

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 10 (1964)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Kapitel:** Jahressitzung in Sitten — 31. August 1963

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 09.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Sei  $H$  eine teilweise geordnete Menge mit dem kleinsten Element 0. Sei  $d$  eine Abbildung  $d: E \times E \rightarrow H$  mit:

- $d(x, x) = 0$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- zu  $a \in H$  existiert  $b \in H$ , sodass aus  $d(x, y) \geq b$  und  $d(y, z) \geq b$  folgt, dass  $d(x, z) \geq b$ .

Eine solche Funktion heisse eine Pseudometrik.

$d$  induziert eine uniforme Struktur, wenn verlangt wird, dass die Mengen

$$U_{a_1, \dots, a_n} = \{(x, y) : d(x, y) \geq a_i (i = 1, \dots, n), a_i \neq 0\}$$

eine Basis des Filters der Nachbarschaften bilden sollen.

*Satz:* Ein topologischer Raum ist genau dann uniformisierbar, wenn er pseudometrisierbar ist.

Zum Beweise wird zu einer beliebigen gegebenen uniformen Struktur eine Pseudometrik explizit angegeben, deren zugehörige uniforme Struktur mit der gegebenen übereinstimmt.

### *Frühjahrssitzung in Bern — 9. Juni 1963*

Am 9. Juni 1963 fand im Mathematischen Institut der Universität Bern die Frühjahrssitzung der Gesellschaft statt. Es wurden zwei grosse Vorträge gehalten:

1. Prof. Dr. A. DOLD (Universität Zürich): *Ueber das verallgemeinerte Schönflies-Theorem.*
2. Prof. Dr. P. HENRICI (ETH Zürich): *Einige metrische Aufgaben bei nicht-normalen Matrizen.*

Ferner wurden Bericht und Anträge des Kuratoriums zur Förderung der mathematischen Forschung entgegengenommen und gutgeheissen.

### *Jahressitzung in Sitten — 31. August 1963*

Die Schweizerische Mathematische Gesellschaft hielt am 31. August in Sitten ihre Jahressitzung ab, im Rahmen der Jahresversammlung der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft. Den Vorsitz hatte der Präsident der SMG, Professor B. ECKMANN, inne. Es wurden sieben wissenschaftliche Vorträge gehalten, die untenstehend entweder durch Titel oder durch Auszug angeführt sind.

In der Geschäftssitzung wurde der Vorstand der SMG für die Amtsperiode 1964/65 wie folgt neu bestellt: *Präsident: Prof. Dr. J. DE SIEBENTHAL* (Lausanne), *Vizepräsident: Prof. Dr. H. HUBER* (Basel),

*Sekretär/Kassier*: Prof. Dr. W. NEF (Bern); als Rechnungsrevisoren wurden die Herren Professor WEGMÜLLER und Dr. ROTH (Bern) gewählt. Ferner wurde die Ernennung von Herrn Professor Rolf NEVANLINNA zum Ehrenmitglied der Gesellschaft (10. Juli 1963) von den anwesenden Mitgliedern durch Akklamation ratifiziert.

*Wissenschaftliche Mitteilungen*:

1. M<sup>me</sup> S. PICCARD (Neuchâtel): 1. *Dépendance et indépendance linéaire modulo n de vecteurs à composantes entières d'un espace vectoriel à un nombre quelconque de dimensions*; 2. *Sur les groupes quasi libres*.
2. W. HATCHER (Neuchâtel): *La notion d'équivalence entre systèmes formels*.
3. C. PIRON (Lausanne): *Définition de l'espace de Hilbert comme géométrie projective orthocomplémentée généralisée*.
4. P. JEANQUARTIER (Lausanne): *Distributions invariantes*.
5. K. VOSS (Zürich): *Ueber vollständige Minimalflächen*.
6. E. KREYSZIG (Graz): *Eine Verallgemeinerung der Whittaker-Bergman-Operatoren*.
7. A. PFLUGER (Zürich): *Ueber harmonische Funktionen im Einheitskreis mit Werten in einem Banachschen Raum*.

1. Sophie PICCARD (Neuchâtel): *Dépendance et indépendance linéaire modulo n de vecteurs à composantes entières d'un espace vectoriel à un nombre quelconque de dimensions*.

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension quelconque défini sur un corps  $K$  de scalaires (par exemple sur le corps des réels) et rapporté à une base donnée quelconque  $\{\vec{e}_\lambda\}$ ,  $\lambda \in \Lambda$ ; soit  $\{x^\lambda\}$ ,  $\lambda \in \Lambda$ , l'ensemble des composantes scalaires d'un vecteur quelconque  $\vec{x}$  de  $E$  dans cette base. Envisageons l'ensemble  $\mathfrak{M}$  des vecteurs  $\vec{x}$  de  $E$  dont toutes les composantes  $x^\lambda$  sont des nombres entiers du corps  $K$ . Cet ensemble  $\mathfrak{M}$  constitue un module par rapport à l'addition vectorielle. Il contient avec tout couple  $\vec{x}, \vec{y}$  d'éléments de  $E$  leur somme et leur différence. Soit maintenant  $n$  un entier fixe  $\geq 2$ . Nous disons qu'un vecteur  $\vec{x