons par c_1 l'intersection du faisceau 5 et de $\Phi(a_1, s)$. Lorsque a_1 est différent de c, on considère le quadrangle complet $(r, s; a', a_1; c, c_1)$, et (5) permet d'écrire:

$$rc \sim c_1 s . \qquad (7)$$

Quand a_1 se confond avec c, c_1 se confond avec a'. Dans ce cas, la relation (7) se déduit immédiatement de (6).

Introduisons alors l'hypothèse selon laquelle b et b' sont parallèles. On tire de (3):

$$b' s \sim bs \sim rb_1 . \tag{8}$$

Lorsque b_1 est distinct de c', on voit apparaître le quadrangle complet $(r, s; b', b_1; c', c_1)$. La relation (8) entraîne alors:

$$rc' \sim c_1 s . \tag{9}$$

Lorsque b_1 est confondu avec c', c_1 se confond avec b' et la relation (9) se déduit immédiatement de (8). Comparons alors les relations (7) et (9); la proposition 19 permet d'affirmer que c et c' sont parallèles. C.Q.F.D.

Les démonstrations des propositions 21 et 22 peuvent être considérées comme classiques (voir par exemple [3], pp. 17-19).

2.6. Nous nous disposons à construire une famille de transformations agissant dans le groupe $\mathscr{T}$ des translations: les homothéties. Nous montrerons que ces homothéties constituent un corps K et que $\mathscr{T}$ peut être regardé comme un espace vectoriel sur K. Pour notre construction, nous nous appuierons sur les propriétés de la projection dans une direction donnée, que nous allons définir maintenant.

Soit u et v deux réflexions quelconques et soit d une réflexion coupant v. Nous appellerons *projection de* Π(u) *dans* Π(v) *suivant la direction* d l'application P définie ainsi: soit $x \in \Pi(u)$; l'élément p parallèle à d dans $\Phi(u, x)$ coupe v; soit x' l'élément de $\Pi(v)$ contenu dans $\Phi(v, p)$; alors $P(x) = x'$. Lorsque d coupe également u, la projection P est bijective et nous la qualifierons de *régulière*. En revanche, quand d est parallèle à u, la projection P envoie tout élément de $\Pi(u)$ sur l'élément de $\Pi(v)$ incident avec u et v; P est alors dite *singulière*. Nous n'aurons pas d'autres projections à considérer par la suite que les deux espèces que nous venons de décrire.

Proposition 23 (Théorème de Thalès). *Soit* u *et* v *deux réflexions quelconques. Soit* P *une projection régulière de* Π(u) *sur* Π(v). *L'application:*

$$zy \rightarrow P(z)\,P(y) \qquad \forall y\,,\, z \in \Pi(u)\,,$$

est un isomorphisme de τ(u) *sur* τ(v).

Commençons par deux remarques. Choisissons une réflexion p dans $\Pi(u)$. Toute translation prise dans $\tau(u)$ peut se mettre sous la forme xp, où $x \in \Pi(u)$. Il suffira de démontrer que l'application:

$$P' : xp \to P(x)\, P(p) \qquad \forall x \in \Pi(u)\,,$$

est un isomorphisme de $\tau(u)$ sur $\tau(v)$. En effet, dans ce cas, si y et z sont deux éléments de $\Pi(u)$ tels que $xp = zy$, l'application P' envoie $xp = pyzp$ sur $P(p)P(y)P(z)P(p) = P(z)P(y)$.

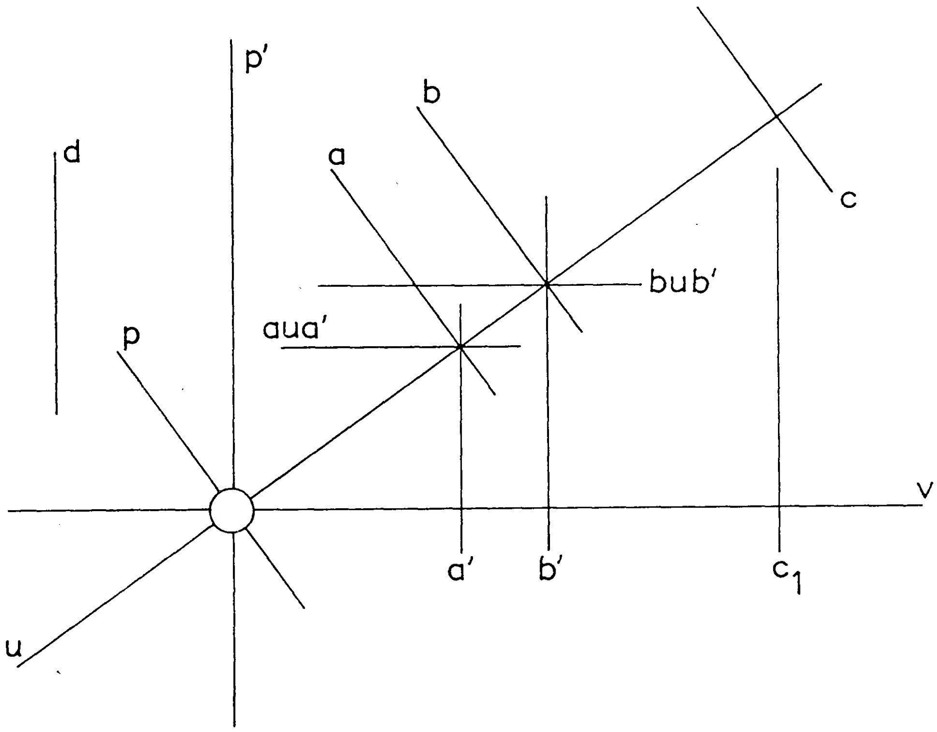

Fig. 6.

Prenons ensuite la réflexion t perpendiculaire à la direction d de P dans $\Phi(u,\, p)$ et la réflexion t' perpendiculaire à d dans $\Phi(p',\, v)$, où $p' = P(p)$. La projection P est le produit de trois projections régulières de direction d: la première de $\Pi(u)$ sur $\Pi(t)$, la deuxième de $\Pi(t)$ sur $\Pi(t')$ et qui est d'ailleurs l'application identique de $\Pi(t)$ sur lui-même, et la troisième de $\Pi(t')$ sur $\Pi(v)$. On voit par là que la proposition sera démontrée dès que l'on aura établi sa validité dans le cas particulier suivant: les réflexions u et v se coupent; la projection de $\Pi(u)$ sur $\Pi(v)$ se fait suivant une direction perpendiculaire à v et p est l'élément de $\Phi(u,\, v)$ perpendiculaire à u.

La projection P étant régulière, l'application P' est bijective. Elle envoie l'élément neutre de $\tau(u)$ sur celui de $\tau(v)$. Prenons deux éléments a et b dans $\Pi(u)$ et posons $c = bpa$. On a évidemment:

$$cp = bp.ap\,.$$

Soit alors a', b' et p' les images de a, b et p par P, et posons $c_1 = b'p'a'$. Comme la direction de P est perpendiculaire à v, quelle que soit x dans $\Pi(u)$, les réflexions x, u et $P(x)$ sont incidentes. Pour prouver que P' est un isomorphisme, il suffit de montrer que c_1 est l'image de c par P, autrement dit que c, u et c_1 sont incidentes. Or on peut écrire:

$$cuc_1 = apb.u.b'\,p'\,a'\,.$$

Le lemme de la proposition 11 permet d'affirmer que la réflexion bub' est perpendiculaire à p'. Elle commute donc avec p' et a'. Par suite:

$$cuc_1 = ap.p'\,a'.bub'\,.$$

Mais on peut remplacer p par upu et pup' par v. D'où:

$$cuc_1 = auva'.bub' = aua'.v.bub'\,,$$

si l'on tient compte du fait que a' est perpendiculaire à v. Comme aua' et bub' sont des réflexions parallèles à v, cuc_1 est une réflexion. C.Q.F.D.

Il est clair que la proposition précédente doit être mise en relation avec le « petit » théorème de Thalès, celui qui exprime la conservation du rapport des segments collinéaires commensurables dans la projection parallèle.

2.7. Nous avons déjà rencontré un isomorphisme « naturel » P'_0 entre $\tau(u)$ et $\tau(v)$ dans le cas où u et v sont distincts; on peut l'obtenir en posant:

$$P'_0 : T \to mTm \qquad \forall T \in \tau(u)\,,$$

où m est un élément bissecteur de u et v. Il est facile de voir que P'_0 coïncide avec l'isomorphisme associé à la projection de $\Pi(u)$

sur $\Pi(v)$ suivant la direction perpendiculaire à m. Quand u et v se coupent, il existe un second isomorphisme naturel de $\tau(u)$ sur $\tau(v)$; il est associé à la projection de $\Pi(u)$ sur $\Pi(v)$ suivant la direction m. On l'obtient aussi en considérant l'application qui à T fait correspondre l'inverse de $P_0'(T)$.

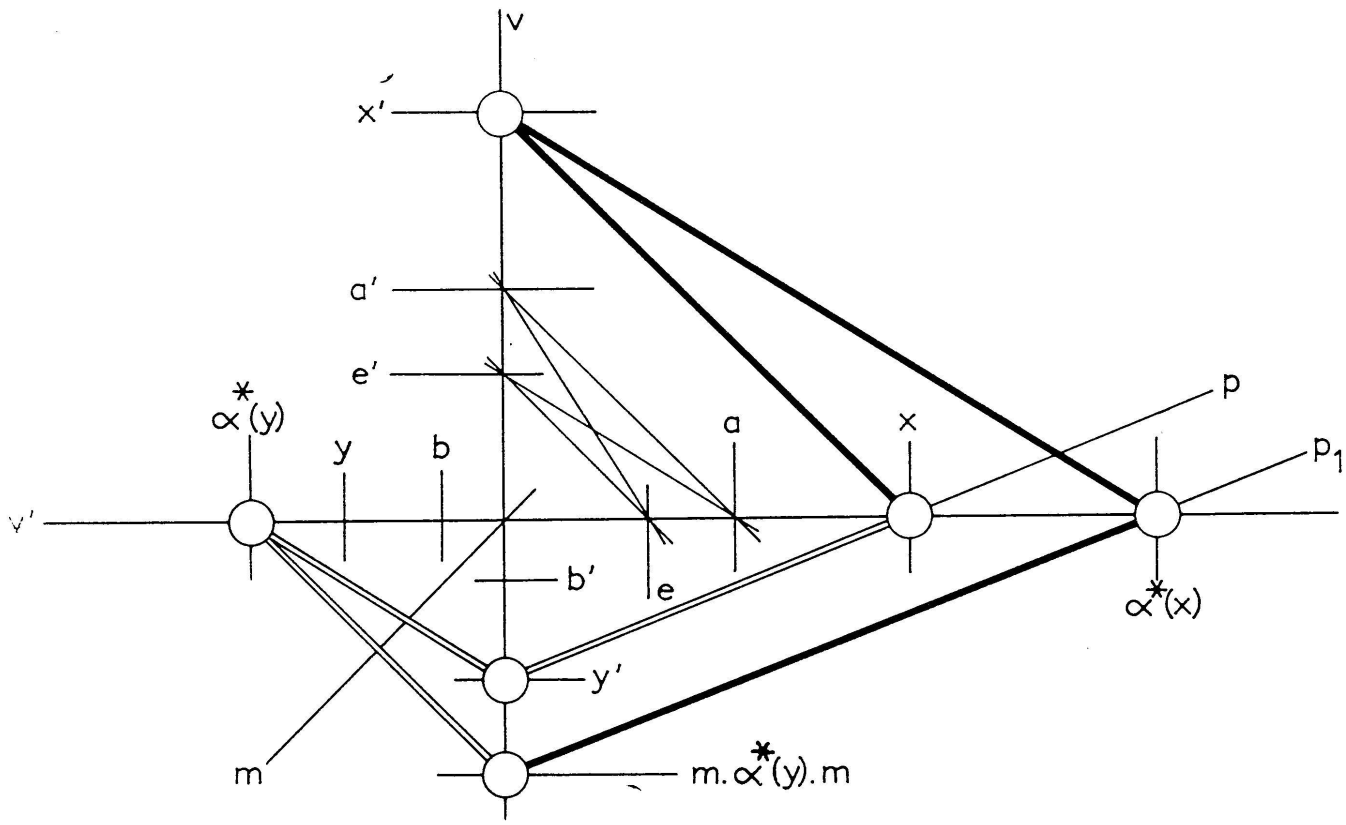

Fig. 7.

Il résulte de ce qui précède que, lorsqu'on compose l'isomorphisme naturel P_0' avec l'inverse d'un des isomorphismes considérés sous 2.6, on obtient un automorphisme de $\tau(u)$. Nous allons étudier la famille d'automorphismes ainsi déterminée. Pour plus de commodité, nous substituerons à u et v des réflexions perpendiculaires v' et v. Nous verrons que cette restriction n'est pas essentielle; elle permet toutefois d'adopter des notations plus simples. D'autre part, nous ne nous servirons pas directement des isomorphismes P' considérés plus haut, mais des projections P qui servent à les construire.

Choisissons donc deux réflexions perpendiculaires v' et v, ainsi que l'un de leurs éléments bissecteurs m. D'une façon générale, les éléments pris dans $\Pi(v')$ seront désignés par des lettres minuscules ordinaires, tandis que les éléments de $\Pi(v)$

qui leur correspondent par la projection de direction perpendiculaire à m seront désignés par les mêmes minuscules accentuées.

Soit a et b deux éléments de $\Pi(v')$, a étant distinct de v. La projection de $\Pi(v')$ dans $\Pi(v)$ qui applique a sur $b' = mbm$ sera notée $P(a, b')$. De même, $P(a', b)$ est la projection de $\Pi(v)$ dans $\Pi(v')$ qui envoie $a' = mam$ sur b. Lorsque $b \neq v$, on a:

$$P(a, b') = [P(b', a)]^{-1}.$$

Choisissons une fois pour toutes un élément e différent de v dans $\Pi(v')$. La projection $P(e, e')$ n'est autre que l'application $x \to x' = mxm$ de $\Pi(v')$ sur $\Pi(v)$. D'une façon générale, on peut écrire, pour tout s dans $\Pi(v')$:

$$P(e, s')(v) = v'; \; P(e', s)(v') = v,$$
$$P(e', e) \circ P(e, s') = P(e', s) \circ P(e, e').$$

En vertu de cette dernière relation, associons à tout élément s de $\Pi(v')$ une application σ^* de $\Pi(v')$ dans lui-même définie par:

$$\sigma^* = P(e', s) \circ P(e, e') = P(e', e) \circ P(e, s'), \qquad (1)$$

appelée *dilatation de* Π(v') *associée à* s. Elle est dite *régulière* lorsqu'elle est biunivoque, c'est-à-dire lorsque $s \neq v$. C'est le cas, en particulier, quand $s = e$, où elle se confond avec l'application identique de $\Pi(v')$ sur lui-même; cette dilatation est notée 1^*. Lorsque $s = v$, la dilatation est *singulière*; elle envoie chaque élément de $\Pi(v')$ sur v. Elle se note 0^*. L'ensemble de toutes les dilatations de $\Pi(v')$ définies par (1) sera désigné par K^*; il dépend du choix de v et de e dans $\Pi(v')$. Si α^* et β^* sont deux éléments de K^*, nous désignons par $\beta^*.\alpha^*$ l'application obtenue en effectuant successivement α^* puis β^*. C'est à cette loi de composition qu'il est fait allusion dans l'énoncé suivant.

Proposition 24. *Le produit des dilatations détermine une structure de groupe abélien dans l'ensemble des éléments réguliers de* K*.

Prenons dans $\Pi(v')$ deux éléments a et b distincts de v, et soit α^* et β^* les dilatations qui leur sont associées dans K^*.

Montrons d'abord que $\beta^*.\alpha^* = \alpha^*.\beta^*$. Prenons dans $\Pi(v')$ un élément quelconque x. Nous pouvons écrire:

$$\beta^*.\alpha^*(x) = P(e', e) \circ P(e, b') \circ P(e', a) \circ P(e, e')(x),$$

$$\alpha^*.\beta^*(x) = P(e', a) \circ P(e, b')(x).$$

en tenant compte des relations (1). Lorsque x est confondu avec v, les seconds membres des égalités ci-dessus sont tous deux égaux à v. Prenons donc $x \neq v$, et posons $y = \beta^*(x)$. Les faisceaux de première classe $\Phi(v', x)$, $\Phi(v, x')$, $\Phi(v', \alpha^*(x)v)$, $\Phi(, m.\alpha^*(y).m)$, $\Phi(v', \alpha^*(y))$ et $\Phi(v, y')$ pris dans cet ordre déterminent un hexagone inscrit dans la paire $('v, v)$, (voir fig. 7). L'intersection du premier et du deuxième faisceau est perpendiculaire à m, comme celle du quatrième et du cinquième. L'intersection du deuxième et du troisième faisceau est parallèle à la direction de $P(e', a)$, comme celle du cinquième et du sixième. Le théorème de Pappus permet donc d'affirmer que les deux côtés restants, soit p et p_1 sur la figure 7, sont aussi parallèles. Nous pouvons donc écrire:

$$P(e, b')[\alpha^*(x)] = P(e, e')[\alpha^*(y)].$$

D'où:

$$\beta^*.\alpha^*(x) = \alpha^*.\beta^*(x) \qquad \forall x \in \Pi(v'). \tag{2}$$

Donc $\beta^*.\alpha^* = \alpha^*.\beta^*$. Remarquons encore qu'en posant $x = e$, on tire de (2) la relation:

$$\beta^*(a) = \alpha^*(b), \tag{3}$$

qui reste vraie lorsque α^* et β^* sont singulières.

Montrons maintenant qu'il existe dans $\Pi(v')$ un élément $c \neq v$ tel que la dilatation γ^* associée à c dans K^* soit confondue avec l'application $\alpha^*.\beta^*$. Prenons en effet $c = \alpha^*(b)$. Soit x un élément quelconque de $\Pi(v')$; désignons par ξ^* la dilatation associée à x dans K^*. En vertu de (3), on peut écrire:

$$\alpha^*.\beta^*(x) = \alpha^*.\xi^*(b) = \xi^*.\alpha^*(b) = \xi^*(c) = \gamma^*(x).$$

Comme cette relation reste vraie quel que soit x dans $\Pi(v')$, $\alpha^*.\beta^*$ est une dilatation régulière prise dans K^*.

Le produit introduit dans K^* est associatif puisqu'il est défini par la composition des dilatations. La dilatation 1^* joue manifestement le rôle d'élément neutre. Enfin l'inverse de la dilatation $\alpha^* = P(e', e) \circ P(e, a')$, où $a \neq v$ dans $\Pi(v')$, est la dilatation $P(a', e) \circ P(e, e')$. Les éléments réguliers de K^* constituent donc un groupe abélien pour le produit considéré. C.Q.F.D.

Remarquons que si l'on se donne un élément quelconque d dans $\Pi(v')$, il existe une dilatation et une seule dans K^* qui envoie e sur d. Cette dilatation est régulière quand d est distinct de v. Par suite, si l'on se donne arbitrairement deux éléments f et g dans $\Pi(v')$, f étant différent de v, il existe dans K^* une dilatation et une seule qui applique f sur g.

2.8. Adoptons les mêmes notations qu'au numéro précédent. Soit S une translation de direction v'. Il existe dans $\Pi(v')$ un élément s bien déterminé tel que $S = sv$. Soit σ^* la dilatation associée à s dans K^*. Nous appellerons *homothétie de* τ(v') *associée à* S l'application σ de $\tau(v')$ dans lui-même définie par:

$$\sigma : \qquad xv \to [\sigma^*(x)]\, v \qquad \forall x \in \Pi(v'). \tag{4}$$

Comme σ^* est un produit de projections et que $\sigma^*(v) = v$, la proposition 23 permet d'affirmer que σ est un endomorphisme de $\tau(v')$. Lorsque $S \neq I$, l'homothétie σ est un automorphisme de $\tau(v')$ et elle est dite *régulière.* En particulier, l'homothétie correspondant à la translation $E = ev$ est l'automorphisme identique de $\tau(v')$, que nous désignerons par le symbole 1. Lorsque S est la translation banale, l'homothétie correspondante applique tout élément de $\tau(v')$ sur I; elle est dite *singulière* et elle est notée 0. L'ensemble des homothéties de $\tau(v)'$ définies par (4), où σ^* parcourt K^*, sera désigné par K.

On introduit une loi de composition interne dans K appelée *multiplication* en faisant correspondre à tout élément (α, β) de $K \times K$ l'application de $\tau(v')$ dans lui-même définie par:

$$\beta . \alpha(X) = \beta(\alpha(X)) \qquad \forall X \in \tau(v'). \tag{5}$$

Cela découle de la proposition 24 et de la définition (4). Il résulte également de là que les éléments réguliers de K forment un groupe abélien vis-à-vis de la multiplication, l'élément neutre étant évidemment 1. De plus, quel que soit σ dans K, on peut écrire: $\sigma.0 = 0.\sigma = 0$.

Les homothéties que nous venons de définir étant des endomorphismes de $\tau(v')$, on peut associer à toute paire d'éléments α et β de K un endomorphisme de $\tau(v')$ noté $\alpha+\beta$ et défini par:

$$\alpha+\beta : \qquad X \to \alpha(X)\beta(X) \qquad \forall X \in \tau(v') . \tag{6}$$

Montrons que l'on introduit par là une loi de composition interne dans K. En effet, soit A et B les éléments de $\tau(v')$ auxquels sont associées les homothéties α et β. Il existe dans $\Pi(v')$ deux réflexions a et b telles que $A = av$ et $B = bv$. Prenons dans $\tau(v')$ une translation quelconque $X = xv$, avec $x \in \Pi(v')$; désignons par ξ^* la dilatation associée à x dans K^* et par ξ l'homothétie associée à X dans K. On peut écrire:

$$(\alpha+\beta)(X) = [\alpha^*(x)]v\,[\beta^*(x)]v ,$$

puis, en tenant compte de (3):

$$\begin{aligned}[\alpha^*(x)]v\,[\beta^*(x)]v &= [\xi^*(a)]v\,[\xi^*(b)]v = \xi(A)\,\xi(B) = \xi(AB)\\ &= [\xi^*(avb)]v .\end{aligned}$$

Posons $c = avb$ et $C = avbv = AB$. Soit γ^* la dilatation associée à c dans K^* et γ l'homothétie associée à C dans K. Il vient:

$$[\xi^*(avb)]v = [\xi^*(c)]v = [\gamma^*(x)]v = \gamma(X) .$$

En bref:

$$(\alpha+\beta)(X) = \gamma(X) .$$

Cette relation étant vraie quel que soit X dans $\tau(v')$, on voit que $\alpha+\beta$ appartient à K. Nous venons de définir une *addition* dans K. Plus précisément, nous voyons que $\alpha+\beta$ est l'élément de K associé à la translation AB; comme il résulte de (1) et de (4) que l'application $S \to \sigma$ de $\tau(v')$ dans K est bijective, on peut affirmer que K est un groupe additif isomorphe à $\tau(v')$.

Montrons que K est un corps relativement aux opérations qui y ont été définies. Pour cela il reste à établir que la multiplication y est distributive par rapport à l'addition. Prenons trois éléments α, β et γ dans K et une translation X dans $\tau(v')$. On peut écrire:

$$[\alpha.(\beta+\gamma)](X) = \alpha[\beta(X)\gamma(X)] = \{\alpha[\beta(X)]\}\{\alpha[\gamma(X)]\} =$$
$$= [(\alpha.\beta)(X)][(\alpha.\gamma)(X)] = (\alpha.\beta+\alpha.\gamma)(X).$$

Donc $\alpha.(\beta+\gamma) = \alpha.\beta+\alpha.\gamma$. Nous pouvons énoncer le théorème suivant:

Théorème 2. *L'ensemble* K *des homothéties de* $\tau(v')$ *est un corps commutatif.*

Remarquons que le corps K ne dépend pas du choix de v et de e dans $\Pi(v')$, pourvu que $e \neq v$. En effet, si l'on substituait à v et e deux éléments v_1 et e_1 de $\Pi(v')$ tels que $e_1 v_1 = ev$, on pourrait recommencer à partir de v_1 et e_1 la construction d'un corps K_1 comme on l'a fait pour K à partir de v et e. Désignons par w l'élément de $\Pi(v')$ déterminé par $wvw = v_1$. Le passage de la première construction à la deuxième se ferait en remplaçant toute réflexion r apparaissant dans la construction de K par $T^{-1}rT$, où T est la translation vw. Or la transformation $X \to T^{-1}XT$ induit dans $\tau(v')$ l'automorphisme identique. D'où l'on déduit que les corps obtenus K et K_1 sont isomorphes. D'autre part, on vérifie sans peine que le choix de e n'intervient pas essentiellement dans la définition d'une homothétie, celle-ci étant entièrement déterminée par son effet sur une translation différente de I dans $\tau(v')$. On pourrait donc, en conservant v, remplacer e par n'importe quelle réflexion $f \neq v$ dans $\Pi(v')$.

Il apparaît clairement que les définitions (5) et (6) font de $\tau(v')$ un espace vectoriel sur le corps K. Nous désignerons donc dès maintenant K comme le *corps de base*. Par ailleurs, il découle des remarques faites à la fin de 2.7 que si l'on se donne deux translations T et S dans $\tau(v')$, avec $S \neq I$, il existe dans K une homothétie unique α telle que $\alpha(S) = T$. Ainsi $\tau(v')$ est un espace vectoriel de dimension 1 sur K.

Donnons une propriété importante de K.

Proposition 25. *L'élément —1 n'est pas un carré dans le corps de base* K.

Il est évident que $0^2 \neq -1$. Prenons donc dans K un élément non nul δ et montrons que $\delta^2 \neq -1$. Reprenons les éléments de la figure 7 et les définitions qui s'y rapportent. Il existe dans $\Pi(v')$ une réflexion $d \neq v$ telle que δ soit l'homothétie associée à la translation dv. Soit δ^* la dilatation attachée à d dans K^*. Désignons comme d'habitude par d' l'élément mdm et posons:

$$\{r\} = \Phi(v', e) \cap \Phi(v, d'); \quad \{s\} = \Phi(v, e') \cap \Phi(v', d).$$

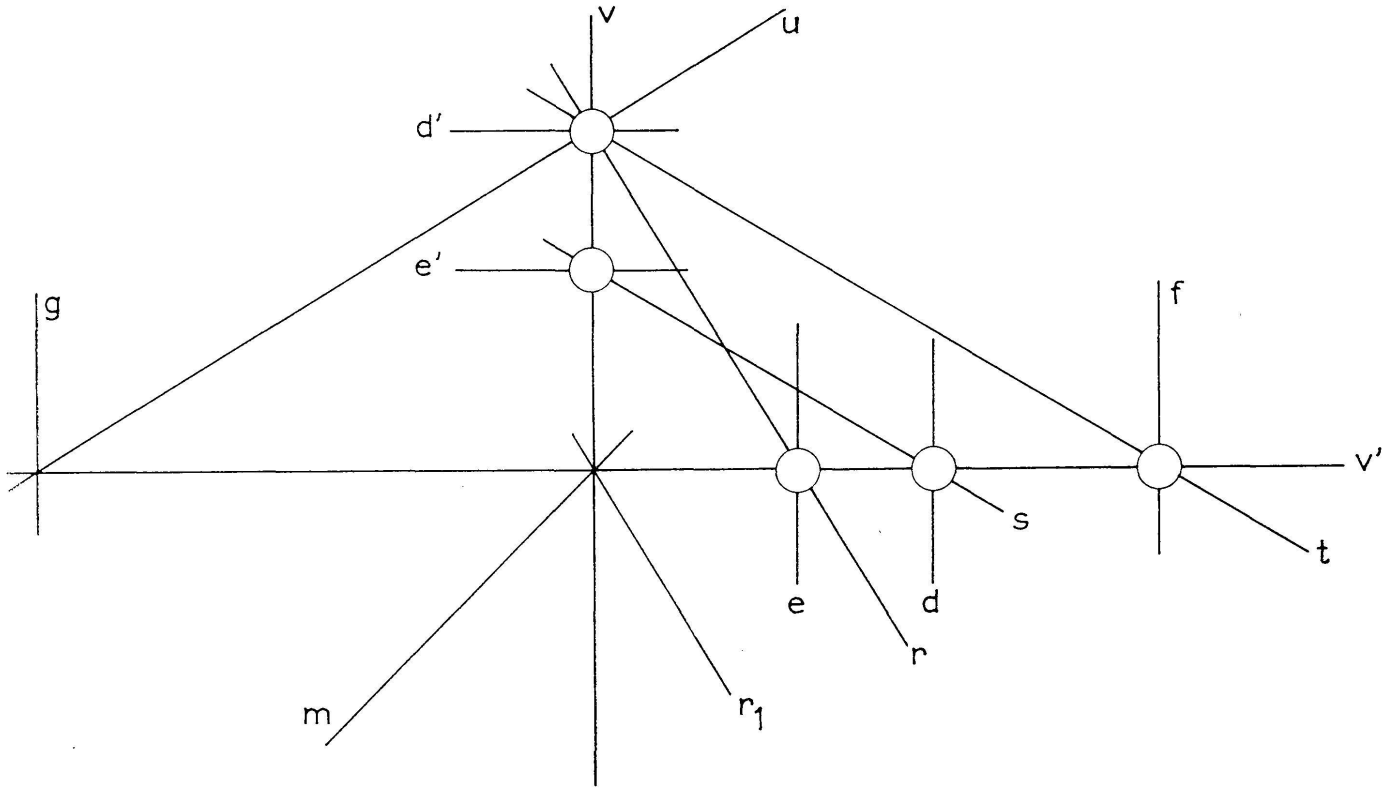

Fig. 8.

On voit immédiatement que $s = mrm$. Désignons par t l'élément de $\Phi(v, d')$ parallèle à s, par r_1 l'élément de $\Phi(v', v)$ parallèle à r et par u l'élément vtv. Il est clair que u est parallèle à $vsv = vmrmv$ qui est lui-même parallèle à vmr_1mv. D'autre part:

$$vmr_1\,mv = vmvmr_1 = vv'\,r_1\,.$$

En vertu du lemme de la proposition 11, $vv'r_1$ est perpendiculaire à r_1, donc à r. Par suite u est perpendiculaire à r.

Désignons alors par f l'élément de $\Phi(v', t)$ perpendiculaire à v' et posons $g = vfv$. Par construction:

$$f = (\delta^*)^2\,(e)\,.$$

Donc:

$$\delta^2\,(ev) = fv\,; \qquad (-\delta^2)\,(ev) = vf = gv\,.$$

Supposons par absurde que $-\delta^2 = 1$. Cela entraînerait $g = e$. Comme les faisceaux $\Phi(v', e)$ et $\Phi(v, d')$ sont distincts, r serait confondu avec u, contrairement à ce qui a été montré plus haut.

C.Q.F.D.

Il convient de retenir au passage le procédé permettant de construire une réflexion perpendiculaire à n'importe quel élément de $\Phi(v', e)$ distinct de v' et de e.

2.9. Nous sommes maintenant en mesure d'introduire dans le groupe $\mathcal{T}$ de toutes les translations une structure d'espace vectoriel sur K. Cela se fait en prolongeant à $\mathcal{T}$ les homothéties définies dans un sous-groupe $\tau(v')$ de $\mathcal{T}$.

Reprenons les éléments de la figure 7. Soit α^* une dilatation de $\Pi(v')$ prise dans K^*. L'application:

$$y' \to m\big(\alpha^*(my'm)\big)m\,, \qquad \forall y' \in \Pi(v)\,,$$

peut être considérée comme une dilatation de $\Pi(v)$ obtenue « par réflexion » à partir de celle de $\Pi(v')$; nous la désignerons encore par α^*. Nous allons examiner un procédé permettant de passer de l'une à l'autre de ces dilatations par certaines projections de $\Pi(v')$ dans $\Pi(v)$.

Plaçons-nous dans le cas où α^* est régulière et où $y' \neq v'$. Posons $y = my'm$ et choisissons un élément $x \neq v$ dans $\Pi(v')$. Il existe une dilatation régulière β^* de $\Pi(v')$ prise dans K^* qui applique x sur y. Nous retrouvons exactement la disposition de la figure 7, et si nous posons:

$$\{p\} = \Phi(v', x) \cap \Phi(v, y')$$

$$\text{et} \qquad \{p_1\} = \Phi(v', \alpha^*(x)) \cap m\,\Phi\big(v, \alpha^*(y')\big)\,,$$

nous pouvons affirmer que p et p_1 sont deux réflexions parallèles. Ainsi la projection de $\Pi(v')$ dans $\Pi(v)$ qui applique x sur y' envoie $\alpha^*(x)$ sur $\alpha^*(y')$. Cette affirmation est banale quand α^* est singulière et quand $y' = v'$.

Il est clair qu'on obtient une homothétie de $\tau(v)$ lorsqu'on forme l'application:

$$y'v' \to \alpha^*(y')v' \qquad \forall y' \in \Pi(v)\,.$$

Nous la désignerons encore par α.

Considérons alors une translation T. On peut la décomposer canoniquement en un produit $T_{v'}T_v$, où $T_{v'} \in \tau(v')$ et $T_v \in \tau(v)$. Introduisons l'application:

$$T \to \alpha(T_{v'})\,\alpha(T_v) \qquad \forall T \in \mathcal{T}.$$

En vertu de la proposition 15, cette application est un endomorphisme de $\mathcal{T}$. Ses restrictions à $\tau(v')$ et $\tau(v)$ se confondent avec ce que nous avons désigné par α. Nous pouvons donc la désigner par la même lettre et dire que c'est une *homothétie de* $\mathcal{T}$.

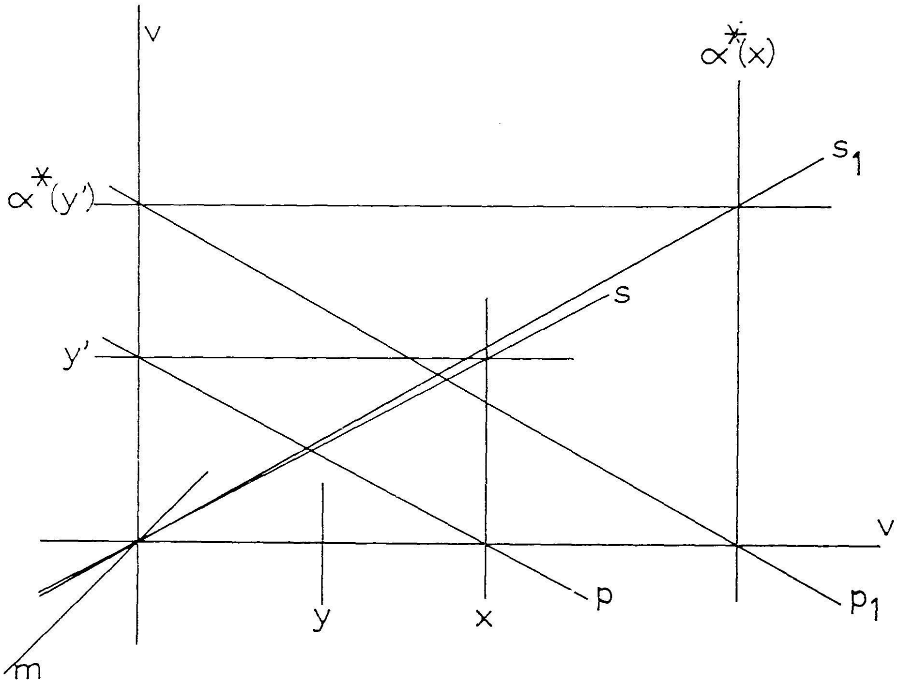

Fig. 9.

C'est un automorphisme de $\mathcal{T}$ et elle est dite *régulière* quand sa restriction à $\tau(v')$ est régulière. Sinon elle est dite *singulière* et elle applique tout élément de $\mathcal{T}$ sur I.

Examinons l'effet d'une homothétie régulière α de $\mathcal{T}$ sur une translation T n'appartenant ni à $\tau(v')$, ni à $\tau(v)$. Si $T = T_{v'}\,T_v$ est la décomposition canonique de T suivant $\tau(v')$ et $\tau(v)$, posons:

$$T_{v'} = y'v', \quad y' \in \Pi(v); \quad T_v = yv, \quad y \in \Pi(v').$$

Alors:

$$\alpha(T) = \alpha^*(y')\,\alpha^*(x)\,v'v.$$

Posons:

$$\{s\} = \Phi(v, v') \cap \Phi(x, y'); \quad \{s_1\} = \Phi(v, v') \cap \Phi(\alpha^*(x), \alpha^*(y')).$$

Les réflexions s et s_1 sont les directions respectives de T et de $\alpha(T)$. Considérons les quadrangles complets $(v', y'; v, x; p, s)$ et $(v', \alpha^*(y'); v, \alpha^*(x); p_1, s_1)$. Dans le premier, $v'v$ et xy' sont congrus et v' est parallèle à y'; il résulte alors des propositions 21 et 19 que:

$$v' s \sim pv' .$$

Dans le second, $v'v$ est congru à $\alpha^*(x)\,\alpha^*(y')$ et $\alpha^*(y')$ est parallèle à v'; par suite:

$$v' s_1 \sim p_1 v' .$$

Mais comme p et p_1 sont parallèles, il résulte de la proposition 19 que $v's$ est congru à $v's_1$, puis que s et s_1 sont parallèles (autrement dit confondus, dans ce cas). Par conséquent, T et $\alpha(T)$ ont la même direction. Cette affirmation est banale quand α est singulière et quand T appartient à $\tau(v')$ ou à $\tau(v)$.

Ainsi, quelle que soit la réflexion s, le sous-groupe $\tau(s)$ de $\mathscr{T}$ est stable pour l'ensemble des homothéties de $\mathscr{T}$. D'autre part, si l'on se donne deux translations T_1 et T_2, avec $T_1 \neq I$, ainsi que l'image $\alpha(T_1)$ de T_1 par une homothétie α de $\mathscr{T}$, on peut construire $\alpha(T_2)$ par des projections. Donc si l'on se donne une paire ordonnée de translations de même direction, la première n'étant pas banale, il existe une homothétie de $\mathscr{T}$ et une seule qui applique la première translation sur la seconde.

De tout ce qui précède, nous déduisons que l'ensemble des homothéties de $\mathscr{T}$ consitue un corps isomorphe à K, que nous identifierons immédiatement à K. On peut écrire:

$$\begin{aligned} (\alpha+\beta)(X) &= \alpha(X)\beta(X); & 0(X) &= I & \forall X \in T, \\ (\beta.\alpha)(X) &= \beta(\alpha(X)); & 1(X) &= X \end{aligned}$$

où α et β sont deux éléments quelconques de K. Ainsi $\mathscr{T}$ est muni d'une structure d'espace vectoriel de dimension 2 sur K. Nous désignerons cet espace vectoriel par $\mathscr{T}_K$ pour le distinguer du sous-groupe $\mathscr{T}$ de G. Les sous-espaces de dimension 1 de $\mathscr{T}_K$ sont donnés par les sous-groupes $\tau(s)$ de $\mathscr{T}$, où $s \in \Sigma$.

Soit E et F deux translations linéairement indépendantes dans $\mathscr{T}_K$. Toute translation T peut se mettre sous la forme:

$$T = \xi(E)\,\eta(F),$$

où ξ et η sont deux éléments de K univoquement déterminés par T. L'application $T \to (\xi, \eta)$ est un isomorphisme de $\mathcal{T}_K$ sur l'ensemble $K \times K$ muni de sa structure d'espace vectoriel sur K. Nous dirons que (ξ, η) est la paire de *coordonnées* de T relativement à la base (E, F). Le système de coordonnées ainsi introduit dans $\mathcal{T}_K$ est dit *orthonormal* quand E et F sont deux translations congrues de directions perpendiculaires.

Les propriétés des homothéties de $\mathcal{T}$ nous permettent d'affirmer que, lors de la construction des homothéties du groupe $\tau(v')$, le choix d'un élément v perpendiculaire à v' n'avait rien d'essentiel (voir fig. 7); nous aurions pu y remplacer v par n'importe quelle autre réflexion coupant v'.

2.10. Nous disposons d'assez de renseignements sur le groupe G pour en tirer les éléments d'une géométrie plane. Choisissons à nouveau deux réflexions perpendiculaires v' et v, l'un de leurs éléments bissecteurs m, et un élément $e \neq v$ dans $\Pi(v')$. Désignons par g le groupe de stabilité de $\Phi(v, v')$. Soit Φ un faisceau de première classe quelconque. Il existe au moins une réflexion s telle que $\Phi = s\Phi(v, v')s$, (coroll. 1, prop. 18). Le groupe de stabilité de Φ est sgs. L'intersection des sous-groupes sgs de G, où s parcourt Σ, se réduit à $\{I\}$ (coroll. 3, prop. 17). On peut donc définir la géométrie de G relativement à g (voir introduction). L'espace homogène G/g sera appelé le *plan*; ses éléments seront les *points*. Il existe entre le plan, le groupe $\mathcal{T}$, l'espace vectoriel $\mathcal{T}_K$, l'ensemble des demi-tours et celui des faisceaux de première classe des correspondances biunivoques « naturelles » que nous allons mettre en évidence.

Il résulte du corollaire 1 de la proposition 17 que l'on obtient toutes les classes (à gauche) de G suivant g en formant les classes Tg, où T parcourt $\mathcal{T}$. On détermine ainsi des correspondances biunivoques entre le plan, le groupe $\mathcal{T}$ et l'espace vectoriel $\mathcal{T}_K$. La classe Tg est celle qui contient le demi-tour D tel que $T = Dv'v$; elle n'en contient pas d'autre car g ne contient pas de translation non banale. On obtient de la sorte une correspondance parfaite entre les points du plan et les demi-tours. D'autre part, nous avons déjà relevé l'existence d'une correspondance biunivoque naturelle entre les demi-tours et les faisceaux de première classe (voir 2.2). Pour alléger le texte, convenons d'appeler *homologues* les éléments du plan, de $\mathcal{T}$, de $\mathcal{T}_K$, de l'ensemble des demi-tours et de celui des faisceaux de première classe qui se correspondent naturellement.

Posons $E = ev$ et $F = mv'Ev'm = mEm$. Comme v et v' sont perpendiculaires et que E et F sont congrues, le système de coordonnées associé à la base (E, F) de $\mathcal{T}_K$ est orthonormal. Nous appellerons *coordonnées* d'un point P (relativement au système (v', v, m, e)) les coordonnées (ξ, η) de la translation homologue à P, relativement à la base (E, F). Nous désignerons parfois ce point par $P(\xi, \eta)$.

Nous appellerons *droite* homologue à la réflexion s, et nous noterons $\bar{s}$ l'ensemble des points homologues aux faisceaux de première classe contenant s. Si $T_1 g$ est un point de $\bar{s}$, on obtient la droite $\bar{s}$ en formant l'ensemble des points $TT_1 g$, où T parcourt le groupe $\tau(s)$. On peut alors représenter paramétriquement une droite par $(\mu+\pi.\zeta;\ \mu'+\pi'.\zeta)$, où ζ est un élément parcourant K, où μ, π, μ' et π' sont des éléments déterminés de K, et où π et π' ne sont pas nuls en même temps. Convenons d'écrire dorénavant $\alpha\beta$ le produit de deux éléments α et β de K que nous notions jusqu'ici $\alpha.\beta$, aucune ambiguïté n'étant plus à craindre. Il résulte de ce qui précède qu'une droite $\bar{s}$ est l'ensemble des points dont les coordonnées (ξ, η) satisfont une équation de la forme:

$$(\bar{s}) \equiv \alpha\xi+\beta\eta+\gamma = 0\,; \quad \alpha\,,\beta\,,\gamma\in K\,; \quad (\alpha\,,\beta) \neq (0\,,0)\,. \tag{1}$$

Réciproquement, l'ensemble des points dont les coordonnées (ξ, η) satisfont une équation de la forme (1) est une droite.

Deux droites $\bar{s}$ et $\bar{s}'$ sont dites *sécantes*, *parallèles* ou *perpendiculaires* en même temps que leurs réflexions homologues respectives s et s'. Soit:

$$(\bar{s}') \equiv \alpha'\,\xi+\beta'\,\eta+\gamma' = 0\,, \tag{2}$$

l'équation de $\bar{s}'$. La condition de parallélisme de $\bar{s}$ et $\bar{s}'$ est donnée par:

$$\alpha\beta'-\alpha'\beta = 0\,. \tag{3}$$

Montrons que la condition de perpendicularité de ces mêmes droites s'exprime par:

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' = 0 . \tag{4}$$

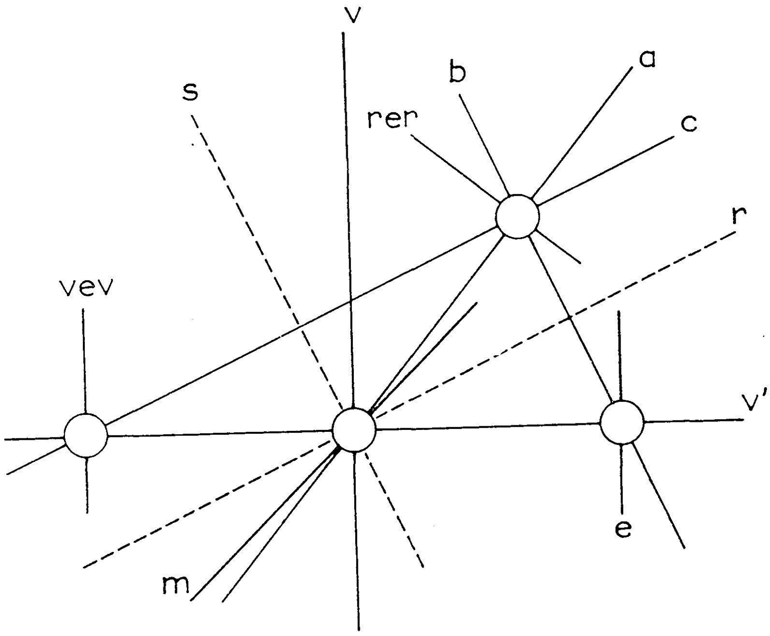

Fig. 10.

C'est le cas manifestement lorsque s et s' sont confondues avec v et v' respectivement, car alors $\beta = \alpha' = 0$. Pour examiner les autres cas, reportons-nous à la figure 8. La réflexion r est arbitrairement choisie parmi les éléments de $\Phi(v', e)$ différents de v' et de e. Elle appartient au faisceau $\Phi(v, d')$, où $d' \neq v'$; donc la droite homologue $\bar{r}$ contient les points de coordonnées (1, 0) et (0, δ), où $\delta \neq 0$. La réflexion u, qui est perpendiculaire à r, appartient aux faisceaux $\Phi(v, d')$ et $\Phi(v', g)$; donc la droite homologue $\bar{u}$ contient les points de coordonnées (0, δ) et ($-\delta^2$, 0). Les équations respectives de $\bar{r}$ et $\bar{u}$ peuvent s'écrire:

$$(\bar{r}) \equiv \delta\xi + \eta - \delta = 0 ; \quad (\bar{u}) \equiv \xi - \delta\eta + \delta^2 = 0 .$$

Ces équations vérifient la condition (4). Réciproquement, toute droite dont l'équation jointe à celle de $\bar{r}$ satisfait la condition (4) est parallèle à $\bar{u}$; elle est donc perpendiculaire à $\bar{r}$. Comme la perpendicularité des droites $\bar{s}$ et $\bar{s}'$ et la condition (4) restent inaltérées lorsqu'on substitue à $\bar{s}$ et à $\bar{s}'$ des droites respectivement parallèles, (4) est bien la condition nécessaire et suffisante pour que les droites $\bar{s}$ et $\bar{s}'$ soient perpendiculaires.

Nous pouvons apporter une précision nouvelle sur le corps K.

Théorème 3. *Le corps de base est formellement réel et pythagoricien.*

Un corps commutatif est dit formellement réel quand -1 ne peut s'y mettre sous forme d'une somme de carrés. Il est pythagoricien quand la somme des carrés de deux quelconques de ses éléments est un carré. En vertu de la proposition 25, il suffit de montrer que K est pythagoricien, ce qui s'énonce encore ainsi: quel que soit α dans K, $1+\alpha^2$ est un carré dans K.

Reprenons deux réflexions perpendiculaires v' et v, l'un de leurs éléments bissecteurs m et un élément $e \neq v$ dans $\Pi(v')$. Soit a un élément de $\Phi(v, v')$ différent de v'. Soit r et s les éléments bissecteurs de v' et a. Posons:

$$\{b\} = \Phi(v', e) \cap \Phi(a, rer),$$

$$\{c\} = \Phi(v', vev) \cap \Phi(a, rer).$$

Les réflexions b et c sont respectivement perpendiculaires à r et s; elles sont donc perpendiculaires entre elles. Ainsi quel que soit a dans $\Phi(v, v')$, il existe deux réflexions perpendiculaires b et c, incidentes avec a, la première dans $\Phi(v', e)$, la deuxième dans $\Phi(v', vev)$. Quand a et v' sont distincts, il en est de même de b et e.

Prenons alors un élément α dans K. Soit $\bar{a}$ la droite d'équation:

$$(\bar{a}) \equiv \xi + \alpha\eta = 0, \tag{5}$$

relativement au système (v', v, m, e). La réflexion homologue a appartient au faisceau $\Phi(v, v')$ et elle est distincte de v'. Soit $\bar{b}$ une droite contenant le point de coordonnées $(1,0)$ et non perpendiculaire à v'. Son équation peut s'écrire:

$$(\bar{b}) \equiv \beta\xi - \eta - \beta = 0, \qquad \beta \in K. \tag{6}$$

Soit $\bar{c}$ la droite perpendiculaire à $\bar{b}$ et contenant le point de coordonnées $(-1, 0)$. Son équation peut s'écrire:

$$(\bar{c}) \equiv \xi + \beta\eta + 1 = 0. \tag{7}$$

En vertu de ce qui précède, il existe dans K un élément β tel que les équations (5), (6) et (7) en ξ et η soient compatibles. Cet élément satisfait la relation:

$$\beta^2 - 2\alpha\beta - 1 = 0 .$$

Ce qui implique que $1+\alpha^2$ est un carré dans K. C.Q.F.D.

Ce théorème implique, en particulier, que la caractéristique du corps K est nulle, autrement dit que le groupe G ne contient pas de translation non banale d'ordre fini. Nous assimilerons le corps premier de K au corps Q des nombres rationnels.

2.11. Reprenons les coordonnées orthonormales introduites dans le plan relativement au système (v', v, m, e). Le plan étant l'espace homogène G/g, où g est le groupe de stabilité de $\Pi(v, v')$, on peut associer à tout élément X de G une transformation $\bar{X}$ du plan donnée par:

$$\bar{X}: \quad Tg \to XTg \qquad \forall T \in \mathscr{T} \tag{1}$$

On définit de la sorte un groupe de transformations isomorphe à G, agissant effectivement et transitivement dans le plan. La transformation $\bar{X}$ peut encore se formuler ainsi:

$$\bar{X} : (\xi , \eta) \to \left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}\, \xi - \varepsilon\, \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2}\, \eta + \gamma\, ;\; \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2}\, \xi + \varepsilon\, \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}\, \eta + \delta \right) \cdot \tag{2}$$

$$\alpha , \beta , \gamma , \delta \in K\, ; \quad (\alpha , \beta) \neq (0 , 0)\, ; \quad \varepsilon = \pm 1 .$$

L'élément ε égale 1 ou -1 suivant que X est un élément propre de G ou non. La condition nécessaire et suffisante pour que X soit une réflexion est donnée par:

$$\varepsilon = -1\, ; \quad \gamma = \beta\varphi\, ; \quad \delta = -\alpha\varphi , \tag{3}$$

où φ est un élément quelconque de K. Les translations de G sont caractérisées par $\varepsilon = 1$ et $\beta = 0$. Les éléments de g s'obtiennent en posant $\gamma = \delta = 0$.

Réciproquement, soit K' un corps formellement réel et pythagoricien. L'ensemble des transformations de $K' \times K'$ distinctes données par les expressions de la forme (2), où α, β, γ et δ sont dans K', constitue un R-groupe G' engendré par celles de ces transformations qui vérifient (3), avec $\varphi \in K'$. On montre de plus que G' satisfait les cinq axiomes posés jusqu'ici et que K' est le corps de base relatif à G'.

Tous les résultats que nous venons de citer s'obtiennent par des calculs bien connus en géométrie analytique élémentaire, à ceci près que, dans le cas élémentaire, K est généralement le corps des nombres réels. Nous n'avons pas repris ici ces développements classiques que l'on trouvera, par exemple, dans [3],pp. 210-215.

En revanche, nous retiendrons ceci: d'une certaine manière, on peut considérer que les cinq premiers axiomes que nous avons posés caractérisent les corps formellement réels et pythagoriciens.

On peut encore caractériser le groupe G d'une autre manière. A toute paire de points $P_1(\xi_1, \eta_1)$ et $P_2(\xi_2, \eta_2)$ attachons l'élément:

$$D(P_1, P_2) = (\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2, \tag{4}$$

qui est un carré dans K. Il est clair que $D(P_1, P_2) = D(P_2, P_1)$. D'autre part, $D(P_1, P_2)$ est nul lorsque P_1 et P_2 coïncident, et dans ce cas seulement, en vertu de la proposition 25. On vérifie sans peine que, quelle que soit la transformation $\overline{X}$ donnée par (2), on a:

$$D(\overline{X}(P_1), \overline{X}(P_2)) = D(P_1, P_2).$$

On peut montrer que cette propriété caractérise le groupe des transformations $\overline{X}$, qui est isomorphe à G et que nous assimilerons à G dans ce qui suit. Etablissons d'abord un lemme.

LEMME. *Le groupe* G *est constitué par l'ensemble des transformations du plan de la forme:*

$$\begin{cases} \xi' = \mu\xi + \nu\eta + \pi \\ \eta' = \rho\xi + \sigma\eta + \tau \end{cases} \qquad \mu, \nu, \pi, \rho, \sigma, \tau \in K, \tag{5}$$

qui admettent D *comme invariant.*

Désignons par G_1 l'ensemble des transformations considérées. Comme $D(P_1, P_2)$ n'est nul que lorsque P_1 et P_2 coïncident, les substitutions linéaires (5) admettant D comme invariant sont régulières et G_1 est un groupe. De plus G est un sous-groupe de G_1. Nous pouvons donc nous borner à déterminer les coefficients μ, ν, ρ et σ quand π et τ sont nuls. Dans ce cas le point O de coordonnées $(0, 0)$ est fixe; soit alors $P'(\xi', \eta')$ l'image du point $P(\xi, \eta)$. En exprimant que $D(O, P)$ égale $D(O, P')$, on trouve les conditions nécessaires suivantes:

$$\mu^2+\rho^2 = 1\,; \qquad \nu^2+\sigma^2 = 1\,; \qquad \mu\nu+\rho\sigma = 0\,, \qquad (6)$$

qui sont équivalentes à:

$$\mu^2+\rho^2 = 1\,; \qquad \nu = -\varepsilon\rho\,; \qquad \sigma = \varepsilon\mu\,; \qquad \varepsilon = \pm 1$$

On obtient tous les éléments ρ de K tels que $1-\rho^2$ soit un carré de K en posant:

$$\rho = \frac{2\varphi}{1+\varphi^2} \qquad \varphi \in K\,,$$

ar l'équation $\rho\varphi^2 - 2\varphi + \rho = 0$ a des solutions dans K. Par suite, on peut poser:

$$\mu = \pm \frac{1-\varphi^2}{1+\varphi^2}\,.$$

Ainsi la solution générale du système (6) peut s'écrire:

$$\mu = \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\,; \quad \rho = \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}\,; \quad \nu = -\varepsilon\rho\,; \quad \sigma = \varepsilon\mu\,; \quad \varepsilon = \pm 1\,,$$

où α et β sont deux éléments arbitraires de K non nuls simultanément. Il s'ensuit immédiatement que $G_1 = G$. C.Q.F.D.

Remarquons que les conditions (6) sont également suffisantes pour que la transformation (5) appartienne à G, comme le montre notre démonstration.

PROPOSITION 26. *Le groupe G est constitué par l'ensemble des transformations du plan qui admettent D comme invariant.*

Désignons par G' l'ensemble des transformations étendues à tout le plan et admettant D comme invariant. Il est évident que G est contenu dans G'. De plus, chaque élément de G' est une injection du plan dans lui-même.

Soit $P_i(\xi_i, \eta_i)$, avec $i = 1, 2, 3$, trois points quelconques du plan. Posons:

$$D_i = D(P_j, P_k) \qquad i \neq j \neq k \neq i, i = 1, 2, 3.$$

puis:

$$S(P_1, P_2, P_3) = 2(D_1 D_2 + D_2 D_3 + D_3 D_1) - (D_1^2 + D_2^2 + D_3^2). \quad (7)$$

Par des calculs élémentaires, on montre que:

$$S(P_1, P_2, P_3) = 4\left(\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & 1 \\ \xi_2 & \eta_2 & 1 \\ \xi_3 & \eta_3 & 1 \end{vmatrix}\right)^2 \qquad (8)$$

Il résulte de la définition (7) que S est un invariant relativement à G'. Le second membre de (8) est nul quand P_1, P_2 et P_3 appartiennent à une même droite, et dans ce cas seulement. Il s'ensuit que tout élément de G' transforme trois points d'une droite en trois points d'une droite.

Prenons un élément quelconque Z dans G'. Soit A' (α', β') l'image par Z d'un point $A(\alpha, \beta)$. Désignons par T_1 et T_2 les translations envoyant le point $O(0,0)$ sur A et sur A', respectivement. La transformation $Z_1 = T_2^{-1} Z T_1$ appartient à G' et elle laisse O fixe. Soit B' (γ', δ') l'image par Z_1 d'un point B (γ, δ) distinct de O. Les éléments $\gamma^2 + \delta^2$ et $\gamma'^2 + \delta'^2$ égalent le carré d'un même élément non nul φ de K. Les transformations:

$$R_1: \quad (\xi, \eta) \to \left(\frac{\gamma}{\varphi}\xi - \frac{\delta}{\varphi}\eta \,;\, \frac{\delta}{\varphi}\xi + \frac{\gamma}{\varphi}\eta\right).$$

$$R_2: \quad (\xi, \eta) \to \left(\frac{\gamma'}{\varphi}\xi - \frac{\delta'}{\varphi}\eta \,;\, \frac{\delta'}{\varphi}\xi + \frac{\gamma'}{\varphi}\eta\right).$$

appartiennent à G, car elles vérifient les relations (6). Elles envoient le point $C(\varphi, 0)$ sur B et B', respectivement. La transformation $Z_2 = R_2^{-1} Z_1 R_1$ appartient à G' et laisse fixes les points O et C. L'image d'un point $M(\mu, 0)$ par Z_2 est un point $M'(\mu', 0)$ tel que:

$$\mu^2 = \mu'^2 \,; \quad (\mu - \varphi)^2 = (\mu' - \varphi)^2.$$

Comme $\varphi \neq 0$, $\mu = \mu'$; ainsi Z_2 laisse fixes tous les points de la droite OC. On en déduit que Z applique une droite sur une droite et, par suite, le plan sur le plan. De plus, comme elle conserve le parallélisme, elle est de la forme (5). Donc G' est confondu avec G. C.Q.F.D.

3. Les deux derniers axiomes de la géométrie euclidienne plane

Il convient d'introduire de nouveaux axiomes afin de parachever la construction de ce que nous avons appelé la géométrie euclidienne plane. Ces axiomes nous permettront d'affirmer que le corps de base K appartient à une certaine famille de corps réels. Alors que les axiomes précédents ont essentiellement un contenu algébrique, les prochains — l'un d'eux, tout au moins — précisent la structure topologique de K.

3.1. Soit un corps L. A et B étant deux parties non vides de L, on désigne par $A+B$ l'ensemble des éléments $a+b$, où $a \in A$ et $b \in B$. De même, on note AB l'ensemble des éléments ab, où $a \in A$ et $b \in B$; l'ensemble $\{-1\}A$ s'écrit $-A$. Rappelons qu'on ordonne le corps L en y déterminant une partie P, appelée *partie positive* de L pour l'ordre considéré, satisfaisant les conditions suivantes:

1) $P \cup (-P) = L$,
2) $P \cap (-P) = \{0\}$,
3) $P+P = P$,
4) $P.P = P$.

Les points (1), (2) et (3) introduisent une structure de groupe abélien ordonné dans le groupe additif sous-jacent à L. Alors si $a, b \in L$, on écrit $a \leq b$ quand b-a appartient à P. On écrit $a<b$ quand, de plus, a et b sont distincts. Comme $a^2 = (-a)^2$ quel que soit a dans L, P contient tous les carrés de L et, en particulier, l'élément unité 1 de L. Il en résulte immédiatement qu'un corps dans lequel (-1) est un carré n'est pas ordonnable. En revanche, il existe un critère important concernant les corps commutatifs ordonnables. C'est le théorème de Artin-Schreier

(voir [7]): la condition nécessaire et suffisante pour qu'un corps commutatif soit ordonnable est qu'il soit formellement réel. Par suite, nous pouvons affirmer que le corps de base peut être ordonné d'une manière au moins (théorème 3).

A priori, K peut même être ordonné de plusieurs manières différentes. Néanmoins, pour que K puisse être ordonné d'une manière unique, il suffit que l'ensemble des carrés de K possède dans K les quatre propriétés attribuées ci-dessus à la partie P du corps L. C'est ce que nous allons énoncer sous forme d'un axiome concernant l'ensemble des réflexions dans G.

Axiome P VI *(Axiome du compas). Soit* v *et* v′ *deux réflexions perpendiculaires et soit* Φ *et* Φ' *deux faisceaux de première classe contenant* v′. *Il existe deux réflexions perpendiculaires* r *et* s, *incidentes avec* v, r *étant dans* Φ *et* s *appartenant à l'un au moins des faisceaux* Φ' *et* vΦ'v.

Traduisons cet énoncé en langage de géométrie élémentaire. A et B étant deux points du plan, convenons d'appeler «cercle de diamètre AB» l'ensemble des points situés à l'intersection de deux droites perpendiculaires passant l'une par A et l'autre par B. L'axiome P VI dit ceci: si l'on prend deux droites perpendiculaires v et v', deux points A et B de v' et le symétrique B' de B relativement à v, alors la droite v coupe l'un au moins des deux cercles de diamètres AB et AB'. On postule ainsi la possibilité, dans certaines conditions, de reporter un segment donné d'un point donné à une droite donnée ne passant pas forcément par le point. C'est là un des axiomes les plus constructifs de la géométrie élémentaire. Nous allons montrer que cet axiome permet d'affirmer que le corps de base K peut être ordonné d'une manière unique.

Proposition 27. *L'axiome P VI est équivalent à l'affirmation suivante: quel que soit l'élément* α *du corps* K, *l'équation en* μ*:*

$$\mu^4 = \alpha^2 ,$$

a des solutions dans K.

Reprenons les éléments figurant dans l'énoncé de l'axiome P VI. Lorsque Φ contient v, cet axiome formule une banalité.

Plaçons-nous alors dans le cas où v n'est pas dans Φ. Désignons par m l'un des éléments bissecteurs de v et v', et par e l'élément de Φ perpendiculaire à v'. Introduisons dans le plan les coordonnées orthonormales relatives au système (v', v, m, e). Les faisceaux Φ, Φ' et $v\Phi'v$ sont respectivement homologues aux points $A(1, 0)$, $B(\alpha, 0)$ et $B'(-\alpha, 0)$, où α est susceptible d'être n'importe quel élément non nul de K. Soit:

$$(\bar{r}) \equiv \mu\xi + \eta - \mu = 0\,, \tag{1}$$

l'équation d'une droite $\bar{r}$ contenant le point A et coupant la droite $\bar{v}$ homologue à v. Soit:

$$\xi - \mu\eta - \varepsilon\alpha = 0\,, \qquad \varepsilon = \pm 1\,, \tag{2}$$

les équations des deux droites perpendiculaires à $\bar{r}$ et contenant B ou B' suivant que ε égale 1 ou -1. L'équation de $\bar{v}$ est:

$$(\bar{v}) = \xi = 0\,. \tag{3}$$

La condition nécessaire et suffisante pour que l'une des équations (2) soit compatible avec (1) et (3) est donnée par:

$$(\alpha + \mu^2)(\alpha - \mu^2) = 0\,.$$

La proposition se déduit immédiatement de là. C.Q.F.D.

Désignons par C l'ensemble des carrés de K. On a:

$$\begin{array}{ll} 1) & C \cup (-C) = K\,, \\ 2) & C \cap (-C) = \{0\}\,, \\ 3) & C + C = C\,, \\ 4) & C.C = C\,. \end{array}$$

1) découle de la proposition précédente; 2) est une conséquence immédiate de la proposition 25; 3) résulte du fait que K est pythagoricien; 4) est évident dans un corps commutatif. Il existe donc dans K un ordre pour lequel C constitue la partie positive. D'autre part, quel que soit l'ordre défini dans K, la partie positive doit contenir C. Par suite, K ne peut être ordonné que d'une seule manière.

Nous qualifierons de *positifs* les éléments de C et de *strictement positifs* les éléments non nuls de C. Étant donnés deux éléments α et β de K, nous écrirons $\alpha \leqq \beta$ ou $\alpha < \beta$ suivant que $\beta - \alpha$ est positif ou strictement positif. Nous appellerons *racine carrée* d'un élément positif α de K l'élément positif de K dont le carré égale α; nous la noterons $\alpha^{\frac{1}{2}}$. Il est clair que, dans K, tout élément positif admet une racine carrée et une seule.

Lorsque α et β sont deux éléments de K tels que $\alpha \leqq \beta$, on appelle *intervalle fermé* $[\alpha, \beta]$ l'ensemble des éléments ξ de K tels que $\alpha \leqq \xi \leqq \beta$. Cette notion peut être mise en relation avec celle de segment dans un système polaire. Soit v' une réflexion quelconque et soit a et b deux éléments distincts de $\Pi(v')$. On appelle *segment* $[a, b]$ l'ensemble des éléments z de $\Pi(v')$ tels qu'il existe deux réflexions perpendiculaires incidentes avec z et contenues l'une dans $\Phi(v', a)$, l'autre dans $\Phi(v', b)$. Si l'on introduit dans le plan des coordonnées orthonormales relativement à un système (v', v, m, e), les équations des droites $\bar{a}$ et $\bar{b}$ homologues à a et b sont:

$$(\bar{a}) \equiv \xi - \alpha = 0, \qquad (\bar{b}) \equiv \xi - \beta = 0,$$

où α et β sont deux éléments distincts de K. Si l'on suppose que $\alpha \leqq \beta$, le segment $[a, b]$ est l'ensemble des réflexions z dont les droites homologues $\bar{z}$ sont données par:

$$(\bar{z}) \equiv \xi - \zeta = 0,$$

où ζ appartient à l'intervalle $[\alpha, \beta]$.

Soit α et β deux éléments de K tels que $\alpha < \beta$. On appelle *intervalle ouvert* $]\alpha, \beta[$ l'ensemble des éléments ζ de K tels que $\alpha < \zeta < \beta$. On montre que les intervalles ouverts de K constituent la base d'une structure de corps topologique dans K. Le dernier axiome que nous allons poser précise cette structure.

3.2.

AXIOME P VII (Axiome d'Archimède). *A toute paire* (ξ, η) *d'éléments strictement positifs de* K, *on peut associer un entier naturel* n *tel que* $\eta < n\xi$.

On peut énoncer cet axiome en termes de R-groupes. Soit une réflexion s, deux éléments distincts quelconques a et b de $\Pi(s)$, ainsi que l'élément bissecteur u de a et b. On considère la suite de segments S_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$ définie de la manière suivante: $S_1 = [a, b]$; si $S_k = [a', b']$, on pose $S_{k+1} = [a'ua', b'ub']$. Alors la famille des segments S_i constitue un recouvrement de $\Pi(s)$. Nous n'insisterons pas sur ce point qui ne nous sera pas utile pour ce qui suit.

THÉORÈME 4. *Le corps de base* K *est isomorphe à un corps réel pythagoricien.*

Un corps réel est un sous-corps du corps R des nombres réels. Nous considérerons K et R comme des extensions du corps Q des nombres rationnels. On vérifie, comme nous l'avons fait pour K, que R peut être ordonné d'une manière et d'une seule. Il en est de même pour Q, comme on le voit sans peine. Par suite, les ordres induits dans Q par ceux de K et de R coïncident. Pour établir le théorème, nous allons faire usage de la notion de coupure de Dedekind dans Q. Rappellons-en quelques propriétés utiles pour la suite de la démonstration. On appelle coupure (M, P) du corps Q toute partition de Q en deux parties non vides M et P telles que, quels que soient $s \in M$ et $t \in P$, on ait $s < t$. A chaque coupure (M, P) de Q on peut associer un nombre réel a bien déterminé tel que l'on ait dans R:

$$\begin{aligned} x &\leq a & \forall x \in M\,, \\ a &\leq y & \forall y \in P\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Cela entraîne, en particulier, que:

$$a = \sup M = \inf P\,, \tag{2}$$

dans R. Si a et a' sont les nombres réels associés à deux coupures (M, P) et (M', P') respectivement, on peut écrire:

$$\begin{aligned} M \subset M' &\Rightarrow a \leqq a'\,, \\ P \subset P' &\Rightarrow a' \leqq a\,. \end{aligned} \tag{3}$$

qui sont des conséquences de (2). De plus:

$$\sup(M + M') = \inf(P + P') = a + a'\,. \tag{4}$$

Enfin, désignons par U_+ l'ensemble des éléments strictement positifs d'une partie U de Q; si M_+ et M'_+ ne sont pas vides:

$$\sup(M_+ . M'_+) = \inf(P.P') = aa' . \tag{5}$$

Cela rappelé, prenons un élément quelconque α dans K. En vertu de l'axiome d'Archimède, il existe un entier naturel m tel que α et $-\alpha$ soient tous deux strictement inférieurs à m. Par suite $-m<\alpha<m$; donc l'ensemble des nombres rationnels strictement inférieurs à α et celui des nombres rationnels strictement supérieurs à α ne sont pas vides. Désignons alors par $M(\alpha)$ l'ensemble des éléments de Q inférieurs ou égaux à α et ar $P(\alpha)$ l'ensemble des éléments de Q strictement supérieurs α. On associe ainsi à α une coupure $(M(\alpha), P(\alpha))$ de Q. Désignons par $f(\alpha)$ le nombre réel attaché à cette coupure. On voit immédiatement que $f(\alpha) = \alpha$ quand α est dans Q.

L'application f est une injection strictement croissante de K dans R. En effet, soit α et β deux éléments de K avec $\alpha<\beta$. Il existe un nombre naturel p tel que $2<p(\beta-\alpha)$. Par suite: $2.p^{-1} <\beta-\alpha$. Soit q le plus petit entier rationnel strictement supérieur à $p\beta$. Alors:

$$\frac{q-1}{p} \leqq \beta \quad ; \quad \alpha < \beta - \frac{2}{p} < \frac{q-2}{p} \cdot$$

De là: $f(\alpha) \leqq (q-2)p^{-1}$ et $(q-1)p^{-1} \leqq f(\beta)$. Donc $f(\alpha) < f(\beta)$.

Quels que soient α et β dans K, on peut écrire:

$$M(\alpha)+M(\beta) \subset M(\alpha+\beta)\,; \quad P(\alpha)+P(\beta) \subset P(\alpha+\beta)\,.$$

D'autre part:

$$\sup\,(M(\alpha)+M(\beta)) = \sup\, M(\alpha) + \sup\, M(\beta)\,,$$
$$\inf\,(P(\alpha)+P(\beta)) = \inf\, P(\alpha) + \inf\, P(\beta)\,.$$

On déduit alors de (2), (3) et (4) que $f(\alpha+\beta) = f(\alpha)+f(\beta)$. Donc f est un isomorphisme du groupe additif des éléments de K dans celui de R. En particulier, on peut écrire: $f(-\alpha) = -f(\alpha)$.

Quels que soient α et β dans K, $f(\alpha\beta) = f(\alpha)f(\beta)$. Le fait est évident quand l'un des deux éléments est nul. Considérons le cas où α et β sont strictement positifs dans K. En vertu de l'axiome d'Archimède, il existe un entier naturel r tel que $1<r\alpha$. Ainsi $r^{-1}<\alpha$, et l'ensemble $M_+(\alpha)$ des éléments strictement positifs de $M(\alpha)$ n'est pas vide. Il en est de même de $M_+(\beta)$. Or nous pouvons écrire:

$$M_+(\alpha).M_+(\beta) \subset M_+(\alpha\beta)\,; \qquad P(\alpha).P(\beta) \subset P(\alpha\beta)\,,$$

et comme:

$$\sup\bigl(M_+(\alpha).M_+(\beta)\bigr) = \bigl(\sup M_+(\alpha)\bigr).\bigl(\sup M_+(\beta)\bigr),$$
$$\inf\bigl(P(\alpha).P(\beta)\bigr) = \bigl(\inf P(\alpha)\bigr).\bigl(\inf P(\beta)\bigr),$$

les relations (2), (3) et (5) permettent d'affirmer que $f(\alpha\beta)$ égale $f(\alpha)f(\beta)$, dans ce cas. Lorsqu'on tient compte du fait que $f(-\alpha) = -f(\alpha)$, on voit que cette égalité est vraie quels que soient α et β dans K. Par suite, f est un isomorphisme du corps K dans le corps R. C.Q.F.D.

Il convient d'observer que la démonstration précédente ne fait pas usage de l'axiome P VI mais uniquement du fait que K est un corps formellement réel archimédien.

3.3. Terminons ce paragraphe en montrant que les sept axiomes que nous avons posés caractérisent les groupes euclidiens de dimension 2 sur les corps réels contenant la racine carrée de chacun de leurs éléments positifs.

Considérons un ensemble E et un corps commutatif ordonné L. On appelle *L-distance* sur E une application δ de $E\times E$ dans la partie positive de L telle que:

1) $\delta(a\,,b) = 0 \Leftrightarrow a = b \qquad a\,,b\in E\,,$
2) $\delta(a\,,b) = \delta(b\,,a) \qquad \forall a\,,b\in E\,,$
3) $\delta(a\,,b) \leq \delta(a\,,c) + \delta(b\,,c)\,; \qquad \forall a\,,b\,,c\in E\,.$

On appelle *L-isométrie* de E relativement à δ toute application f dans E dans lui-même telle que $\delta(f(a), f(b)) = \delta(a, b)$ quels que soient a et b dans E. Lorsque L est un corps réel, δ est une *distance* et f est une *isométrie* de E relativement à δ.

Revenons à un groupe G satisfaisant les cinq premiers axiomes. Le corps de base K qui lui est associé est formellement réel. En vertu du théorème de Artin-Schreier, on peut admettre que l'on a introduit dans K un ordre déterminé. Dans le plan relatif à G, nous avons considéré une fonction D à valeurs dans K et définie pour toute paire de points (P_1, P_2) (voir (4), 2.11).

Nous avons vu que $D(P_1, P_2)$ est un carré dans le corps K, qui est pythagoricien. Posons alors:

$$d(P_1, P_2) = (D(P_1, P_2))^{\frac{1}{2}}.$$

Il découle immédiatement des propriétés de D que d est invariante relativement à G et qu'elle satisfait les conditions 1) et 2) appliquées aux K-distances dans le plan. De plus, prenons trois points quelconques P_1, P_2 et P_3 et désignons par d_1, d_2 et d_3 les éléments $d(P_2, P_3)$, $d(P_3, P_1)$ et $d(P_1, P_2)$ respectivement. On voit sans peine que:

$$S(P_1, P_2, P_3) = (d_1 + d_2 + d_3)(-d_1 + d_2 + d_3)(d_1 - d_2 + d_3)(d_1 + d_2 - d_3),$$

où $S(P_1, P_2, P_3)$ est la quantité définie par (7) au n° 2.11. En vertu de la relation (8) figurant au même numéro, $S(P_1, P_2, P_3)$ est un carré dans K. Mais, dans l'égalité ci-dessus, trois au moins des facteurs apparaissant au second membre sont positifs; il en est alors de même du quatrième. Par suite:

$$d(P_1, P_2) \leq d(P_1, P_3) + d(P_2, P_3),$$

quels que soient les points P_1, P_2 et P_3. Donc d est une K-distance dans le plan. La proposition 26 permet d'affirmer que G est le groupe des K-isométries du plan relativement à d.

Lorsque l'axiome P VII est satisfait, d est une distance dans le plan. Si, de plus, l'axiome P VI est vérifié, on peut énoncer:

Théorème 5. *Tout groupe satisfaisant les axiomes* P I *à* P VII *est isomorphe à un groupe* GE(2, K), *où* K *est un corps réel contenant la racine carrée de chacun de ses éléments positifs.*

4. Critique du système des axiomes P I à P VII

4.1. Lorsqu'on expose une théorie mathématique, il convient d'examiner le système des axiomes adoptés sous le triple aspect de la consistance, de la catégoricité et de l'indépendance. La consistance — ou non-contradiction — des axiomes que nous avons posés est assurée par l'existence d'un modèle satisfaisant: la géométrie euclidienne plane continue, par exemple.

Un système d'axiomes consistant est dit *catégorique* lorsque deux quelconques des modèles qui le satisfont sont isomorphes, c'est-à-dire quand ces modèles ne diffèrent éventuellement que par la désignation des objets qui les composent (pour une complication adéquate de la question, voir [5]). Dans le cas qui nous occupe, nous savons que les axiomes posés caractérisent indirectement les corps réels contenant la racine carrée de chacun de leurs éléments positifs. Le plus petit S de ces corps est une extension algébrique de type infini du corps Q des nombres rationnels; il est donc dénombrable. Il en est de même du groupe $GE(2, S)$. Ce groupe ne saurait être isomorphe au groupe $GE(2, R)$ de la géométrie euclidienne plane continue. Ainsi notre système d'axiomes n'est pas catégorique. Il ne pouvait d'ailleurs l'être, étant donnée la définition que nous avons adoptée pour les géométries euclidiennes. Cependant il résulte du théorème 5 que le système des axiomes *P I* à *P VII* est équivalent à la définition que nous avons prise pour le groupe fondamental d'une géométrie euclidienne plane.

Reste l'indépendance des axiomes. Les axiomes d'un système consistant $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ sont *indépendants* si, quel que soit $i = 1, 2, \ldots, n$, on peut trouver un modèle satisfaisant les n-1 axiomes A_k pour lesquels $k \neq i$, mais ne vérifiant pas A_i. Remarquons d'emblée que notre système d'axiomes ne possède pas cette propriété qui, d'ordinaire, n'est obtenue qu'au dépens de la simplicité ou de la clarté. Ainsi plusieurs de nos axiomes n'ont de signification que si certains de ceux qui les précèdent sont satisfaits. On peut toutefois exiger des axiomes d'un système une indépendance relative dans le sens que voici: les axiomes d'un système consistant ordonné $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ sont *relativement indépendants* si, quel que soit $i = 2, 3, \ldots, n$, il existe un modèle satisfaisant le système $(A_1, A_2, \ldots, A_{i-1})$, mais ne vérifiant pas A_i. Nous allons montrer que c'est le cas de notre système.

Avant de passer à cet examen, formulons une dernière remarque d'ordre général. Ayant élaboré un système d'axiomes pour une théorie déterminée, on peut se proposer de réunir plusieurs axiomes consécutifs dans un même énoncé. C'est ce que nous avons fait dans le cas de l'axiome *P I*, par exemple, qui contient les axiomes du groupe, entre autres. L'exposé y gagne sans doute en simplicité, mais le procédé n'est pas orthodoxe du strict point de vue de l'axiomatique.

4.2. Examinons l'indépendance relative de l'axiome d'incidence *P II*. Considérons le groupe H des isométries propres de l'espace euclidien R^3. Il est engendré par l'ensemble E des demi-tours par rapport aux droites de R^3. H n'est pas un R-groupe relativement à E, car le produit de deux demi-tours d'axes perpendiculaires est encore un demi-tour. Formons alors le R-groupe H' naturellement associé à H (voir 1.1). Il est engendré par l'ensemble E' des éléments de la forme $a' = (a, -1)$, où a est dans E. Le groupe H ne se confond pas avec E; d'autre part, tout élément de H peut être obtenu en formant le produit de deux éléments convenablement choisis dans E. Il s'ensuit que H' est un R-groupe de dimension 2 engendré par E'.

Soit a, b et c trois éléments de E, et soit $a' = (a, -1)$, $b' = (b, -1)$ et $c' = (c, -1)$ les éléments de E' qui leur sont associés. Affirmer que $a'b'c'$ est dans E', c'est affirmer que abc est dans E, ce qui revient encore à dire que les axes des demi-tours a, b et c admettent au moins une perpendiculaire commune. Considérons alors dans l'espace R^3 quatre droites distinctes $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ et $\bar{d}$, telles que $\bar{b}$, $\bar{c}$ et $\bar{d}$ soient les côtés d'un triangle, que $\bar{a}$ et $\bar{b}$ soient parallèles et que le plan $(\bar{a}, \bar{b})$ soit perpendiculaire au plan $(\bar{b}, \bar{c})$. Soit a, b, c et d les demi-tours d'axes respectifs $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ et $\bar{d}$, et soit a', b', c' et d' les éléments de E' qui leur sont associés. On voit alors que $a'b'c'$ et $a'b'd'$ sont dans E' mais que $a'c'd'$ n'y est pas. Par suite, le R-groupe H' ne vérifie pas l'axiome d'incidence.

4.3. Passons à l'axiome de bissection P III. Considérons le R-groupe de l'icosaèdre régulier. A titre d'exercice, il est intéressant de décrire ce groupe d'ailleurs bien connu en utilisant le langage des R-groupes. Désignons par A l'un des sommets de l'icosaèdre, que nous supposons plongé dans l'espace euclidien R^3. Désignons par $BCDEF$ le pentagone convexe régulier déterminé par les extrémités des arêtes issues de A. Soit O le centre de l'icosaèdre et soit A', B', C', D', E' et F' les sommets respectivement opposés à A, B, C, D, E et F. Désignons par G le groupe des isométries de l'espace euclidien R^3 laissant invariant l'icosaèdre dans son ensemble. Ce groupe est évidemment fini.

Par chaque arête de l'icosaèdre, il passe un plan de symétrie de la figure. Désignons par Σ l'ensemble des quinze réflexions de l'espace R^3 ainsi introduites, deux arêtes opposées correspondant à une même réflexion. Quelle que soit la paire de sommets non opposés que l'on prenne dans l'icosaèdre, la réflexion envoyant l'un sur l'autre appartient à Σ.

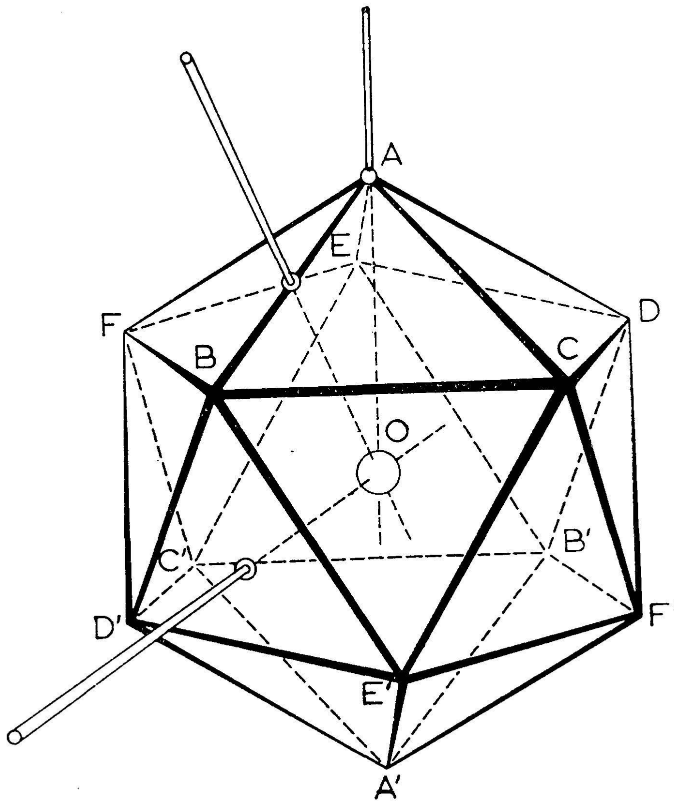

Fig. 11.

AB étant une arête quelconque, on peut trouver deux arêtes, DE et CF' par exemple, telles que AB, DE et CF' soit orthogonales deux à deux. Les réflexions attachées à ces trois arêtes ont pour produit la symétrie σ de centre O. Soit X un élément de G différent de σ. Il existe au moins un sommet, mettons A, que X n'envoie pas sur son opposé. Soit r l'élément de Σ envoyant $X(A)$ sur A. Quand $X \neq r$, l'un au moins des sommets B et C de la face ABC n'est pas fixe pour la transformation rX; admettons que $rX(B)$ est distinct de B. Ces deux sommets ne sont pas opposés: soit s l'élément de Σ qui envoie $rX(B)$ sur B. La transformation srX laisse fixes A et B. Lorsque $X \neq rs$, $srX(C)$ est distinct de C. La réflexion t associée dans Σ à l'arête AB envoie $srX(C)$ sur C. L'élément $tsrX$ appartient à G. Comme il laisse fixes les sommets A, B et C, il n'est autre que l'élément neutre de G. Par suite $X = rst$. D'autre part, Σ est distingué dans G.Il résulte donc de ce qui précède que G est un R-groupe de dimension 2 engendré par Σ.

La condition nécessaire et suffisante pour que trois éléments de Σ aient pour produit un élément de Σ est que les plans qui leur sont associés admettent une droite commune. Cela détermine une relation d'incidence dans Σ. Pour étudier les faisceaux dans Σ, combinons l'arête AB avec chacune des autres arêtes de l'icosaèdre, en nous bornant aux seuls couplages essentiellement différents.

Les arêtes AB et AC déterminent le faisceau des cinq éléments de Σ laissant fixe le point A. On peut attacher un tel faisceau à chaque paire de sommets opposés et nous désignerons par $\Phi(A)$ celui qui correspond à A (et A'). La réflexion associée à l'arête AB appartient encore au faisceau $\Phi(B)$.

Les réflexions correspondant à AB et $E'F'$ déterminent un faisceau contenant encore la réflexion associée à $C'D'$. Les plans de ces trois réflexions se coupent suivant la normale abaissée de O sur la face $BD'E'$. On peut ainsi attacher un faisceau de trois éléments à chaque paire de faces opposées; nous désignerons par $\Phi(BD'E')$ celui qui correspond aux faces $BD'E'$ et $B'DE$. La réflexion associée à AB appartient aux deux faisceaux $\Phi(BD'E')$ et $\Phi(ADE)$.

Les réflexions correspondant à AB et CF' déterminent un faisceau ne contenant pas d'autre réflexion. Leurs plans se coupent suivant la perpendiculaire abaissée de O sur AB. On peut attacher de la sorte un faisceau de deux éléments à toute paire d'arêtes opposées, et nous appellerons $\Phi(AB)$ celui qui correspond aux arêtes AB et $A'B'$.

Un décompte facile nous permet d'affirmer que nous avons ainsi épuisé tous les faisceaux auxquels appartient la réflexion relative à AB. Le R-groupe G, dont nous avons vu qu'il satisfait l'axiome d'incidence, ne satisfait pas l'axiome de bissection, puisqu'il contient des faisceaux formés de deux éléments distincts seulement.

Remarquons en passant que les faisceaux $\Phi(A)$ et $\Phi(BE')$ sont disjoints, tout comme les faisceaux $\Phi(BE')$ et $\Phi(ABC)$.

L'exemple précédent montre les interprétations géométriques que l'on peut faire intervenir assez naturellement dans l'étude des RI-groupes finis (voir [9]). Toutefois, on aurait pu le remplacer par des exemples plus simples tels que celui-ci: dans le plan euclidien continu, prenons trois points non alignés A, B et C. Considérons le groupe G' engendré par les demi-tours ayant pour centres A, B et C. C'est visiblement un R-groupe engendré par l'ensemble Σ' des demi-tours ayant pour centres les points d'un réseau plan: le réseau ayant pour maille génératrice le parallélogramme $ABCD$ construit sur ABC. Dans le plan, le produit de trois demi-tours est un demi-tour. L'axiome d'incidence est donc satisfait dans G' qui est un R-groupe de dimension 1. Le seul faisceau de Σ' est constitué par Σ' tout entier. Lorsque trois demi-tours x, y et z, les deux derniers étant distincts, sont tels que $y = xzx$, le centre de x est au milieu des centres de y et de z. Il en résulte que les demi-tours de centres A et B n'ont pas d'élément bissecteur dans Σ'.

A propos de ce dernier exemple, remarquons que les éléments impropres du R-groupe G' ne sont pas des isométries impropres, c'est-à-dire ne sont pas des éléments impropres du R-groupe $GE(2, R)$.

4.4. Passons à l'examen de l'axiome P IV. Considérons le groupe $GE(3, R)$ des isométries de l'espace euclidien R^3. C'est un R-groupe engendré par l'ensemble $\Sigma(3, R)$ des réflexions par rapport aux plans de l'espace R^3. Le produit de trois réflexions dans R^3 est une réflexion quand leurs plans ont une droite commune ou une normale commune. Cela définit manifestement une relation d'incidence dans $\Sigma(3, R)$. Deux réflexions distinctes dans R^3 admettent au moins un élément bissecteur, à savoir une réflexion transformant leurs plans l'un en l'autre. Cependant, $GE(3, R)$ ne vérifie pas l'axiome $P\ IV$, car il est bien connu qu'il est de dimension 3.

Nous avons observé à ce propos que tout RI-groupe satisfaisant l'axiome des faisceaux de première classe est de dimension 2 (voir prop. 4). En revanche, il existe des RI-groupes de dimension 2 ne contenant pas de faisceau de première classe: le R-groupe de l'icosaèdre en est un exemple.

L'indépendance relative de l'axiome d'Euclide est assurée par l'existence de la géométrie elliptique plane continue, comme nous l'avons déjà remarqué (nº 2.1).

4.5. Pour critiquer les deux derniers axiomes, nous utiliserons le fait que les cinq axiomes précédents caractérisent les corps formellement réels pythagoriciens. L'indépendance relative de l'axiome *P VI* sera établie lorsque nous aurons donné l'exemple d'un corps formellement réel pythagoricien dans lequel il existe des éléments positifs qui ne sont pas des carrés. Bien qu'il soit possible de trouver des exemples plus simples, nous allons construire un tel corps à l'aide de séries formelles (voir [6] et [8]).

Prenons une lettre T avec laquelle nous formons l'ensemble L des séries formelles:

$$\alpha = \sum_{i \in Z} a_i T^i \quad , \quad a_i \in R , \tag{1}$$

où i est un indice parcourant l'ensemble Z des entiers rationnels, et où les coefficients a_i sont des nombres réels, égaux à zéro sauf éventuellement pour un nombre fini ou non de valeurs de i supérieures à un certain entier rationnel dépendant de l'élément choisi dans L. L'élément nul de L, que nous noterons O, est celui dont tous les coefficients sont nuls. Pour un élément α non nul de L, soit n la plus petite valeur de i pour laquelle $a_i \neq O$; n est l'*ordre* de α, et a_n est le *coefficient dominant* de α. Par convention, l'ordre de O est infini. Nous assimilerons à R les éléments de L ayant la forme $a_0 T^0$. On introduit dans L une structure de groupe abélien noté additivement en posant:

$$\sum_{i \in Z} a_i T^i + \sum_{i \in Z} b_i T^i = \sum_{i \in Z} (a_i + b_i) T^i . \tag{2}$$

On définit une multiplication dans L en posant:

$$\Big(\sum_{i \in Z} a_i T^i\Big) \cdot \Big(\sum_{i \in Z} b_i T^i\Big) = \sum_{i \in Z} c_i T^i ; \quad c_i = \sum_{r+s=i} a_r b_s . \tag{3}$$

Il résulte immédiatement de cette définition que la multiplication est associative, commutative et distributive par rapport à l'addition; l'élément 1 est neutre vis-à-vis de la multiplication. D'autre part, si α et β sont deux éléments non nuls de L, l'ordre du produit $\alpha\beta$ est la somme des ordres de α et β; le coefficient principal de $\alpha\beta$ est le produit de ceux de α et β. Il s'ensuit que L est un anneau d'intégrité commutatif avec élément unité.

L est même un corps commutatif. Pour le montrer, on peut procéder par voie topologique, entre autres. On introduït une valuation dans L en posant $|O| = O$ et $|\alpha| = 2^{-n}$, où n est l'ordre de l'élément non nul α. En effet, on voit que:

$$|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|\,; \quad |\alpha+\beta| \leq \max(|\alpha|, |\beta|)\,; \quad \forall \alpha, \beta \in L,$$

et que $|\xi| = O$ dans le seul cas où ξ est nul. On peut alors construire une distance d dans L en posant:

$$d(\alpha, \beta) = |\beta - \alpha|.$$

Comme on le voit sans peine, cette distance définit dans L une structure de groupe additif métrisable complet. On peut même utiliser le critère de convergence suivant: la condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite $(\alpha_k) = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ d'éléments de L converge est que $d(\alpha_{k+1} - \alpha_k)$ tende vers zéro lorsque k tend vers l'infini. Il en résulte que, quelle que soit la suite (β_k) d'éléments de L convergeant vers O, la suite (γ_r) définie par:

$$\gamma_r = \sum_{k=o}^{k=r} \beta_k\,,$$

converge dans L; sa limite est désignée par $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \beta_k$.

Prenons dans L un élément α d'ordre fini n et de coefficient principal a_n. On peut le mettre sous la forme:

$$\alpha = a_n T^n (1-\delta)\,,$$

où δ est un élément de L d'ordre au moins égal à 1. La suite des puissances naturelles de δ tend vers O dans L. Il en est de même de la suite des éléments $(1-\delta)\delta^k$, où $k = O, 1, 2, \ldots$ Par conséquent, l'expression:

$$(1-\delta) \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k\,,$$

a un sens. Un calcul facile montre qu'elle représente l'élément unité de L. Il en découle immédiatement que α possède un inverse dans L, qui n'est autre que:

$$\alpha^{-1} = a_n^{-1} T^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k . \tag{4}$$

Donc L est un corps.

Ordonnons L en choisissant comme partie positive P l'ensemble des éléments dont le coefficient principal est strictement positif dans R, auxquels nous adjoignons l'élément O. P possède bien les propriétés indiquées au n° 3.1, et nous convenons de noter $\alpha \leqq \beta$ lorsque α et β sont deux éléments de L tels que $\beta - \alpha$ appartient à P. L'ensemble des carrés non nuls de L se confond avec celui des éléments strictement positifs d'ordre pair. En effet, si $\alpha \in L$ est d'ordre n et de coefficient principal a_n, α^2 est d'ordre $2n$ et son coefficient principal est a_n^2. Réciproquement, prenons dans L l'élément:

$$\beta = \sum_{j \in Z} b_j T^j ; \quad b_{2m} > 0 , \; b_k = 0 \quad \forall k < 2m .$$

Il existe dans L un élément $\gamma = \sum_{k \in Z} c_k T^k$ dont le carré égale β. On l'obtient en résolvant la suite d'équations:

$$c_m^2 = b_{2m} ; \quad 2 c_m c_{m+1} = b_{2m+1} ,$$

$$2 c_m c_{m+j} = b_{2m+j} - \sum_{k=m+1}^{k=m+j-1} c_k c_{2m+j-k} , \quad j = 2 , 3 , \ldots$$

et en posant $c_k = O$ pour tout $k < m$; de la sorte, on obtient d'ailleurs deux solutions opposées dans L. Il résulte immédiatement de là que la somme de deux carrés dans L est encore un carré et que -1 n'est pas un carré dans L. Donc L est formellement réel et pythagoricien. En revanche, il existe dans L des éléments positifs qui ne sont pas des carrés, comme l'élément T par exemple.

4.6. Passons à l'axiome *P VII*. Pour en montrer l'indépendance relative, nous nous proposons de donner l'exemple d'un corps commutatif ordonné non archimédien dans lequel tout élément positif est un carré. Prenons une lettre U et formons l'ensemble $\dot{M}$ des séries formelles:

$$\dot{\alpha} = \sum_{i \in Z} a_i \, U^{i.2^{-p}} \qquad a_i \in R\,, \tag{5}$$

où les coefficients a_i sont des nombres réels, nuls sauf pour un nombre fini ou non de valeurs de i supérieures à un certain entier rationnel dépendant de $\dot{\alpha}$, et où p est un entier rationnel non négatif dépendant lui aussi de $\dot{\alpha}$. On peut encore obtenir tous les éléments de $\dot{M}$ en remplaçant T par $U^{(2^{-p})}$ dans l'expression (1) des éléments du corps L, p prenant toutes les valeurs entières rationnelles non négatives. Dans l'expression (5), p est le *poids* de $\dot{\alpha}$. Si n est la plus petite valeur de i pour laquelle $a_i \neq O$, a_n est le *coefficient principal* de $\dot{\alpha}$.

Considérons comme équivalents deux éléments de $\dot{M}$ dont les développements sont formés des mêmes termes. Ainsi, on obtient tous les éléments de $\dot{M}$ équivalents à $\dot{\alpha}$ et de poids supérieurs à p en posant:

$$\alpha' = \sum_{j \in Z} a'_j \, U^{j.2^{-(p+r)}}\,; \quad a'_j = \begin{cases} a_i & \text{si} \quad j = i.2^r\,, \\ 0 & \text{si} \quad pgcd(j\,,\, 2^r) \neq 2^r\,, \end{cases}$$

où r parcourt l'ensemble des nombres naturels. Appelons M l'ensemble des classes de $\dot{M}$ pour la relation d'équivalence que nous venons de définir. L'élément O de $\dot{M}$, dont le poids peut être considéré comme indéterminé, constitue une classe à lui seul. Si $\bar{\alpha}$ est la classe contenant l'élément non nul $\dot{\alpha}$ donné par (5), nous dirons que $\dot{\alpha}$ est un *représentant* de poids p de $\bar{\alpha}$. Tous les éléments de la classe $\bar{\alpha}$ ont le même coefficient principal, que nous appellerons *coefficient principal* de $\bar{\alpha}$. A tout couple d'éléments $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ de M, on peut associer au moins un couple de représentants $\dot{\alpha}$ et $\dot{\beta}$ de même poids. On définit alors la somme et le produit de $\dot{\alpha}$ et $\dot{\beta}$ à l'aide des relations (2) et (3), où l'on pose $T = U^{(2^{-s})}$, s étant le poids commun de $\dot{\alpha}$ et $\dot{\beta}$. Les expressions trouvées sont équivalentes à celles que l'on obtiendrait en remplaçant $\dot{\alpha}$ et $\dot{\beta}$ par des éléments respectivement équivalents, de poids commun s'. Par passage au quotient, on définit manifestement une addition et une multiplication dans M. Les considérations faites au sujet de L montrent que M constitue un corps commutatif pour les opérations indiquées.

On ordonne M en considérant comme strictement positifs les éléments dont le coefficient principal est strictement positif dans R. Prenons un tel élément $\bar{\beta}'$. Soit

$$\dot{\beta}' = \sum_{i \in Z} b_i' \, U^{i.2^{-q}},$$

un représentant de $\bar{\beta}'$, où $b_i' = O$ quand $i < m$, et $b_m' > O$. On peut former un autre représentant $\dot{\beta}$ de $\bar{\beta}$ en posant:

$$\dot{\beta} = \sum_{j \in Z} b_j \, U^{j.2^{-(q+1)}},$$

où $b_{2i} = b_i'$ et $b_{2i+1} = O$, quel que soit i. Associons à $\dot{\beta}$ l'élément β du corps L défini par:

$$\beta = \sum_{j \in Z} b_j \, T^j .$$

Cet élément est strictement positif dans L et son ordre est pair. Il existe donc dans L un élément

$$\gamma = \sum_{k \in Z} c_k \, T^k,$$

dont le carré égale β. Il résulte de là que l'élément $\bar{\gamma}$ de M ayant pour représentant:

$$\dot{\gamma} = \sum_{k \in Z} c_k \, U^{k.2^{-(q+1)}},$$

admet pour carré l'élément $\bar{\beta}$. Donc tout élément positif de M est un carré.

Cependant, le corps M n'est pas archimédien. Désignons par $\bar{\varepsilon}$ et $\bar{\varphi}$ les éléments de M admettant pour représentants respectifs U^0 et U^{-1}. Quel que soit l'entier naturel n, on a $n\bar{\varepsilon} < \bar{\varphi}$.

4.7. Nous aurions pu permuter les deux derniers axiomes. Autrement dit, l'axiome $P\ VI$ est indépendant du système constitué par les six autres axiomes. En effet, les axiomes $P\ I$ à $P\ V$ ainsi que l'axiome $P\ VII$ caractérisent les corps réels pythagoriciens, comme on l'a vu. Soit Ω le plus petit d'entre eux (suivant la désignation adoptée par Hilbert). Le plan euclidien Π_Ω relatif à Ω peut être assimilé à une partie du plan euclidien Π_R relatif au corps R des nombres réels: ayant introduit dans Π_R un système de coordonnées orthonormales, on désigne par A et B les points de coordonnées (0, 0) et (1, 0); Π_Ω est l'ensemble des points de Π_R dont les coordonnées sont dans Ω. Mais Π_Ω est également l'ensemble des points de Π_R que l'on peut construire à partir de A et B par un nombre fini d'opérations à la règle et au transporteur de distances — ce dernier instrument permettant uniquement de reporter un segment connu sur une droite connue, à partir d'un point connu de cette droite. Or il existe des constructions possibles à la règle et au compas qui ne le sont pas à la règle et au transporteur de distances (comme la recherche d'un cercle tangent à trois cercles connus) (voir [15]). Il en résulte que l'axiome du compas n'est pas vérifié dans le groupe des isométries de Π_Ω.

4.8. Pour terminer, revenons à l'axiome d'Euclide. Nous avons montré que dans un groupe satisfaisant les cinq premiers axiomes les demi-tours engendrent un R-groupe de dimension 1 (corollaire prop. 13). Pourrait-on substituer cette affirmation à l'axiome $P\ V$? Il n'en est rien, comme le montre l'exemple suivant.

Soit L le corps des séries formelles à une lettre T sur le corps R des nombres réels, tel qu'il a été introduit au n⁰ 4.5. Soit A l'ensemble des éléments de L dont l'ordre n est tel que $o \leqq n \leqq \infty$. C'est un sous-anneau de L. Le groupe $GE(2, L)$ obtenu en substituant L à K dans la définition de $GE(2, K)$ satisfait les cinq premiers axiomes. Dans le plan L^2, on peut introduire les notions de droite, de parallélisme, de perpendicularité, de point milieu comme en géométrie élémentaire.

Le *plan* A^2 est une partie du plan L^2. Nous appellerons *droite de* A^2 toute droite de L^2 contenant un point de A^2. Pour qu'une droite d'équation:

$$ax+by+c = 0 \qquad a, b, c \in L; \quad (a, b) \neq (0, 0),$$

appartienne à A^2, il faut et il suffit que $c(a^2+b^2)^{-\frac{1}{2}} \in A$. Deux droites de A^2, perpendiculaires dans L^2, se coupent en un point de A^2. La réflexion de L^2 suivant une droite de A^2 applique A^2 sur lui-même. Le groupe des isométries de L^2 appliquant A^2 sur lui-même est isomorphe au groupe obtenu en substituant A à K dans la définition de $GE(2, K)$. Nous le désignerons par $GE(2, A)$. Il est engendré par l'ensemble $\Sigma(2, A)$ des réflexions de L^2 suivant les droites de A^2.

$(GE(2, A), \Sigma(2, A))$ est un RI-groupe. Trois droites de A^2 sont incidentes quand elles contiennent un même point de L^2 ou quand elles sont perpendiculaires à une même droite de L^2. L'axiome de bissection est satisfait dans $GE(2, A)$. En effet, soit a et b deux droites distinctes de A^2. En tant que droites de L^2, elles admettent au moins une bissectrice u. Si a et b se coupent en un point P de A^2, u passe par P et appartient donc à A^2. Si a et b sont parallèles, u contient le milieu M de toute paire de points de A^2 pris l'un sur a et l'autre sur b. Comme M est dans A^2, u appartient à A^2. Il reste à examiner le cas où a et b se coupent en un point de L^2 n'appartenant pas à A^2. On peut se borner au cas où a et b ont les équations suivantes (voir (1), n° 1.4):

$$(b) \equiv x = 0\,,$$
$$(a) \equiv mx - y + h = 0\,; \quad m\,, h \in L; \quad h \notin A\,; \quad h(1+m^2)^{-\frac{1}{2}} \in A\,.$$

Dans L^2, les bissectrices de a et b sont données par les équations:

$$(m \pm \sqrt{1+m^2})\,x - y + h = 0\,.$$

Pour que l'une de ces droites appartienne à A^2, il faut que l'un des éléments:

$$h(1+m^2)^{-\frac{1}{2}}\,.\,[(1+m^2)^{\frac{1}{2}} \pm m]^{-1}\,,$$

soit dans A. Pour cela, il suffit que l'un des éléments k_1 et k_2 donnés par $(\sqrt{1+m^2} \pm m)^{-1}$ soit dans A. Par hypothèse, h est d'ordre $-r$ dans L, où $r > o$. Comme la droite b appartient à A^2, m est d'ordre $-s$, où $s \geqslant r$. Par suite $\sqrt{1+m^2}$ est d'ordre $-s$, et l'un des éléments k_1 et k_2 est d'ordre positif s; il est dans A. L'une des deux bissectrices de a et b appartient donc à A^2; on vérifie aisément que ce n'est pas le cas pour l'autre.

Dans $\Sigma(2, A)$, un faisceau de première classe est l'ensemble des réflexions de L^2 suivant les droites de A^2 contenant un même point de A^2. Il existe deux familles de faisceaux de seconde classe: les systèmes polaires et les faisceaux singuliers; un faisceau singulier est constitué par les réflexions de L^2 suivant les droites de A^2 passant par un même point de L^2 n'appartenant pas à A^2.

Tout élément de $\Sigma(2, A)$ appartient à un seul système polaire. On peut en déduire que la proposition 13, qui ne s'appuie que sur cette partie de l'axiome d'Euclide, est encore vraie ici. Il en est de même de son corollaire. Nous avons donc construit un exemple de géométrie satisfaisant les quatre premiers axiomes ainsi que le corollaire de la proposition 13, mais ne vérifiant pas l'axiome d'Euclide. De plus, dans le groupe $GE(2, A)$, chaque réflexion appartient à une infinité de faisceaux de seconde classe, dont un seul système polaire. Cela montre que l'on n'épuise pas toutes les possibilités en énonçant les hypothèses *a*), *b*) et *c*) indiquées au n⁰ 2.1.

5. Axiomes de la géométrie euclidienne à plus de deux dimensions

5.1. Désignons par $(K_i)_{i \in J}$ la famille des corps réels contenant la racine carrée de chacun de leurs éléments positifs, J étant un ensemble convenable d'indices. Pour chaque entier naturel n $GE(n, K_i)$ désigne le groupe des isométries de l'espace K_i^n muni de la métrique euclidienne ordinaire. C'est un R-groupe engendré par l'ensemble $\Sigma(n, K_i)$ des réflexions par rapport aux hyperplans dans K_i^n. Les axiomes considérés jusqu'ici concernent les groupes $GE(2, K_i)$. Nous nous proposons de formuler un système d'axiomes caractérisant les groupes $GE(n, K_i)$, $i \in J$ et $n > 2$. Toutefois, pour utiliser les résultats obtenus pour $n = 2$ et pour éviter des répétitions, nous procéderons par récurrence sur n.

Auparavant, précisons quelques points. Soit (G, Σ) et (G', Σ') deux R-groupes G et G' respectivement engendrés par des parties distinguées Σ et Σ'. Ils seront dits « isomorphes en tant que R-groupes » lorsqu'il existe un isomorphisme du groupe G sur le groupe G' qui applique Σ sur Σ'. Dans un R-groupe (G, Σ), nous désignerons comme d'habitude par $\Pi(s)$ le système polaire de la réflexion $s \in \Sigma$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de Π perpendiculaires à s, soit encore l'ensemble des réflexions distinctes de s qui commutent avec elle. L'ensemble $\Pi(s)$ engendre un R-groupe $\pi(s)$ appelé *groupe polaire* de s, dans lequel $\Pi(s)$ est distingué. En tant que R-groupe, $\pi(s)$ est toujours considéré comme étant engendré par $\Pi(s)$.

Posons maintenant nos axiomes. Désignons par (G_2, Σ_2) un R-groupe satisfaisant les sept axiomes $P\ I$ à $P\ VII$; n étant un entier naturel susceptible de prendre toutes les valeurs supérieures à 2, considérons la famille de R-groupes (G_n, Σ_n) satisfaisant les axiomes suivants:

AXIOME E_n I. *(G_n, Σ_n) est un RI-groupe.*

AXIOME E_n II. *Dans Σ_n, l'intersection de deux systèmes polaires contient une réflexion* s *dont le groupe polaire est isomorphe, en tant que* R-*groupe, à un groupe* $(\mathrm{G}_{n-1}, \Sigma_{n-1})$.

Pour l'instant, il faut considérer l'expression $(G_{n'}, \Sigma_{n'})$ comme une désignation générique. Nous montrerons que, pour chaque valeur de n', il y a identité de l'ensemble des R-groupes (G_n', Σ_n') avec celui des R-groupes $GE(n', K_i)$, avec $i \in J$.

La récurrence portera sur n', que nous appellerons l'*échelon*. Notons à ce propos qu'elle se présentera sous deux formes: la récurrence « locale » intervenant au cours d'une démonstration isolée; la récurrence « globale » par laquelle on affirme la validité d'une proposition aux échelons inférieurs à n, réservant à plus tard le soin de démontrer qu'elle est aussi vraie à l'échelon n. Une telle hypothèse générale de récurrence sera repérée par une lettre majuscule. Ainsi, pour commencer, nous admettrons qu'à tout échelon n' tel que $2 \leqq n' \leqq n\text{-}1$:

(A) Il existe deux *espèces* de faisceaux dans $\Sigma_{n'}$. A tout élément a d'un faisceau de première espèce Φ' correspond un élément de Φ' perpendiculaire à a, et un seul. De deux éléments distincts de Φ', on dit qu'ils *se coupent* ou qu'ils sont *sécants*; ils possèdent exactement deux éléments bissecteurs. Un faisceau de deuxième espèce Φ'' ne contient pas de paire d'éléments perpendiculaires. Deux éléments de Φ'' sont dits *parallèles*; quand ils sont distincts, ils admettent un élément bissecteur unique.

Tous ces faits sont vrais pour $n' = 2$; dans ce cas, les faisceaux de première (resp. deuxième) espèce coïncident avec ce que nous avons appelé les faisceaux de première (resp. deuxième) classe. Cependant, pour $n' > 2$, il convient de changer de terminologie; on peut montrer que, quel que soit le faisceau Φ dans $\Sigma_{n'}$, on peut trouver un faisceau disjoint de Φ.

L'axiome E_n *II* affirme, entre autres choses, qu'il existe dans Σ_n une réflexion s dont le groupe polaire $\pi(s)$ est isomorphe, en tant que R-groupe, à un certain groupe (G_{n-1}, Σ_{n-1}). Il est facile de voir qu'il en est de même pour tout autre élément t de Σ_n. En effet, d'après l'axiome E_n *II*, il existe une réflexion u perpendiculaire à s et t, et dont le groupe polaire est isomorphe, en tant que R-groupe, à un certain groupe (G_{n-1}, Σ_{n-1}) qui satisfait l'axiome de bissection, en vertu de (A). Il existe donc dans Σ_n un élément bissecteur m de s et t. L'application $X \to mXm$ détermine visiblement un isomorphisme de $\pi(s)$ sur $\pi(t)$, au sens des R-groupes.

On déduit d'abord de là que dans (G_n, Σ_n) l'axiome de bissection est satisfait. De plus, quand la réflexion s parcourt Σ_n, le groupe polaire $\pi(s)$ reste constamment isomorphe, en tant que R-groupe, au même groupe (G_{n-1}, Σ_{n-1}). Il en résulte, en particulier, que dès que l'on choisit un exemplaire bien déterminé dans la famille des groupes (G_n, Σ_n), on fixe en même temps toute une chaîne de groupes (G_n', Σ_n'), où $2 \leq n' \leq n\text{-}1$. Nous pouvons alors considérer que chacun des symboles (G_n', Σ_n'), où $2 \leq n' \leq n$, désigne désormais un R-groupe bien déterminé. D'autre part, nous pouvons remplacer l'axiome E_n *II* par les deux axiomes suivants:

Axiome E_n' II. *Lorsque* s *parcourt* Σ_n, *le groupe polaire* π(s) *reste constamment isomorphe, en tant que* R-*groupe, au groupe* (G_{n-1}, Σ_{n-1}).

Axiome E_n' III. *Dans* Σ_n, *l'intersection de deux systèmes polaires n'est pas vide.*

Par la suite, nous noterons $G_{n'}$ à la place de $(G_{n'}, \Sigma_{n'})$ lorsqu'aucune confusion n'en résultera. La possibilité de répartir les faisceaux de Σ_n en deux espèces comme on le fait aux échelons inférieurs va résulter de la proposition suivante.

PROPOSITION 28. *Soit* a *et* b *deux réflexions distinctes perpendiculaires à un même élément* u *de* Σ_n. *Toute réflexion incidente avec* a *et* b *est aussi perpendiculaire à* u.

Montrons d'abord que u n'appartient pas à $\Phi(a, b)$. Désignons par $\Phi(a, b; u)$ le faisceau déterminé par a et b dans le système polaire $\Pi(u)$. C'est aussi l'intersection de $\Phi(a, b)$ et $\Pi(u)$. Si u appartenait à $\Phi(a, b)$, uab serait dans $\Phi(a, b; u)$; par suite, a et b seraient perpendiculaires (lemme prop. 11); comme l'élément uab commute avec a et b, il devrait coïncider avec l'une de ces deux réflexions, contrairement aux hypothèses.

Comme u n'appartient pas à $\Phi(a, b)$ et qu'il est perpendiculaire à a et b, on peut affirmer que tout élément de $\Phi(a, b)$ est perpendiculaire à u (lemme prop. 5). C.Q.F.D.

COROLLAIRE. *Tout faisceau de* Σ_n *coïncide avec un faisceau pris dans un certain système polaire.*

Par suite, toutes les propriétés que nous avons énoncées au sujet des faisceaux dans $\Sigma_{n'}$, où n' varie de 2 à n-1, sont vraies dans Σ_n, et nous pouvons faire usage des désignations qui les concernent. Par ailleurs, l'espèce d'un faisceau est invariante vis-à-vis des automorphismes intérieurs de G_n.

5.2. Nous qualifierons de *close* toute partie de l'ensemble Σ engendrant un RI-groupe (G, Σ) qui est fermée pour la relation d'incidence. La partie vide de Σ et les parties de Σ réduites à un seul élément sont considérées comme closes. Les parties closes C de Σ qui comportent plus d'un élément sont caractérisées par le fait suivant: si a et b sont deux éléments distincts de C, alors $\Phi(a, b)$ est contenu dans C. Ainsi Σ est close, par exemple. L'intersection d'une famille de parties closes de Σ est close. La *clôture* $C(F)$ d'une partie F de Σ est l'intersection des parties closes de Σ qui contiennent F. En particulier, nous désignerons par $C(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ la clôture d'un ensemble fini d'éléments a_1, $a_2, \ldots, a_r$ de Σ. La proposition 28 peut s'énoncer en disant que, dans Σ_n, tout système polaire est clos.

Nous allons admettre le fait suivant

(B) Quel que soit s dans $\Sigma_{n'}$, la clôture de $\Pi(s) \cup \{s\}$ est confondue avec $\Sigma_{n'}$, où $2 \leqq n' \leqq n$-1.

Le fait est manifestement vrai pour $n' = 2$. Dans ce cas, en effet, $\Pi(s)$ est un faisceau de deuxième classe. La clôture de $\Pi(s) \cup \{s\}$ contient évidemment tous les faisceaux de première classe auxquels appartient s, et par suite tous les éléments de Σ_2 qui coupent s. Comme tout élément de Σ_2 appartient à un faisceau déterminé par deux éléments de Σ_2 coupant s, $\Pi(s) \cup \{s\}$ est confondu avec Σ_2.

Proposition 29. *L'intersection des systèmes polaires* $\Pi(\mathrm{a})$ *et* $\Pi(\mathrm{b})$ *de deux éléments sécants* a *et* b *de* Σ_n *est un système polaire dans* $\Pi(\mathrm{a})$ *et dans* $\Pi(\mathrm{b})$.

Comme a et b se coupent, il existe dans $\Phi(a, b)$ un élément c perpendiculaire à a. En vertu de la proposition 28, tout élément perpendiculaire à a et b l'est aussi à a et c, et réciproquement. L'ensemble des éléments de Σ_n perpendiculaires à a et c est manifestement un système polaire dans $\Pi(a)$. Il en est évidemment de même dans $\Pi(b)$. C.Q.F.D.

Proposition 30. *La condition nécessaire et suffisante pour que deux éléments de* Σ_n *soient parallèles est que leurs systèmes polaires coïncident.*

Procédons par récurrence. Admettons que la proposition est vraie aux échelons inférieurs à n. Nous savons qu'elle l'est à l'échelon 2.

Soit a et b deux éléments parallèles de Σ_n. Il existe une réflexion s perpendiculaire à a et b. Dans $\Pi(s)$, a et b sont parallèles, et l'hypothèse de récurrence que nous venons d'énoncer permet d'affirmer que tout élément de $\Pi(s)$ perpendiculaire à a l'est aussi à b. Donc l'ensemble des réflexions perpendiculaires à a et b contient s ainsi que le système polaire de s dans $\Pi(a)$. Or il résulte de la proposition 28 que l'intersection des systèmes polaires de a et b est close. On peut alors déduire de l'hypothèse de récurrence (B) que cette intersection se confond avec $\Pi(a)$. Par raison de symétrie $\Pi(a)$ et $\Pi(b)$ coïncident.

Réciproquement, deux réflexions a et b dont les systèmes polaires coïncident sont parallèles, en vertu de la proposition 29.

C.Q.F.D.

Proposition 31. *Soit* a *et* s *deux réflexions non perpendiculaires dans* Σ_n. *La clôture de* $\Pi(s) \cup \{a\}$ *est* Σ_n .

Montrons d'abord que la clôture de $\Pi(s) \cup \{s\}$ est Σ_n. Prenons dans Σ_n un élément quelconque u, que l'on peut supposer distinct de s, sans restriction. Il existe dans $\Pi(s)$ un élément v perpendiculaire à u. Soit m un élément bissecteur de s et v; il appartient à la clôture de $\Pi(s) \cup \{s\}$. D'autre part, la réflexion mum est distincte de m, car m, qui n'est pas perpendiculaire à v, est distinct de u. De plus, mum est perpendiculaire à $s = mvm$. Comme u appartient au faisceau $\Phi(m, mum)$, il est contenu dans la clôture de $\Pi(s) \cup \{s\}$.

Soit maintenant une réflexion a non perpendiculaire à s. Lorsque a est parallèle à s, les systèmes polaires de a et s coïncident et il résulte de ce qui précède que la clôture de $\Pi(s) \cup \{a\}$ est Σ_n. Lorsque a coupe s, il existe dans $\Phi(a, s)$ un élément b perpendiculaire à s et distinct de a, par hypothèse. Le faisceau $\Phi(a, b)$, qui contient s, est lui-même contenu dans la clôture de $\Pi(s) \cup \{a\}$. Il en résulte immédiatement que la clôture de $\Pi(s) \cup \{a\}$ contient celle de $\Pi(s) \cup \{s\}$ et que, par suite, elle se confond avec Σ_n. C.Q.F.D.

Avant de passer aux propositions suivantes, formulons une remarque. Dans Σ_2, il existe des couples de réflexions perpendiculaires. Admettons que l'on puisse trouver n-1 réflexions deux à deux perpendiculaires dans Σ_{n-1}. Soit s un élément quelconque de Σ_n. Il existe dans $\Pi(s)$ n-1 réflexions perpendiculaires deux à deux. Nous pouvons donc affirmer qu'il est possible de trouver n réflexions deux à deux perpendiculaires dans Σ_n, l'une d'elles étant d'ailleurs arbitrairement choisie. Nous pouvons compléter ce résultat.

Proposition 32. *Dans Σ_n, l'intersection des systèmes polaires de (n-1) réflexions perpendiculaires deux à deux est un faisceau de deuxième espèce.*

L'affirmation est banale à l'échelon 2. Elle est vraie à l'échelon 3, où elle découle de la proposition 29. Admettons donc qu'elle a été démontrée à l'échelon n-1. Désignons par $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ n-1 éléments de Σ_n perpendiculaires deux à deux. L'intersection A_j de $\Pi(a_j)$ et $\Pi(a_{n-1})$, où $j = 1, 2, \ldots, n$-2, est un système polaire dans $\Pi(a_{n-1})$ en vertu de la proposition 29. L'intersection des systèmes polaires $\Pi(a_i)$, où $i = 1, 2, \ldots, n$-1, se confond avec celle des ensembles A_j, où $j = 1, 2, \ldots, n$-2. Or cette dernière est un faisceau de deuxième espèce Φ'' dans $\Pi(a_{n-1})$ en vertu de l'hypothèse de récurrence. La conclusion découle du fait que Φ'' est aussi un faisceau de deuxième espèce dans Σ_n. C.Q.F.D.

Corollaire. *La condition nécessaire et suffisante pour que deux réflexions soient parallèles dans Σ_n est que leurs systèmes polaires aient en commun n-1 éléments perpendiculaires deux à deux.*

Proposition 33. *Dans Σ_n, l'intersection d'un faisceau de première espèce et d'un système polaire n'est pas vide.*

La proposition est vraie à l'échelon 2. Admettons qu'elle a été démontrée à l'échelon n-1, où $n > 2$ comme jusqu'ici. Soit Φ' un faisceau de première espèce et s un élément quelconque de Σ_n. Nous voulons prouver que l'intersection de Φ' et $\Pi(s)$ n'est pas vide. Remarquons d'abord que l'ensemble des réflexions perpendiculaires à chaque élément de Φ' est l'intersection des systèmes polaires de deux éléments distincts de Φ'. Or cette intersection n'est pas vide (prop. 29).

Lorsque Φ' est entièrement perpendiculaire à s, il n'y a rien à démontrer. Dans le cas contraire, il existe une réflexion u perpendiculaire à tous les éléments de Φ' et coupant s (prop. 30). L'intersection de $\Pi(s)$ et $\Pi(u)$ est un système polaire dans $\Pi(u)$. Comme Φ' est contenu dans $\Pi(u)$, l'hypothèse de récurrence permet d'affirmer que l'intersection de Φ', $\Pi(s)$ et $\Pi(u)$ n'est pas vide, d'où la conclusion. C.Q.F.D.

COROLLAIRE. *Lorsqu'un faisceau de première espèce n'est pas entièrement perpendiculaire à une réflexion* s, *il contient un élément perpendiculaire à* s *et un seul.*

PROPOSITION 34. *Le normalisateur* $N(s)$ *d'une réflexion* s *de* Σ_n *dans* G_n *est le* R*-groupe engendré par* s *et le système polaire* $\Pi(\mathrm{s})$.

L'ensemble des éléments de $N(s)$ de dimension 0 dans G_n est $\Pi(s) \cup \{s\}$. Prenons dans $N(s)$ un élément ab de dimension 1 dans G_n, avec a, $b \in \Sigma_n$. Lorsque s appartient au faisceau $\Phi(a, b)$, on peut écrire $ab = s.sab$; comme ab commute avec s, la réflexion sab est dans $\Pi(s)$. Considérons alors le cas où s n'appartient pas à $\Phi(a, b)$. Comme ab commute avec s, la réflexion sas est dans $\Phi(a, b)$, car $sas.ab = sbs \in \Sigma_n$; d'autre part, elle est incidente avec a et s. Si sas était distinct de a, s serait dans $\Phi(a, b)$ contrairement à l'hypothèse. Par suite, a est perpendiculaire à s, et b aussi.

Procédons par récurrence sur la dimension dans G_n des éléments de $N(s)$. Soit X un élément de $N(s)$ de dimension n' supérieure à 1 dans G_n, et admettons que l'on a prouvé que tout élément de $N(s)$ de dimension positive n'' inférieure à n' dans G_n peut être mis sous la forme d'un produit de $n''+1$ éléments de $\Pi(s) \cup \{s\}$. Ecrivons X sous la forme $abcY$, où a, b, $c \in \Sigma_n$ et où Y est un élément de dimension n'-3 dans G_n. Les réflexions a, b et c ne sont pas parallèles dans leur ensemble. On peut même admettre que a et b se coupent, car dans le cas contraire on remplacerait abc par $ac.cbc$. Le faisceau de première espèce $\Phi(a, b)$ contient au moins un élément d perpendiculaire à s (prop. 33). On peut alors poser $X = d.dab.c.Y = dZ$, où Z est un élément de $N(s)$ de dimension n'-1 dans G_n. En vertu de l'hypothèse de récurrence, Z peut être obtenu en formant le produit de n' éléments de $\Pi(s) \cup \{s\}$. Donc X peut être considéré comme le produit de $n'+1$ éléments de $\Pi(s) \cup \{s\}$. C.Q.D.F.

COROLLAIRE 1. *Tout élément de* $\mathrm{N(s)}$ *de dimension* r *dans* G_n *peut se mettre sous la forme d'un produit de* r+1 *éléments de* $\Pi(\mathrm{s}) \cup \{\mathrm{s}\}$.

Cela revient à dire que la dimension d'un élément de $N(s)$ est la même dans le R-groupe G_n et dans le R-groupe $N(s)$. A priori, si (G, Σ) et (G', Σ') sont deux R-groupes tels que Σ' soit contenu dans Σ, la dimension d'un élément X de G' calculée dans G peut être inférieure à sa dimension dans G'.

La réflexion s n'appartient pas au groupe polaire $\pi(s)$, car les éléments de $\pi(s)$ commutent avec chaque réflexion parallèle à s, ce qui n'est pas le cas de s. Donc $\pi(s)$ est un sous-groupe d'indice 2 dans $N(s)$.

Corollaire 2. *Tout élément d'un groupe polaire* $\pi(\mathrm{s})$ *a même dimension dans* $\pi(\mathrm{s})$ *et dans* G_n.

5.3. Dans $G_{n'}$, où $2 \leqq n' \leqq n$, nous appellerons *conversion* tout élément égal au produit de n' réflexions perpendiculaires deux à deux. Un tel élément est évidemment involutif. A l'échelon 2, les conversions se confondent avec les demi-tours. D'autre part, nous appellerons *translation* le produit de deux éléments parallèles de $\Sigma_{n'}$.

Nous admettrons que les faits suivants ont été établis pour tous les échelons n' allant de 2 à n-1:

(C) $G_{n'}$ ne contient pas d'élément involutif de dimension n'.

(D) Dans $G_{n'}$, l'ensemble des conversions se confond avec celui des éléments involutifs de dimension n'-1.

(E) L'ensemble des éléments de $(G_{n'}, \Sigma_{n'})$ qui transforment chaque élément de Σ_n' en un élément parallèle est formé des conversions et des translations de $G_{n'}$.

Tous ces faits ont été vérifiés dans G_2. Il résulte immédiatement de l'hypothèse (D), de la proposition 34 et de son corollaire 1 qu'à l'échelon n toute conversion est de dimension n-1.

Proposition 35. *Le* R*-groupe* G_n *est de dimension* n.

Nous savons que G_2 est de dimension 2. Admettons qu'il est prouvé que G_{n-1} est de dimension n-1.

Prenons une réflexion s dans Σ_n. En vertu de l'hypothèse de récurrence, il existe dans le groupe polaire $\pi(s)$ un élément A de dimension n-1. L'élément sA est manifestement de dimension n dans le normalisateur $N(s)$ de s. Il résulte du corollaire 1 de la proposition 34 que la dimension de sA est aussi n dans G_n. Par suite, G_n est de dimension n au moins. D'autre part, nous observons que tout élément de dimension n dans $N(s)$ est contenu dans la classe $s.\pi(s)$.

Soit X un élément quelconque de G_n. Plaçons-nous dans le cas où il existe une réflexion u telle que $v = X^{-1}uX$ coupe u. Désignons par m l'un des éléments bissecteurs de u et v, et par a l'élément de $\Phi(u, v)$ perpendiculaire à v. On peut poser $X = mY$, où Y appartient au normalisateur $N(v)$ de v. Si Y est de dimension inférieure à n, X est de dimension n, au plus. Si Y est de dimension n, il peut se mettre sous la forme $Y = vaZ$, où Z est de dimension n-2 dans $\pi(v)$. Comme les réflexions m, v et a sont incidentes, l'élément $X = mva.\ Z$ est de dimension n-1.

Il reste à considérer le cas où la transformation de G_n associée à X envoie toute réflexion sur une réflexion parallèle. Prenons une réflexion c et soit $d = X^{-1}cX$. Lorsque c et d sont confondus, X est dans le normalisateur de c et sa dimension n'excède pas n. Lorsque c et d sont distincts, désignons par e leur élément bissecteur et posons $X = eU$, où U est dans le normalisateur de d. Les systèmes polaires de c, d et e coïncident. Par suite, les restrictions au système polaire $\Pi(d)$ des automorphismes intérieurs de G_n associés à X et à U sont identiques. Il résulte de l'hypothèse générale de récurrence (E) que U est de l'une des formes V ou dV, où V est une conversion ou une translation dans $\pi(d)$. A cause de l'hypothèse (D), la dimension de U ne dépasse pas n-1, et celle de X ne dépasse pas n.

De tout cela il résulte que G_n est de dimension n. C.Q.F.D.

Pour tout échelon n' allant de 2 à n, nous appellerons *gerbe associée à la conversion* S et nous noterons $\Gamma(S)$ l'ensemble des éléments de $\Sigma_{n'}$ qui commutent avec S. Un tel ensemble contient plus d'un élément car si $S = a_1 a_2 \dots a_{n'}$, où les a_i sont des réflexions perpendiculaires deux à deux, $\Gamma(S)$ contient a_1, $a_2, \dots, a_{n'}$. A l'échelon 2, la gerbe $\Gamma(S)$ est le faisceau de première classe autour duquel opère le demi-tour S (coroll. 2, prop. 17).

Proposition 36. *Dans Σ_n, une gerbe ne contient pas d'éléments parallèles distincts.*

Soit $\Gamma(S)$ la gerbe associée à une conversion S de G_n, et soit a un élément de $\Gamma(S)$. S appartient au normalisateur de a. Comme il n'existe pas d'élément involutif de dimension n-1 dans le groupe polaire $\pi(a)$ (hypothèse (C)), S est de la forme $S = aS'$, où S' est une conversion dans $\pi(a)$ (hypothèse (D)).

Prenons une réflexion a' parallèle à a, mais distincte de a. Comme S' commute avec a':

$$Sa'S = aS'.a'.S'a = aa'a \neq a'$$

Par suite, a' n'appartient pas à $\Gamma(S)$. C.Q.F.D.

Corollaire. *Toute conversion* S *de* G_n *peut se mettre sous la forme* $\mathrm{S} = \mathrm{aS}'$, *où* a *est un élément arbitrairement choisi dans la gerbe* $\Gamma(\mathrm{S})$, *et où* S′ *est une conversion dans* $\pi(\mathrm{a})$.

Proposition 37. *Toute gerbe de Σ_n est close.*

Prenons deux éléments distincts a et b dans la gerbe $\Gamma(S)$ associée à une conversion S. En vertu de la proposition 36, le faisceau $\Phi(a, b)$ est de première espèce; il contient donc un élément bien déterminé c perpendiculaire à a. Comme la transformation par S conserve l'incidence et la perpendicularité dans Σ_n, et comme S commute avec a et b, S commute aussi avec c. Donc c est dans $\Gamma(S)$. En vertu du corollaire de la proposition 36, on pose $S = aS'$, où S' est une conversion dans $\pi(a)$. S' commute avec c et sa dimension dans G_n est n-2. On peut donc mettre S' sous la forme $S' = cS''$, où S'' est dans le groupe polaire associé à c dans le système polaire $\Pi(a)$. S'' est un produit de réflexions perpendiculaires à la fois à a et à c, et par suite perpendiculaires à tous les éléments du faisceau $\Phi(a, c)$. Ainsi S'' commute avec chaque élément de $\Phi(a, c)$. Il en est de même d'ailleurs de ac, car a et c sont perpendiculaires. Il s'ensuit que $S = acS''$ commute avec chaque élément du faisceau $\Phi(a, c)$. Donc $\Phi(a, b)$, qui est confondu avec $\Phi(a, c)$, est contenu dans $\Gamma(S)$.

C.Q.F.D.

PROPOSITION 38. *Quelles que soient la gerbe Γ et la réflexion* a *dans Σ_n, Γ contient un élément parallèle à* a *et un seul.*

La proposition est vraie à l'échelon 2. Admettons qu'elle a été établie à l'échelon n-1.

Prenons deux éléments distincts u et v dans la gerbe Γ. Le faisceau de première classe $\Phi(u, v)$ est contenu dans Γ et il contient une réflexion s perpendiculaire à la réflexion donnée a. Désignons par S la conversion à laquelle est attachée Γ. On peut poser $S = sS'$, où S' est une conversion dans le groupe polaire $\pi(s)$. L'intersection du système polaire $\Pi(s)$ et de la gerbe Γ est l'ensemble des éléments de $\Pi(s)$ qui commutent avec S'. C'est donc une gerbe Γ_s dans $\Pi(s)$. En vertu de l'hypothèse de récurrence, Γ_s contient un élément a' parallèle à a. Ce qui démontre l'existence dans Γ d'une réflexion parallèle à a. L'unicité de cette réflexion découle de la proposition 36. C.Q.F.D.

COROLLAIRE 1. *L'intersection d'une gerbe et d'un système polaire de Σ_n est une gerbe dans le système polaire.*

En effet, comme on l'a vu en cours de démonstration, l'intersection d'une gerbe Γ et du système polaire d'un élément s de Γ est une gerbe dans $\Pi(s)$. Or il résulte des propositions 30 et 38 que tout système polaire peut être déterminé par un élément convenablement choisi dans Γ.

COROLLAIRE 2. *Une gerbe ne contient pas d'autre gerbe qu'elle-même.*

En effet, soit Γ_1 et Γ_2 deux gerbes telles que $\Gamma_2 \subset \Gamma_1$. S'il existait dans Γ_1 un élément a non contenu dans Γ_2, on pourrait trouver dans Γ_2 une réflexion a' parallèle à a et distincte de a, ce qui contredirait la proposition 38.

COROLLAIRE 3. *L'application* S $\rightarrow$ Γ(S) *définit une correspondance biunivoque entre l'ensemble des conversions et celui des gerbes dans* G_n.

Il suffit de montrer que deux conversions S_1 et S_2 déterminant la même gerbe Γ sont confondues. Le fait est vrai à l'échelon 2;

admettons donc qu'il l'est aussi à l'échelon n-1. Prenons un élément a dans Γ. On peut écrire $S_1 = aS_1'$ et $S_2 = aS_2'$, où S_1' et S_2' sont des conversions dans $\pi(a)$. L'intersection de Γ et du système polaire $\Pi(a)$ est une gerbe associée à la fois à S'_1 et à S'_2 dans $\Pi(a)$. En vertu de l'hypothèse de récurrence $S_1' = S_2'$ et, par suite, $S_1 = S_2$.

Proposition 39. *Soit* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n *réflexions perpendiculaires deux à deux dans* Σ_n *et soit* S *la conversion* $a_1 a_2 \ldots a_n$. *Tout élément de la gerbe* $\Gamma(S)$ *peut se mettre sous la forme d'un produit d'éléments pris dans les faisceaux* $\Phi(a_i, a_{i+1})$, *avec* $i = 1, 2, \ldots, n\text{-}1$.

La proposition est banale dans Σ_2. Admettons qu'elle a été démontrée pour toutes les dimensions inférieures à n. Prenons dans $\Gamma(S)$ un élément x que nous pouvons supposer différent de a_1, sans restriction. Soit b l'élément perpendiculaire à a_1 dans le faisceau de première espèce $\Phi(a_1, x)$; b appartient à la gerbe $\Gamma(S) \cap \Pi(a_1)$ de $\Pi(a_1)$. Si b est confondu avec a_2, posons $y = a_2$. Sinon soit y l'un des éléments bissecteurs de b et a_2. La réflexion y appartient à $\Gamma(S) \cap \Pi(a_1)$. En vertu de l'hypothèse de récurrence, elle peut être mise sous la forme d'un produit d'éléments pris dans les faisceaux $\Phi(a_i, a_{i+1})$, où $i = 2, 3, \ldots, n$-1. Posons alors: $z = yxy$; cet élément appartient au faisceau:

$$y\Phi(a_1, x)y = y\Phi(a_1, b)y = \Phi(a_1, a_2).$$

La proposition résulte du fait que $x = yzy$. C.Q.F.D.

5.4. Soit $\Gamma(S)$ la gerbe associée à une conversion S de G_n et soit a une réflexion quelconque. On voit facilement que aSa est une conversion et que la gerbe qui lui est attachée n'est autre que $a\Gamma(S)a$. Nous nous proposons d'examiner les transformations ainsi définies dans l'ensemble des gerbes de Σ_n. Mais auparavant établissons quelques lemmes.

Lemme 1. *L'intersection de deux gerbes n'est pas vide.*

Il en est ainsi pour la dimension 2. Admettons que le fait est prouvé pour la dimension n-1. Soit Γ et Γ' deux gerbes dans

Σ_n. Prenons une réflexion s. Les intersections respectives de Γ et Γ' avec le système polaire $\Pi(s)$ sont des gerbes dans $\Pi(s)$. Leur intersection n'est pas vide, par hypothèse. Il en est donc de même de celle de Γ et Γ'. C.Q.F.D.

LEMME 2. *Soit Γ et Γ' les gerbes attachées dans Σ_n à deux conversions distinctes S et S'. Dans l'intersection de Γ et Γ'*, il existe n-1 *réflexions perpendiculaires deux à deux*: $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \ldots, \mathrm{a}_{n-1}$. *De plus, on peut écrire*:

$$S = a_1 a_2 \ldots a_{n-1} . b \, ; \quad S' = a_1 a_2 \ldots a_{n-1} . b' \, ,$$

où b *et* b' *sont deux réflexions parallèles distinctes, perpendiculaires à tous les* a_i *et situées dans Γ et Γ', respectivement.*

Tout cela est banal dans le cas de la dimension 2, où il convient toutefois de remarquer que la condition de perpendicularité des a_i disparaît. Admettons que le lemme est établi pour la dimension n-1. En vertu du lemme 1, prenons un élément a_1 dans $\Gamma \cap \Gamma'$. On peut écrire $S = a_1 S_1$ et $S' = a_1 S_1'$, où S_1 et S_1' sont deux conversions distinctes dans le groupe polaire $\pi(a_1)$. Les ensembles $\Gamma \cap \Pi(a_1)$ et $\Gamma' \cap \Pi(\mathrm{a}_1)$ sont les gerbes respectivement associées à S_1 et S_1' dans $\Pi(a_1)$. En vertu de l'hypothèse de récurrence, on peut trouver dans $\Gamma \cap \Gamma' \cap \Pi(a_1)$ n-2 éléments $a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$ perpendiculaires deux à deux quand $n > 3$. De plus, on peut écrire:

$$S_1 = a_2 a_3 \ldots a_{n-1} . b \, ; \quad S_1' = a_2 a_3 \ldots a_{n-1} . b' \, ,$$

où b et b' sont deux réflexions parallèles distinctes, perpendiculaires à tous les a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$-1, et situées dans $\Gamma \cap \Pi(a_1)$ et $\Gamma' \cap \Pi(a_1)$, respectivement. La conclusion en découle immédiatement. C.Q.F.D.

PROPOSITION 40. *Soit* Γ *et* Γ' *deux gerbes distinctes dans* Σ_n. *Il existe une réflexion* u *et une seule par laquelle* Γ *est transformée en Γ'.*

Désignons par S et S' les conversions auxquelles sont attachées Γ et Γ', et reprenons les éléments figurant dans l'énoncé du lemme 2. Il résulte en particulier de ce lemme que b et b' ont un élément bissecteur unique u qui est parallèle à b et b'; u est donc perpendiculaire à chaque élément a_i. Par suite, $S' = uSu$ et $\Gamma' = u\Gamma u$.

Etablissons l'unicité de l'élément considéré. Prenons un élément a dans $\Gamma \cap \Gamma'$. Il est distinct de b qui n'est pas dans Γ'. Comme a commute avec S et S', il commute avec $SS' = bb'$. Si bab était différent de a, les réflexions b et b' seraient des éléments bissecteurs distincts de a et bab: ce serait absurde car b et b' sont parallèles. Par suite, a est perpendiculaire à b. Il commute donc avec $a_1 a_2 \ldots a_{n-1}$. Réciproquement, toute réflexion perpendiculaire à b qui commute avec $a_1 a_2 \ldots a_{n-1}$ appartient à $\Gamma \cap \Gamma'$. On peut donc affirmer que $\Gamma \cap \Gamma'$ est la gerbe déterminée dans $\Pi(b)$ par $\Gamma \cap \Pi(b)$, et aussi par $\Gamma' \cap \Pi(b)$. Cet ensemble contient les éléments a_i. Il en résulte que toute réflexion perpendiculaire à chacun des éléments de $\Gamma \cap \Gamma'$ est parallèle à b (coroll. prop. 32). La gerbe Γ en contient une seule, qui est b; Γ' en contient également une seule, b'.

Soit v une réflexion par laquelle Γ est transformée en Γ'. La transformation par v laisse $\Gamma \cap \Gamma'$ invariant dans son ensemble. Elle envoie donc une réflexion perpendiculaire à tous les éléments de $\Gamma \cap \Gamma'$ sur une réflexion ayant la même propriété. Par conséquent, elle applique b sur b'. Il s'ensuit que v coïncide avec l'élément bissecteur u de b et b'. C.Q.F.D.

Convenons d'appeler *élément médiateur* de deux gerbes distinctes Γ et Γ' la réflexion u telle que $\Gamma' = u\Gamma u$.

COROLLAIRE 1. *L'intersection de deux gerbes distinctes* Γ *et* Γ' *est une gerbe dans le système polaire attaché à l'élément médiateur de* Γ *et* Γ'.

COROLLAIRE 2. *Le produit de deux conversions est une translation. Réciproquement, toute translation peut être considérée comme le produit de deux conversions dont l'une est choisie librement.*

Lorsque les conversions S et S' sont distinctes, nous avons vu en démontrant la proposition précédente que SS' est une translation. Lorsque $S = S'$, le produit SS' est la translation banale I.

Réciproquement, soit une translation $T = cc'$, où c et c' sont deux réflexions parallèles, et soit S une conversion arbitraire. Prenons dans la gerbe $\Gamma(S)$ l'élément b parallèle à c. On peut alors écrire: $S = a_1 a_2 \ldots a_{n-1}.b$, où les a_i sont n-1 éléments perpendiculaires deux à deux dans $\Gamma(S) \cap \Pi(b)$ (coroll. prop. 36). Posons $b' = bcc'$ et $b'' = cc'b$; les réflexions b'et b'' sont parallèles à b. Les éléments $S' = a_1 a_2 \ldots a_{n-1}.b'$ et $S'' = a_1 a_2 \ldots a_{n-1}.b''$ sont manifestement des conversions. Et l'on peut écrire:

$$T = cc' = SS' = S''S. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Proposition 41. *La dimension d'un élément involutif* X *de* G_n *n'excède pas* n-1; *cette valeur n'est atteinte que lorsque* X *est une conversion.*

Si X laisse invariantes toutes les gerbes de Σ_n, prenons deux gerbes distinctes Γ_1 et Γ_2. Il résulte de la proposition 40 que X commute avec l'élément médiateur de Γ_1 et Γ_2. Si X transforme une gerbe Γ en une autre gerbe Γ', il commute avec l'élément médiateur de Γ et Γ'. Dans tous les cas, il existe dans Σ_n une réflexion a qui commute avec X. Quand X est dans le groupe polaire $\pi(a)$, sa dimension ne dépasse pas n–2 (hypothèse de récurrence (C), n° 5.3). Quand X n'est pas dans $\pi(a)$, il est de la forme $X = aY$, où Y appartient à $\pi(a)$. On peut affirmer que Y est un élément involutif de $\pi(a)$ dont la dimension égale n-2 au plus, cette valeur n'étant atteinte que lorsque Y est une conversion dans $\pi(a)$ (hypothèse de récurrence (D)). Par suite, la dimension de X ne dépasse pas n-1 et n'atteint cette valeur que lorsque X est une conversion dans G_n. C.Q.F.D.

Proposition 42. *Soit* r *gerbes et* n-r *systèmes polaires dans* Σ_n, *où* $1 \leqq r \leqq n$. *L'intersection de ces* n *ensembles n'est pas vide.*

La proposition est vraie, pour la dimension 2. Admettons qu'elle est établie pour la dimension n-1. Dans Σ_n, soit C_i, où $i = 1, 2, \ldots, n$, les n ensembles considérés que l'on peut supposer distincts, sans restriction; nous admettrons que C_1 est une gerbe. Lorsque C_n est le système polaire $\Pi(s)$ d'une réflexion s, considérons les ensembles $C_k' = C_k \cap C_n$, où $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Chacun d'eux est une gerbe ou un système polaire dans $\Pi(s)$, C'_1 étant d'ailleurs une gerbe. Il résulte de l'hypothèse de récurrence que l'intersection des C'_k n'est pas vide. Or cette intersection coïncide avec celle des ensembles C_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Lorsque C_n est une gerbe, soit u l'élément médiateur de C_1 et C_n. D'après le corollaire 1 de la proposition 40, $C_1 \cap \Pi(u)$ et $C_n \cap \Pi(u)$ sont confondus avec $C_1 \cap C_n$, qui est une gerbe dans $\Pi(u)$. Les ensembles $C''_k = C_k \cap \Pi(u)$, où $k = 1, 2, \ldots, n-1$, sont des gerbes et des systèmes polaires dans $\Pi(u)$, le premier d'entre eux étant une gerbe. En vertu de l'hypothèse de récurrence, l'intersection de ces ensembles — qui coïncide avec celle des ensembles C_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ — n'est pas vide. C.Q.F.D.

COROLLAIRE. *Quand* n $= 3$, *l'intersection de deux faisceaux d'une même gerbe n'est pas vide.*

En effet, soit Φ et Φ' deux faisceaux contenus dans une même gerbe Γ de Σ_3. Comme Φ est de première espèce, il peut être déterminé par deux éléments perpendiculaires de Γ. Il existe dans Σ_3 une réflexion s perpendiculaire à tous les éléments de Φ (prop. 32), et Φ est l'intersection de Γ et $\Pi(s)$. De même, il existe une réflexion s' telle que Φ' soit l'intersection de Γ et $\Pi(s')$. L'intersection de Φ et Φ' se confond avec celle de Γ, $\Pi(s)$ et $\Pi(s')$, qui n'est pas vide. C.Q.F.D.

D'après la proposition 42, l'intersection de n gerbes de Σ_n n'est pas vide. Il arrive que cette intersection se réduise à un seul élément. Pour le voir, prenons n réflexions a_i, $i = 1, 2, \ldots$ $n-1$, n, perpendiculaires deux à deux, ainsi que $n-1$ réflexions a'_j, $j = 1, 2, \ldots, n-1$, telles que pour toute valeur de l'indice j, a_j et a'_j soient parallèles et distinctes. Considérons la conversion $S = a'_1\ a'_2 \ldots a'_{n-1}.a_n$ et soit Γ la gerbe associée à S. Construisons les gerbes $\Gamma_j = a_j \Gamma\ a_j$, $j = 1, 2, \ldots n-1$. L'ensemble $\Gamma \cap \Gamma_j$ est confondu avec $\Gamma \cap \Pi(a_j)$. Par suite, l'intersection des gerbes Γ, Γ_1, $\Gamma_2, \ldots, \Gamma_{n-1}$ se confond avec celle de Γ et des systèmes polaires $\Pi(a_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$. Il résulte des propositions 32 et 38 que cette dernière intersection se réduit à un élément unique, qui n'est autre que a_n. Il découle de l'axiome de bissection que tout élément s de Σ_n peut être déterminé par l'intersection de n gerbes bien choisies dans Σ_n. D'autre part, si l'on prend dans Σ_n une réflexion a'_n parallèle à a_n et distincte d'elle, une gerbe Γ_n contenant a'_n ne contient pas a_n. Par conséquent, il est possible de trouver dans Σ_n $n+1$ gerbes disjointes dans leur ensemble.

Proprosition 43. *Le normalisateur* N(S) *d'une conversion* S *de* G_n *est confondu avec le* R-*groupe engendré par la gerbe* Γ(S) *et avec le groupe de stabilité de* Γ(S). *En tant que* R-*groupe engendré par* Γ(S), *sa dimension égale* $\mathrm{n}-1$.

Désignons par $g(S)$ le R-groupe engendré par la gerbe $\Gamma(S)$ et par $\gamma(S)$ le groupe de stabilité de $\Gamma(S)$ dans G_n. On voit immédiatement que $g(S)$ est contenu dans $N(S)$, car il est engendré par une partie de $N(S)$, soit $\Gamma(S)$. D'autre part, $N(S)$ est contenu dans $\gamma(S)$. Prenons en effet un élément X quelconque dans $N(S)$ et une réflexion a quelconque dans $\Gamma(S)$. Comme $\Gamma(S)$ est contenue dans $N(S)$, $X^{-1}aX$ est une réflexion commutant avec S, tout comme XaX^{-1}. Donc $X^{-1}.\Gamma(S).X = \Gamma(S)$ et X appartient à $\gamma(S)$.

Montrons que $\gamma(S)$ est contenu dans $g(S)$. Procédons par récurrence. Le fait est vrai dans G_2 (prop. 17); admettons qu'il l'est pour la dimension $n-1$. Prenons alors un élément Y dans $\gamma(S)$ et une réflexion b dans la gerbe $\Gamma(S)$. L'élément $c = Y^{-1}bY$ est dans $\Gamma(S)$. Lorsque b et c sont confondus, Y laisse invariante la gerbe $\Gamma(S) \cap \Pi(c)$ dans $\Pi(c)$. Des deux éléments Y et cY, l'un appartient au groupe polaire $\pi(c)$. Il résulte de l'hypothèse de récurrence que cet élément est le produit d'un certain nombre de réflexions prises dans $\Gamma(S) \cap \Pi(c)$. Par suite, Y est bien dans $g(S)$. Lorsque b et c sont distincts, prenons un élément bissecteur u de b et c. Comme u est dans $\Gamma(S)$, $Z = uY$ est dans $\gamma(S)$ et il commute avec c. On montre comme précédemment que Z et, par suite, $Y = uZ$ appartiennent à $g(S)$.

Montrons maintenant que, comme R-groupe engendré par $\Gamma(S)$, $N(S)$ est de dimension $n-1$. L'affirmation est vraie dans G_2. Admettons qu'on l'a prouvée pour la dimension $n-1$. Le R-groupe $N(S)$ est au moins de dimension $n-1$, car il contient la conversion S qui est de dimension $n-1$ dans G_n. Prenons alors dans $N(S)$ un élément $A = a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1}$, où les a_i sont dans $\Gamma(S)$. Montrons que A peut se mettre sous forme d'un produit de moins de $n+1$ éléments pris dans $\Gamma(S)$. C'est évidemment le cas lorsque $a_2 = a_3$. Sinon prenons un élément b_2 perpendiculaire à a_1 dans le faisceau de première espèce $\Phi(a_2, a_3)$, et posons $a_3' = b_2 a_2 a_3$. On a alors $A = a_1 b_2 a_3' a_4 \ldots a_n a_{n+1}$. Admettons que l'on ait mis A sous la forme:

$$A = a_1 b_2 b_3 \ldots b_{k-1} a_k' a_{k+1} \ldots a_n a_{n+1} ,$$

où les b_i ($i = 1, 2, \ldots, k-1$) sont dans $\Gamma(S) \cap \Pi(a_1)$, et $a_k' \in \Gamma(S)$. Lorsque $a_k' = a_{k+1}$, la démonstration est achevée. Dans le cas contraire, on prend un élément b_k perpendiculaire à a_1 dans le faisceau de première espèce $\Phi(a_k', a_{k+1})$; on pose $a_{k+1}' = b_k a_k' a_{k+1}$. Il résulte de là que l'on peut écrire:

$$A = a_1 b_2 b_3 \ldots b_n e = b_2 b_3 \ldots b_n a_1 e ,$$

où les b_i sont des éléments de $\Gamma(S) \cap \Pi(a_1)$, et e est dans $\Gamma(S)$. Lorsque $a_1 = e$, la démonstration est achevée. Dans le cas contraire, on prend l'élément d_n perpendiculaire à a_1 dans le faisceau de première espèce $\Phi(a_1, e)$. Dans $\Pi(a_1)$, la gerbe $\Gamma(S) \cap \Pi(a_1)$ engendre un R-groupe de dimension $n-2$, en vertu de l'hypothèse de récurrence. Comme les réflexions b_i ainsi que d_n appartiennent à $\Gamma(S) \cap \Pi(a_1)$, on peut trouver $n-2$ éléments d_2, $d_3, \ldots, d_{n-1}$ dans ce même ensemble, tels que $b_2 b_3 \ldots b_n = d_2 d_3 \ldots d_{n-1} d_n$. D'où:

$$A = d_2 d_3 \ldots d_{n-1} \,.\, d_n a_1 e .$$

Comme $d_n a_1 e$ est dans $\Gamma(S)$, A est de dimension $n-2$ au plus. Il en résulte que le R-groupe $N(S)$ engendré par $\Gamma(S)$ ne contient pas d'élément de dimension supérieure à $n-1$. Par suite, il est de dimension $n-1$. C.Q.F.D.

Corollaire. *Quand* n $= 3$, *le normalisateur d'une conversion est un groupe de type elliptique plan.*

Cela résulte de ce qui précède, du corollaire de la proposition 42 et de la définition donnée au n° 2.1.

Il est clair qu'à tout élément X de G_n on peut associer une transformation de l'ensemble des gerbes définie par $\Gamma \to X^{-1} \Gamma X$.

Pour simplifier, nous dirons que X laisse fixe la gerbe Γ lorsque $X^{-1}\Gamma X = \Gamma$. Montrons que le groupe des transformations ainsi définies est isomorphe à G_n. Pour cela, nous établirons un fait un peu plus précis.

Proposition 44. *Le seul élément de* G_n *laissant fixes* $n+1$ *gerbes disjointes dans leur ensemble est l'élément neutre* I.

Le fait est vrai dans G_2 en vertu du corollaire 3 de la proposition 17. Admettons qu'il est établi pour la dimension $n-1$. Soit $\Gamma_i, i = 1, 2, \ldots, n, n+1$, $n+1$ gerbes de Σ_n disjointes dans leur ensemble. Désignons par u l'élément médiateur de Γ_n et Γ_{n+1}. Posons $\Gamma'_i = \Gamma_i \cap \Pi(u)$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$. Il est clair que $\Gamma'_n = \Gamma'_{n+1} = \Gamma_n \cap \Gamma_{n+1}$. Par suite, l'intersection des gerbes Γ_i, où $i = 1, 2, \ldots, n, n+1$, est confondue avec celle des gerbes Γ'_j où $j = 1, 2, \ldots, n$, dans $\Pi(u)$, qui est donc vide.

Soit A un élément de G_n laissant fixes les $n+1$ gerbes Γ_i, où $i = 1, 2, \ldots, n, n+1$. On voit que A commute avec la réflexion u et qu'il laisse fixes les gerbes Γ'_j, où $j = 1, 2, \ldots n$, dans $\Pi(u)$. Lorsque A est dans le groupe polaire $\pi(u)$, il est confondu avec I, en vertu de l'hypothèse de récurrence. Si A n'était pas dans $\pi(u)$, l'élément uA y serait; or uA laisse fixes les gerbes Γ'_j, dans $\Pi(u)$; par suite A serait confondu avec u, ce qui est exclu car la transformation par u envoie Γ_n sur Γ_{n+1}. La seule possibilité reste donc $A = I$. C.Q.F.D.

Corollaire. *Soit* n *gerbes de* Σ_n *dont l'intersection se réduit à un seul élément* a. *Les seuls éléments de* G_n *laissant fixes ces* n *gerbes sont* I *et* a.

En effet, soit Γ_i, où $i = 1, 2, \ldots, n$, les n gerbes considérées. Tout élément de G_n laissant fixes ces n gerbes appartient au normalisateur $N(a)$ de a. Comme les ensembles $\Gamma'_i = \Gamma_i \cap \Pi(a)$ sont n gerbes disjointes dans leur ensemble, dans $\Pi(a)$, le seul élément de $\pi(a)$ laissant fixe chacune des Γ'_i est I. Il en résulte que les seuls éléments de G_n laissant fixes les gerbes Γ_i, où $i = 1, 2, \ldots, n$, sont I et a.

5.5. Nous allons parvenir à un théorème concernant la structure du groupe G_n. Mais auparavant, nous allons considérer les translations de G_n. Lorsque $T = ba$, où a et b sont deux réflexions parallèles, nous convenons de dire que T est une translation de *front* a. Les translations de front a constituent dans G_n un sous-groupe abélien: ce sous-groupe coïncide avec celui des éléments propres du R-groupe engendré par le faisceau de deuxième espèce contenant a. Lorsque a parcourt Σ_n, le groupe des translations de front a parcourt une famille de sous-groupes conjugués dans G_n, tous isomorphes à l'un d'entre eux que nous désignerons par τ. Il va de soi que deux translations de même front ou de fronts perpendiculaires commutent.

Proposition 45. *L'ensemble $\mathcal{T}_n$ des translations de* G_n *constitue un sous-groupe distingué, abélien, isomorphe à τ^n.*

Bien que la démonstration de ces faits soit essentiellement analogue à celle des propositions 14 et 15, nous la retraçons brièvement ici. Soit T' et T'' deux translations quelconques prises dans G_n. Choisissons une conversion S; il existe deux conversions bien déterminées S' et S'' telles que $T' = S'S$ et $T'' = S''S$ (coroll. 2, prop. 40). Par suite:

$$T' \, T''^{-1} = S' \, S'' ,$$

qui est une translation. Donc l'ensemble $\mathcal{T}_n$ des translations de G_n est un sous-groupe de G_n. Comme les automorphismes intérieurs de G_n induisent dans Σ_n des transformations conservant le parallélisme, $\mathcal{T}_n$ est distingué dans G_n.

On peut trouver n réflexions $a_1, a_2, \dots, a_n$ perpendiculaires deux à deux, telles que $S = a_1 a_2 \dots a_n$. Dans la gerbe $\Gamma(S')$ attachée à la conversion S' considérée plus haut, il existe n éléments bien déterminés $b_1, b_2, \dots, b_n$, respectivement parallèles aux réflexions $a_1, a_2, \dots, a_n$, de sorte que $S' = b_1 b_2 \dots b_n$. Si l'on pose $T'_i = b_i a_i$, on voit que T' est le produit de n translations univoquement déterminées T'_i de front a_i, où $i = 1, 2, \dots, n$. De même, la translation T'' peut se mettre, d'une manière et d'une seule, sous la forme $T'' = T''_1 T''_2 \dots T''_n$, où T''_i est une translation de front a_i. Quelles que soient les valeurs de i et j, T'_i et T''_j commutent; alors:

$$T' \, T'' = T'_1 \, T''_1 \cdot T'_2 \, T''_2 \dots T'_n \, T''_n \, .$$

Par suite, $\mathcal{T}_n$ est isomorphe au produit direct des n groupes de translations de fronts $a_1, a_2, \dots, a_n$. Il est donc abélien et isomorphe à τ^n. C.Q.F.D.

Corollaire. *Soit* $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \dots, \mathrm{a}_n$ n *réflexions perpendiculaires deux à deux. Toute translation de* G_n *peut être représentée par un produit de réflexions parallèles à* $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \dots, \mathrm{a}_n$, *respectivement.*

Théorème 6. *Le groupe* G_n *est le produit semi-direct du groupe des translations* $\mathcal{T}_n$ *et du normalisateur dans* G_n *d'une conversion arbitrairement choisie.*

Prenons une conversion S dans G_n et soit a une réflexion quelconque. Dans la gerbe $\Gamma(S)$ associée à S, il existe un élément a' parallèle à a, et un seul. Comme $a = aa'.a' = a'.a'a$, la réflexion a peut se mettre sous la forme d'un produit d'une réflexion bien déterminée a' prise dans $\Gamma(S)$ et d'une translation T qui dépend de l'ordre adopté pour les facteurs a' et T. Il découle de cela et du fait que le groupe $\mathcal{T}_n$ est distingué dans G_n que tout élément X de G_n peut se mettre sous les deux formes suivantes:

$$X = X' T_1 = T_2 X',$$

où X' est dans le normalisateur $N(S)$ de S et où T_1 et T_2 sont des translations. Les éléments X', T_1 et T_2 sont univoquement déterminés par X, car $N(S)$ ne contient aucune translation non banale. En effet, si T est une translation de front b dans $N(S)$, il existe dans $\Gamma(S)$ une réflexion c parallèle à b. La réflexion cT est parallèle à b et elle commute avec S. Par suite $T = I$.

C.Q.F.D.

Proposition 46. *Les seuls éléments de* G_n *qui transforment chaque réflexion en une réflexion parallèle sont les conversions et les translations.*

Désignons par E l'ensemble des éléments de G_n possédant la propriété indiquée; il constitue évidemment un sous-groupe de G_n ne contenant aucune réflexion. Prenons une conversion bien déterminée S. Elle commute avec chaque élément u de la gerbe

$\Gamma(S)$ attachée à S. Elle transforme toute réflexion u' parallèle à u en une réflexion parallèle à u, donc à u'. Il résulte de la proposition 38 que S appartient à E. Comme on peut en dire autant de toute conversion de G_n, E contient toutes les conversions et les translations de G_n (coroll. 2, prop. 40). En vertu du théorème 6, tout élément A de E est le produit d'un élément A' de E contenu dans le normalisateur $N(S)$ de S et d'une translation. Pour établir la proposition, il suffit de montrer que A' ne peut être que I ou S.

Prenons un élément a dans $\Gamma(S)$. A' appartient au normalisateur de a dans G_n. Lorsque A' est dans le groupe polaire $\pi(a)$, il laisse fixe chaque élément de la gerbe $\Gamma(S) \cap \Pi(a)$ dans $\Pi(a)$. Donc, dans $\Pi(a)$, A' transforme toute réflexion en une réflexion parallèle. Comme $N(S)$ ne contient pas de translation non banale, il résulte de l'hypothèse générale de récurrence (E) (voir n° 5.3) que A' est soit I, soit la conversion $S' = aS$ dans $\pi(a)$. Or A' ne saurait être confondu avec S', car $S'S = a$ n'est pas dans E. Dans le cas présent, A' est donc l'élément I. En revanche, lorsque A' est dans $a.\pi(a)$, $aA' = S'$. Par suite $A' = S$. C.Q.F.D.

Avec cette proposition, nous avons achevé de prouver que les faits énoncés dans les hypothèses générales de récurrence sont également vrais pour la dimension n. Ces démonstrations font l'objet du corollaire de la proposition 28 (hyp. (A)), et des propositions 31 (hyp. (B)), 41 (hyp. (C) et (D)) et 46 (hyp. (E)).

5.6. Prenons dans Σ_n n réflexions u_i perpendiculaires deux à deux, $i = 1, 2, \ldots, n$. Pour tout indice i différent de 1, prenons un élément bissecteur m_{1i} de u_1 et u_i. Comme u_i coupe u_k lorsque $i \neq k \neq 1$, m_{1i} coupe m_{1k} (prop. 46). Soit m'_{ik} l'élément perpendiculaire à u_1 dans le faisceau $\Phi(m_{1i}, m_{1k})$. Posons $m_{ik} = m_{1i}m'_{ik}m_{1k}$. On voit sans peine que m_{ik} est un élément bissecteur de u_i et u_k. Par la suite, nous pourrons admettre que m_{ij} et m_{ji}, où $i \neq j$, désignent le même élément. Prenons ensuite une réflexion e_1 parallèle à u_1 mais distincte d'elle. Posons $e_i = m_{1i}e_1m_{1i}$ pour tout indice i différent de 1. On peut vérifier que pour toute paire d'indices distincts (j, k) on a $e_k = m_{jk}e_jm_{jk}$. L'ensemble des éléments u_i, m_{ik}, e_i constitue dans Σ_n un *repère orthonormal* $\mathcal{R}$. Nous admettrons qu'une définition analogue a été faite à chacun des échelons inférieurs. On voit d'ailleurs que c'est bien ainsi que nous avons procédé à l'échelon 2. L'intersection du repère orthonormal $\mathcal{R}$ considéré ci-dessus dans Σ_n avec le système polaire $\Pi(u_i)$ détermine dans celui-ci un repère orthonormal $\mathcal{R}_i$, avec $i = 1, 2, \dots, n$.

Nous savons qu'en fixant le groupe G_n nous déterminons une chaîne de groupes $G_{n'}$, où n' $= 2, 3, \dots, n-1, n$, telle que pour tout n' supérieur à 2, $G_{n'}$ satisfait les axiomes $E_{n'}\ I$ et $E_{n'}\ II$. Le groupe G_2 est isomorphe au groupe $GE(2, K)$, où K est un corps réel bien déterminé contenant la racine carrée de chacun de ses éléments positifs. Nous appellerons K le *corps de base*, et nous nous proposons de prouver que G_n est isomorphe à $GE(n, K)$. En vue de cette démonstration, nous allons admettre les hypothèses de récurrence suivantes:

a) Dans G_{n-1}, il existe une correspondance biunivoque entre l'ensemble des gerbes de Σ_{n-1} et K^{n-1}. Cette correspondance est déterminée par le choix d'un repère orthonormal dans Σ_{n-1}.

b) Admettons qu'on s'est donné un repère (u_i, m_{ik}, e_i) dans Σ_{n-1}, avec $i, k = 1, 2, \dots, n-1$ et $i \neq k$. Soit Γ et Γ' deux gerbes quelconques dans Σ_{n-1}; pour tout indice i, désignons respectivement par x_i et x'_i les éléments de Γ et Γ' parallèles à u_i. Soit $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1})$ et $(\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_{n-1})$ les éléments de K^{n-1} associés à Γ et Γ' relativement au repère considéré. Alors les égalités $x_i = x'_i$ et $\xi_i = \xi'_i$ sont équivalentes.

c) La quantité:

$$d_{n-1}(\Gamma, \Gamma') = \left[\sum_{i=1}^{n-1} (\xi_i - \xi'_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

est invariante par rapport aux transformations induites par les éléments de G_{n-1} dans l'ensemble des gerbes de Σ_{n-1}.

Ces faits sont vrais à l'échelon 2. Nous allons montrer qu'ils le sont aussi à l'échelon n. Introduisons une fois pour toutes un repère orthonormal $\mathcal{R}$ formé d'éléments u_i, m_{ik} et e_i, avec $i, k = 1, 2, \dots, n$ et $i \neq k$, comme nous l'avons décrit plus haut. L'intersection de $\mathcal{R}$ et $\Pi(u_i)$ détermine dans $\Pi(u_i)$ un repère orthonormal $\mathcal{R}_i$, pour tout indice i. Prenons une gerbe quelconque Γ dans Σ_n. Dans $\Pi(u_i)$, $\Gamma \cap \Pi(u_i)$ est une gerbe à laquelle on peut attacher un élément de K^{n-1} bien déterminé $(\ldots, \xi_j, \ldots)$ relativement à $\mathscr{R}_i$, avec $1 \leqq j \leqq n$ et $j \neq i$. Si l'on substitue à Γ une gerbe Γ' ayant avec Γ un élément commun x_k parallèle à u_k, $k \neq i$, l'élément $(\ldots, \xi'_j, \ldots)$ de K^{n-1}, avec $1 \leqq j \leqq n$ et $j \neq i$, associé à $\Gamma' \cap \Pi(u_i)$ relativement à $\mathscr{R}_i$ est tel que $\xi_k = \xi'_k$. Si l'on applique ces considérations aux gerbes Γ et $\Gamma' = m_{ii'}\Gamma m_{ii'}$, où $i' \neq i$, on voit que l'élément $(\ldots, \eta_j, \ldots)$ de K^{n-1}, avec $1 \leqq j \leqq n$ et $j \neq i'$, associé à $\Gamma \cap \Pi(u_i')$ relativement au repère $\mathscr{R}_i'$ est tel que $\xi_j = \eta_j$ pour tout indice $j$différent de i et de i'. On peut donc attacher à la gerbe Γ un élément $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ de K^n de manière que l'on obtienne l'élément de K^{n-1} associé à $\Gamma \cap \Pi(u_i)$ relativement au repère $\mathscr{R}_i$ en biffant l'élément ξ_i, pour tout indice i. On détermine ainsi une correspondance biunivoque entre l'ensemble des gerbes de Σ_n et K^n, correspondance déterminée par le choix du repère $\mathscr{R}$. Nous dirons que ξ_i est la i-ième coordonnée de Γ relativement à $\mathscr{R}$.

Lorsqu'on transforme la gerbe Γ par une réflexion a prise dans $\Pi(u_i)$, on obtient une nouvelle gerbe dont la i-ième coordonnée coïncide avec celle de Γ. Il résulte de l'hypothèse c) faite plus haut que la transformation considérée laisse invariante la quantité:

$$d_n(\Gamma, \Gamma') = \left[\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \xi_i')^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

où $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ et $(\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_n)$ sont les coordonnées de deux gerbes quelconques Γ et Γ', relativement à $\mathscr{R}$. Or il découle de la proposition 39, du corollaire de la proposition 45 et du théorème 6 que tout élément de G_n peut être considéré comme un produit d'éléments pris dans les systèmes polaires $\Pi(u_i)$, où $i = 1, 2, \ldots, n$. Donc d_n est invariante par rapport aux transformations induites dans l'ensemble des gerbes de Σ_n par les éléments de G_n. Comme on le sait d'ailleurs, d_n est une distance dans K^n. D'autre part, il résulte de la proposition 44 que G_n agit effectivement dans l'ensemble des gerbes de Σ_n. En faisant usage de la correspondance biunivoque introduite précédemment entre les gerbes de Σ_n et les éléments de K^n, on peut assimiler G_n à un groupe d'isométries de K^n muni de la distance d_n.

On a pu observer en passant que les hypothèses $a)$, $b)$ et $c)$ sont également satisfaites à l'échelon n.

Théorème 7. *Le groupe* G_n *est isomorphe à un groupe* GE(n, K), *où* K *est un corps réel contenant la racine carrée de chacun de ses éléments positifs.*

Nous appellerons « points » les éléments de K^n. La famille de R-groupes $(GE(n', K), \Sigma(n', K))$ satisfait les axiomes que nous avons posés pour la famille de R-groupes $(G_{n'}, \Sigma_{n'})$, où $n' = 2, 3, \dots, n$. Il en résulte que toutes les propositions que nous avons établies pour G_n conviennent à $GE(n, K)$. Ainsi, à toute gerbe Γ' dans $\Sigma(n, K)$ correspond biunivoquement un point de K^n qui n'est autre que le centre P de la conversion déterminant Γ'. Nous qualifierons Γ' et P d'éléments homologues. Cette correspondance est manifestement compatible avec les transformations induites par les éléments de $GE(n, K)$ dans l'ensemble des gerbes de $\Sigma(n, K)$ et dans K_n.

Nous avons déjà vu que G_n peut être considéré comme un sous-groupe de $GE(n, K)$. Prenons alors une réflexion a' dans $\Sigma(n, K)$. Il existe dans $\Sigma(n, K)$ n gerbes $\Gamma_1', \Gamma_2', \dots, \Gamma_n'$ dont l'intersection se réduit à $\{a'\}$. Soit P_i le point homologue de Γ_i', où $i = 1, 2, \dots, n$. Il résulte du corollaire de la proposition 44 que, mis à part l'élément neutre, a' est le seul élément de $GE(n, K)$ laissant fixes les points P_i. Soit Γ_i la gerbe de Σ_n correspondant au point P_i, $i = 1, 2, \dots, n$. Tout élément commun aux gerbes Γ_i laisse fixes les points P_i. Or l'intersection de ces gerbes n'est pas vide (prop. 42) et elle ne contient évidemment pas l'élément neutre. Comme G_n est contenu dans $GE(n, K)$, il résulte de ce qui précède que cette intersection se réduit à l'élément a'. Donc $\Sigma(n, K)$ est contenu dans Σ_n et, par suite, G_n est confondu avec $GE(n, K)$. C.Q.F.D.

Corollaire. (G_n, Σ_n) *est isomorphe, en tant que* R-*groupe, à* (GE(n, K), $\Sigma(n, K)$).

En effet, le raisonnement précédent prouve que Σ_n et $\Sigma(n, K)$ sont confondus.

Afin de mieux percevoir la précision apportée par ce corollaire au théorème 7, considérons un exemple. Dans $GE(n, K)$, où $n \geqslant 5$, désignons par $\Sigma'(n, K)$ l'ensemble distingué des éléments involutifs de la forme abc, où a, b et c sont trois éléments de $\Sigma(n, K)$ perpendiculaires deux à deux. Quelle que soit la réflexion u dans $\Sigma(n, K)$, on peut en trouver quatre autres v, w, x, et y, perpendiculaires à u et perpendiculaires entre elles, de sorte que:

$$u = uyv.vxw.wxy\,.$$

Par suite, $GE(n, K)$ est un R-groupe engendré par $\Sigma'(n, K)$. Mais $(GE(n, K), \Sigma'(n, K))$ ne satisfait pas l'axiome d'incidence. Il suffit de le montrer pour $n = 5$. Rapportons l'espace K^5 à un repère orthonormal et désignons par $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ un point quelconque de K^5. Considérons les transformations A, B, C et D envoyant $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ respectivement sur $(x_1, x_2, -x_3, -x_4, -x_5)$, $(x_1, x_2, -x_3, -x_4, t-x_5)$, $(x_1, -x_2, x_3, -x_4, -x_5)$ et $(-x_1, -x_2, x_3, -x_4, x_5)$, où t est un élément non nul de K, Il est clair que A, B, C et D sont dans $\Sigma'(5, K)$. D'autre part:

$$\begin{aligned}
CBA &: \ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \to (x_1, -x_2, x_3, -x_4, -t-x_5),\\
DCA &: \ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \to (-x_1, x_2, -x_3, -x_4, x_5),\\
DCB &: \ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \to (-x_1, x_2, -x_3, -x_4, -t+x_5)\,.
\end{aligned}$$

Donc CBA et DCA sont dans $\Sigma'(5, K)$. Il n'en est pas de même de DCB, qui n'est pas involutif. Comme A et C sont distincts, on peut affirmer que $(GE(n, K), \Sigma'(n, K))$ n'est pas un RI-groupe $(n \geqslant 5)$. Il ne saurait donc être isomorphe, en tant que R-groupe, à $(GE(n, K), \Sigma(n, K))$.

Nous avons donc montré que les axiomes E_n *I* et E_n *II*, joints aux axiomes *P I* à *P VII* caractérisent les groupes $GE(n, K)$, où K est un corps réel contenant la racine carrée de chacun de ses éléments positifs. Il convient de noter que l'on peut omettre les axiomes *P VI* et *P VII* sans changement pour le reste de la construction. Les sept autres axiomes caractérisent les groupes des K-isométries des espaces K^n munis de leur K-métrique euclidienne, où K est un corps formellement réel pythagoricien.

L'examen critique des axiomes E_n *I* et E_n *II* se réduit à fort peu de chose pour ce qui concerne la consistance et l'indépendance relative, qui sont manifestes. On pourrait cependant se proposer d'étudier s'il est possible de substituer à l'un ou l'autre de ces axiomes un axiome plus faible. Peut-on, par exemple, renoncer à exiger de G_n qu'il satisfasse l'axiome d'incidence? Ces questions, qui sont probablement assez délicates, ne sont pas abordées ici.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] Ahrens, J., Begründung der absoluten Geometrie des Raumes aus dem Spiegelungsbegriff. Math.Z, 71.

[2] Artin, E., Geometric Algebra. Interscience Publishers, Inc., New-York, 1957.

[3] Bachmann, F., Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff. Springer-Verlag, Berlin, 1959.

[4] Biberbach, L., Theorie der geometrischen Konstruktionen. Verlag Birkhäuser, Basel, 1952.

[5] Bourbaki, N., Théorie des ensembles, chapitre 4. Hermann, Paris, 1958.

[6] —— Algèbre, chapitre IV. Hermann, Paris, 1950.

[7] —— Algèbre, chapitre VI. Hermann, Paris, 1952.

[8] Choquet, G., Sur l'enseignement de la géométrie élémentaire. Dans « L'enseignement des mathématiques ». Ed. Delachaux & Niestlé, Neuchâtel et Paris, 1955.

[9] Coxeter, H. S. M. & Moser, W. O. J., Generators and Relations for Discrete Groups. Springer-Verlag, Berlin, 1957.

[10] Delessert, A., Géométrie plane. Ed. Spès, Lausanne, 1960.

[11] Dieudonné, J., Sur les groupes classiques. Hermann, Paris, 1948.

[12] Hilbert, D., Grundlagen der Geometrie. Stuttgart, 1956.

[13] Kerékjártó, B., Les fondements de la géométrie, tome I. Budapest, 1955.

[14] Klein, F., Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Math. Ann. XLIII (1893).

[15] Lebesgue, H., Leçons sur les constructions géométriques. Ed. Gauthier-Villars, Paris, 1950.

[16] Lingenberg, R., Über Gruppen mit einem invarianten System involutischer Erzeugender, in dem der allgemeine Satz von der drei Spiegelungen gilt, I, II. Math. Ann. Bd. 137, 1959.

[17] Montgomery, D. & Zippin, L., Topological Transformation Groups. Interscience Publishers, Inc., New York, 1955.

[18] Sperner, E., Ein gruppentheorischer Beweis des Satzes von Desargues in der absoluten Axiomatik. Arch. Math. 5 (1954).

[19] +++ Structures algébriques et structures topologiques. Monographies de l'enseignement mathématique, n° 7. Genève-Paris, 1958.

Appendice

Bref rappel des définitions des notions utilisées

Les notices qui suivent ont pour but de rappeler quelques faits mathématiques utilisés plus haut. Certains d'entre eux pourraient être énoncés sous une forme beaucoup plus générale. Les hypothèses restrictives où nous nous plaçons et qui sont satisfaites dans le texte précédent permettent d'éviter des développements qui n'auraient pas leur place ici. Pour des exposés plus circonstanciés, on peut se reporter, par exemple, à [19], puis au traité de N. Bourbaki.

1) *Groupe*

Un groupe G est un ensemble non vide dans lequel il existe une loi de composition interne faisant correspondre à tout couple ordonné (a, b) d'éléments de G un élément de G appelé *produit* de a et b, noté ab, moyennant les conditions suivantes:

a) Cette loi de composition est *associative*:

$$a(bc) = (ab)c\,, \qquad \forall a\,, b\,, c \in G\,,$$

b) Il existe dans G un *élément neutre* bilatère e relativement à la loi de composition considérée:

$$ea = ae = a\,, \qquad \forall a \in G\,,$$

c) Tout élément a de G possède un *inverse* bilatère dans G pour la loi de composition considérée, élément noté a^{-1}:

$$\forall a \in G\,, \quad \exists a^{-1} \in G: aa^{-1} = a^{-1}a = e\,.$$

On montre facilement que, dans le groupe G, il n'existe qu'un seul élément neutre et que tout élément n'y possède qu'un seul inverse. Cela implique que, quels que soient a et b dans G, les équations $ax = b$ et $xa = b$ possèdent chacune une solution bien déterminée en x dans G.

Soit A et B deux parties non vides d'un groupe G; on note AB l'ensemble des éléments de G de la forme ab, où $a \in A$ et $b \in B$. Lorsque $c \in G$, on convient de mettre cA et Ac pour $\{c\}A$ et $A\{c\}$, respectivement. On écrit A^2 au lieu de AA et plus généralement A^n au lieu de AA^{n-1}, n étant un entier naturel plus grand que 1. On note A^{-1} l'ensemble des inverses des éléments de A.

Une partie g d'un groupe G est un *sous-groupe* de G lorsqu'elle est un groupe vis-à-vis de la restriction à g de la loi de composition interne existant dans G. La condition nécessaire et suffisante pour que la partie non vide g de G soit un sous-groupe de G est donnée par $gg^{-1} = g$.

Un groupe composé d'un nombre fini n d'éléments est dit d'*ordre fini* n; un groupe est dit d'*ordre infini* lorsqu'il comporte une infinité d'éléments. Prenons un élément a dans un groupe G d'élément neutre e; l'ensemble des puissances de a, c'est-à-dire $a^0 = e, a^k, a^{-k} = (a^{-1})^k$, où $k = 1, 2, 3, \ldots$, constitue un sous-groupe g_a de G. Par définition, l'*ordre* de a est l'ordre du groupe g_a. En particulier, a est dit *involutif* quand il est d'ordre 2.

A titre d'exemple, appelons *permutation* d'un ensemble non vide E toute application biunivoque de E sur lui-même; le produit ab de deux permutations a et b de E est la permutation de E obtenue en composant b et a, dans l'ordre. L'ensemble des permutations de E constitue un groupe pour la loi de composition indiquée. Lorsque E est un ensemble fini de n éléments, le groupe des permutations de E est le *groupe symétrique de degré n*; il est d'ordre $\Gamma(n+1) = 1.2.3 \ldots \ldots n$.

Une application f d'un groupe G dans (sur) un groupe G' est un *homomorphisme* de G dans (sur) G' lorsque $f(ab) = f(a)f(b)$, quels que soient a et b dans G. Le *noyau* de l'homomorphisme f est l'ensemble $f^{-1}(e')$ des éléments de G envoyés sur l'élément neutre e' de G'. L'image $f(G)$ est un sous-groupe de G'. Lorsque le noyau de f se réduit à l'élément neutre de G et que $f(G) = G'$, f est un *isomorphisme* de G sur G'. Un homomorphisme de G dans lui-même est un *endomorphisme* de G. Un isomorphisme de G sur lui-même est un *automorphisme* de G. Si f et g sont deux automorphismes de G, fg est aussi un automorphisme de G. Muni de cette loi de composition, l'ensemble des automorphismes de G constitue un groupe dont l'élément neutre est l'automorphisme identique — ou banal — de G.

Soit a un élément du groupe G. L'application:

$$\alpha : x \to a^{-1} x a \, , \ \forall x \in G \, , \qquad (1)$$

est un automorphisme de G appelé *automorphisme intérieur* de G associé à a. Une partie P de G *commute* avec a lorsque $\alpha(P) = P$. En particulier, un élément b de G commute avec a lorsque $ab = ba$. Le *normalisateur* de a dans G est le sous-groupe formé des éléments de G commutant avec a. Une partie de G est *distinguée* quand elle commute avec chaque élément de G. Deux parties de G sont dites *conjuguées* lorsqu'il existe un automorphisme intérieur de G envoyant l'une sur l'autre. L'application qui, à tout élément a de G associe l'automorphisme intérieur de G défini par (1) est un homomorphisme φ de G dans le groupe des automorphismes de G. Le noyau de φ est le *centre* de G. Lorsque le centre de G est confondu avec G, G est dit *commutatif* ou *abélien*. D'une façon générale, on peut affirmer que le noyau d'un homomorphisme de G dans un groupe quelconque est un sous-groupe distingué de G.

Soit H un sous-groupe d'un groupe G. Deux éléments a et b de G sont dits *congrus* (*à gauche*) *relativement à* H lorsque $aH = bH$, et l'on note alors $a \equiv b \pmod{H}$. On détermine ainsi dans G une relation d'équivalence compatible avec la multiplication à gauche dans G; autrement dit, $a \equiv b \pmod{H}$ implique $ca \equiv cb$ $(\mathrm{mod}\ H)$, $\forall c \in G$. Les classes d'équivalence introduites par cette relation dans G sont les *classes (à gauche) de G relativement à* H. Elles constituent un ensemble noté G/H et appelé *espace homogène* (*à gauche*) attaché au sous-groupe H de G. Lorsque G/H est un ensemble fini, le nombre de ses éléments est l'*indice* de H dans G; on dit que H est d'indice infini dans G quand G/H comporte une infinité d'éléments. L'*application canonique* de G sur G/H est celle qui, à tout élément a de G, associe la classe (à gauche) de G relativement à H contenant a, que l'on peut noter aH.

A tout élément s de G on peut attacher une permutation s_1 de G/H en posant:

$$s_1 : xH \to sxH \,, \ \forall x \in G \,.$$

L'application $s \to s_1$ est un homomorphisme γ de G dans le groupe des permutations de G/H. L'image $\gamma(G)$ est un groupe transitif de permutations de G/H; autrement dit, pour tout couple d'éléments de G/H, on peut trouver dans $\gamma(G)$ une permutation envoyant le premier sur le deuxième. On traduit cela en disant que G *agit transitivement* dans G/H. Les groupes G et $\gamma(G)$ sont isomorphes lorsque l'intersection des conjugués de H dans G se réduit à l'élément neutre de G ou, ce qui revient au même, quand H ne contient aucun sous-groupe distingué de G autre que celui qui se réduit à l'élément neutre. On dit alors que *G agit effectivement* dans G/H.

Les définitions précédentes, qui conduisent à la notion d'espace homogène à gauche, peuvent être reprises « à droite »: H étant un sous-groupe de G, il suffit de considérer comme équivalents deux éléments a et b de G tels que $Ha = Hb$. Toutefois lorsque H est un sous-groupe distingué de G les équivalences à gauche et à droite relativement à H coïncident dans G. On peut alors, d'une manière unique, introduire dans G/H une loi de composition telle que l'application canonique de G sur G/H soit un homomorphisme. Muni de cette loi, G/H est alors un groupe, le *groupe quotient* de G par le sous-groupe distingué H.

Par exemple, l'ensemble Z des nombres entiers rationnels muni de l'addition ordinaire est un groupe abélien; n étant un nombre entier rationnel positif ou nul, l'ensemble des multiples entiers de n constitue un sous-groupe Z_n de Z, évidemment distingué; le groupe quotient Z/Z_n est isomorphe à Z quand n est nul et il est d'ordre fini n quand n est positif.

Considérons n ensembles non vides $G_1, G_2, \ldots, G_n$; leur *produit* est, par définition, l'ensemble des systèmes $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ où $a_i \in G_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Lorsque les G_i sont des groupes, on peut munir ce produit de la loi de composition suivante:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)(b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots, a_n b_n)$$
$$\text{avec } a_i, b_i \in G_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

On obtient ainsi un groupe appelé *produit direct* de $G_1, G_2, \ldots, G_n$ et noté $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$. Pour tout indice i, désignons par e_i l'élément neutre de G_i; k étant un indice fixé, l'ensemble des éléments $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ pour lesquels $a_i = e_i$ quel que soit $i \neq k$ est un sous-groupe distingué de $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$, isomorphe à G_k. On assimile souvent ce sous-groupe à G_k. Alors le groupe quotient de $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ par G_k est isomorphe au produit direct des groupes G_i pour lesquels $i \neq k$.

2) *Anneau. Corps*

Un *anneau A est un ensemble satisfaisant les conditions suivantes:*

a) Il est muni d'une première loi de composition interne pour laquelle il constitue un groupe abélien. On convient généralement de noter cette loi additivement:

$$(a\,,b) \rightarrow a+b\,, \quad a\,,b\,,a+b \in A\,,$$

et d'en désigner l'élément neutre par o.

b) Il est muni d'une deuxième loi de composition interne associative, commutative ou non. Cette loi est généralement notée multiplicativement: $(a,\ b) \rightarrow ab,\ a,\ b,\ ab \in A$.

c) La multiplication est distributive à gauche et à droite par rapport à l'addition:

$$\left.\begin{aligned} a(b+c) &= ab+ac \\ (b+c)a &= ba+ca \end{aligned}\right. \quad \forall a\,,b\,,c \in A\,.$$

Cela implique, en particulier, que $ao = oa = o,\ \forall a \in A$. L'anneau A est dit *commutatif* lorsque la multiplication y est commutative: $ab = ba,\ \forall\ a,\ b \in A$. A est un *anneau d'intégrité* lorsqu'il est un anneau commutatif et que les conditions $a \neq o,\ b \neq o,\ a,\ b \in A$ impliquent $ab \neq o$. Dans un anneau A, un élément différent de o est appelé *élément unité* lorsqu'il est neutre à gauche et à droite vis-à-vis de la multiplication dans A. Lorsqu'un tel élément existe dans A, il est unique et on le désigne par 1.

Un *corps* K est un anneau tel que l'ensemble K^* des éléments de K différents de o constitue un groupe vis-à-vis de la multiplication existant dans K. Un corps non commutatif est dit *gauche*. Dans le groupe abélien additif sous-jacent au corps K, l'élément 1 engendre un groupe isomorphe à un groupe Z/Z_n. L'entier rationnel positif ou nul n est la *caractéristique* du corps K. Ainsi un corps est de caractéristique nulle quand l'élément unité y est d'ordre infini relativement à l'addition. Lorsque la caractéristique est finie, elle est un nombre premier. A titre d'exemples, l'ensemble des nombres rationnels constitue un corps Q, celui des nombres réels constitue un corps R, relativement à l'addition et la multiplication ordinaires. Ces deux corps sont commutatifs et de caractéristique nulle.

Deux corps K et K' sont dits *isomorphes* lorsqu'il existe une application f de K sur K' telle que $f(a+b) = f(a)+f(b)$ et

$f(ab) = f(a)f(b)$, $\forall a, b \in K$; l'application f, qui est bijective, est un *isomorphisme* de K sur K'.

Un *sous-corps* L d'un corps K est une partie de K constituant un corps vis-à-vis de l'addition et de la multiplication existant dans K; on dit encore que K est une *extension* de L. L'intersection de tous les sous-corps de K est un corps appelé *corps premier* de K. Le corps premier d'un corps de caractéristique nulle est isomorphe au corps Q des nombres rationnels.

Soit L un sous-corps d'un corps K et soit E une partie de K. L'intersection des sous-corps de K contenant L et E est un sous-corps de K désigné par $L(E)$: c'est l'extension de L obtenue en *adjoignant* E à L. Une extension de L est de *type fini* lorsqu'il est possible de l'obtenir en adjoignant à L un ensemble fini. Elle est de *type infini* dans le cas contraire.

Une *valuation* (réelle) d'un corps K est une application $x \to |x|$ de K dans l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls satisfaisant les conditions suivantes:

a) $|x| = 0 \in R \Leftrightarrow x = 0 \in K$,

b) $|xy| = |x|\,|y|$, $\forall x, y \in K$,

c) $|x+y| \leq \max(|x|, |y|)$, $\forall x, y \in K$.

On voit immédiatement que $|1| = 1$. La valuation considérée est dite *banale* lorsque $|x| = 1$ pour tout élément x de K différent de 0.

3) *Espace vectoriel*

Un *espace vectoriel* V sur un corps commutatif K est un ensemble satisfaisant les conditions suivantes:

a) V est muni d'une loi de composition interne pour laquelle il constitue un groupe abélien; nous le noterons additivement et nous désignerons son élément neutre par O.

b) Il existe une application du produit de K et V dans V: $(a, X) \to aX$, telle que:

1^0 $a(X+Y) = aX + aY$,

2^0 $(a+b)X = aX + bX$,

3^0 $a(bX) = (ab)X$,

4^0 $1X = X$, $\forall a, b \in K, \forall X, Y \in V$.

Les éléments de V sont appelés *vecteurs*; ceux de K sont les *scalaires*. On voit immédiatement que $oX = aO = O$, $\forall X \in V$, $\forall a \in K$; réciproquement, $aX = O$, $a \in K$, $X \in V$ impliquent $a = o$, ou $X = O$.

Deux espaces vectoriels V et V' considérés respectivement sur deux corps commutatifs K et K' sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme f du groupe additif sous-jacent à V sur celui de V' et un isomorphisme g du corps K sur K' tels que:

$$f(aX) = g(a)f(X), \qquad \forall a \in K, \ \forall X \in V.$$

Lorsque K et K' coïncident, on peut prendre pour g l'automorphisme identique de K. Un isomorphisme de V sur lui-même est un *automorphisme*. L'ensemble des automorphismes de V constitue un sous-groupe du groupe des permutations de l'ensemble V. En particulier, à tout élément a différent de o dans K on peut associer un automorphisme de V appelé *homothétie* de rapport a et défini par $X \to aX$.

r vecteurs $X_1, X_2, \dots, X_n$ de V sont dits *linéairement indépendants* lorsque toute relation $a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_rX_r = O$, avec $a_i \in K$, $i = 1, 2, \dots, r$, implique $a_1 = a_2 = \dots = a_r = o$. S'il existe un entier naturel n tel que l'on puisse trouver n vecteurs linéairement indépendants $E_1, E_2, \dots, E_n$ dans V, mais que l'on ne puisse pas y trouver $(n+1)$ vecteurs linéairement indépendants, V est dit de *dimension* finie n sur K. Tout élément de V peut alors s'exprimer d'une manière unique sous forme d'une combinaison linéaire des vecteurs $E_1, E_2, \dots, E_n$ à coefficients dans K. Les n vecteurs E_i constituent une *base* de V.

A titre d'exemple, considérons un corps commutatif K; l'ensemble K^n obtenu en faisant le produit de n exemplaires de l'ensemble K peut être muni naturellement d'une structure d'espace vectoriel sur K; il suffit de poser:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n),$$
$$c(a_1, a_2, \dots, a_n) = (ca_1, ca_2, \dots, ca_n);$$
$$a_i, b_i, c \in K; \ i = 1, 2, \dots, n.$$

C'est un espace vectoriel de dimension n sur K que l'on désigne encore par K^n. On peut en former une base en prenant, par exemple, les n vecteurs $E_i = (\delta_{1i}, \delta_{2i}, \dots, \delta_{ni})$, $i = 1, 2, \dots, n$, où δ_{rs} est le symbole de Kronecker, désignant 1 quand $r = s$ et o quand $r \neq s$. Tout espace vectoriel de dimension n sur K est isomorphe à K^n.

Soit L un sous-corps d'un corps commutatif K. On peut considérer K comme un espace vectoriel sur L. Lorsque K est, en tant qu'espace vectoriel, de dimension finie sur L, on dit que K est une *extension finie* de L. On dit que K est une *extension algébrique* de L si, quel que soit $t \in K$, le corps $L(t)$ obtenu en adjoignant t à L est une extension finie de L. Une extension non algébrique est dite *transcendante*. Par exemple, le corps C des nombres complexes est une extension finie du corps R des nombres réels. Le corps des nombres algébriques est une extension algébrique de type infini du corps Q des nombres rationnels. Le corps R est une extension transcendante de type infini du corps Q. Enfin le corps $R(x)$ des fractions rationnelles à une variable x et à coefficients réels est une extension transcendante de R de type fini.

Soit V un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps commutatif K de caractéristique différente de 2. Une *forme bilinéaire* B sur V est une application du produit de V par lui-même dans K: $(X, Y) \to B(X, Y)$, $X, Y \in V$, $B(X, Y) \in K$, telle que:

$$B(aX_1 + bX_2, Y) = aB(X_1, Y) + bB(X_2, Y),$$
$$B(X, cY_1 + dY_2) = cB(X, Y_1) + dB(X, Y_2),$$
$$\forall a, b, c, d \in K; \ \forall X, X_1, X_2, Y, Y_1, Y_2 \in V.$$

B est dite *symétrique* si $B(X, Y) = B(Y, X)$, $\forall X, Y \in V$. De plus, elle est dite *régulière* si, Y étant fixé dans V, la condition $B(X, Y) = o$, $\forall X \in V$ implique $Y = O$.

Une *forme quadratique* Φ sur V est une application de V dans K telle que:

$$\Phi(aX) = a^2 \Phi(X), \qquad \forall a \in K, \qquad \forall X \in V.$$

et que

$$C(X, Y) = \tfrac{1}{2}[\Phi(X+Y) - \Phi(X) - \Phi(Y)], \quad X, Y \in V,$$

soit une forme bilinéaire symétrique sur V. La forme quadratique Φ est dite *régulière* lorsque C est régulière. L'ensemble des automorphismes s de V qui laissent Φ invariante, c'est-à-dire tels que:

$$\Phi(s(X), s(Y)) = \Phi(X, Y), \qquad \forall X, Y \in K,$$

constitue un sous-groupe du groupe des automorphismes de V: le *groupe orthogonal* attaché à la forme Φ sur le corps K, que l'on note $O(K, \Phi)$. Dans le cas particulier où K est un sous-corps du corps des nombres complexes, où l'on identifie V avec K^n, et où la forme quadratique Φ est donnée par:

$$\Phi(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \quad X = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad x_i \in K,$$

on convient souvent de remplacer la notation $O(K, \Phi)$ par $O(n, K)$.

4) *Quelques notions topologiques*

On dit d'un ensemble E qu'il est muni d'une *topologie* ou encore qu'il est un *espace topologique* lorsqu'on y a déterminé une famille $\mathcal{M}$ de parties dites *ouvertes* telle que:

a) La réunion d'une famille quelconque de parties ouvertes de E est un élément de $\mathcal{M}$.

b) L'intersection d'une famille finie de parties ouvertes de E est un élément de $\mathcal{M}$.

Conformément à l'usage, nous admettrons que la réunion d'un ensemble vide de parties de E est la partie vide $\emptyset$ de E; par suite, l'intersection d'un ensemble vide (considéré comme fini) de parties de E est E lui-même. Ainsi, $\mathcal{M}$ contient $\emptyset$ et E. Deux topologies $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ relatives à un même ensemble E sont *identiques* lorsque les familles $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ des parties ouvertes auxquelles elles sont attachées coïncident.

Considérons un ensemble E et une famille quelconque $\mathcal{B}$ de parties de E. Désignons par $\mathcal{M}$ la famille des parties de E qui peuvent être obtenues par réunion d'intersections finies d'éléments de $\mathcal{B}$. Si l'on qualifie d'ouverte toute partie de E appartenant à $\mathcal{M}$, on voit que les conditions a) et b) sont satisfaites.

La topologie ainsi déterminée est dite *engendrée* par $\mathscr{B}$. Il résulte de ces considérations que tout ensemble comportant plus d'un élément peut être muni de plusieurs topologies non identiques. On appelle *base d'une topologie* $\mathscr{T}$ sur un ensemble E toute famille $\mathscr{B}$ de parties de E telle que la topologie engendrée par $\mathscr{B}$ soit identique à $\mathscr{T}$.

Un *espace métrique* E est un ensemble dans lequel il existe une *distance*, c'est-à-dire une application d du produit de E par lui-même dans l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls, telle que:

$$1^0 \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \qquad x, y \in E,$$
$$2^0 \quad d(x, y) = d(y, x), \qquad \forall x, y \in E,$$
$$3^0 \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in E.$$

Soit a un élément de E et r un nombre réel positif; la *boule ouverte* de centre a et de rayon r est l'ensemble des éléments x de E tels que $d(a, x) < r$. La topologie de E admettant pour base l'ensemble des boules ouvertes est la *topologie associée à la distance d.*

Un espace topologique muni d'une topologie $\mathscr{T}$ est dit *métrisable* lorsqu'il est possible d'y introduire une distance d telle que la topologie associée à d soit identique à $\mathscr{T}$.

Soit E un espace métrique muni d'une distance d. Une suite d'éléments de E: $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ *converge* vers un élément y de E si, à tout nombre réel $\varepsilon > 0$, on peut associer un nombre naturel $N(\varepsilon)$ tel que $n > N(\varepsilon)$ implique $d(x_n, y) < \varepsilon$; une telle suite est dite *convergente dans E.* Une suite $x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots$ est dite *suite de Cauchy* si, à tout $\varepsilon > 0$, on peut associer un nombre naturel $M(\varepsilon)$ tel que $n > M(\varepsilon)$ et $p > M(\varepsilon)$ impliquent $d(x_n, x_p) < \varepsilon$. On voit facilement que, dans l'espace métrique E, toute suite convergente est une suite de Cauchy. La réciproque peut n'être pas vraie. L'espace métrique E est dit *complet* lorsque toute suite de Cauchy y est convergente.

Soit G un groupe abélien noté additivement. Une distance d existant dans G est dite *invariante* lorsque, quels que soient x, y et z dans G, $d(x+z, y+z) = d(x, y)$. Un *groupe abélien métrisable G* est un ensemble muni d'une part d'une structure de groupe abélien, et d'autre part d'une structure topologique susceptible d'être définie par une distance invariante relativement à la structure de groupe abélien existant dans G.

A titre d'exemple, considérons le groupe additif R^+ des nombres réels; $|x|$ désignant la valeur absolue ordinaire dans R^+, on introduit une distance invariante dans R^+ en posant: $d(x, y) = |x\text{-}y|$. Cette distance fait de l'ensemble R des nombres réels un espace métrique complet. Relativement à l'addition et à la structure topologique considérée, R^+ est un groupe abélien métrisable complet. Si l'on substituait à R^+ le sous-groupe Q^+ des nombres rationnels muni de la même distance d, on obtiendrait un groupe abélien métrisable non complet.

INDEX TERMINOLOGIQUE

INDEX DES NOTATIONS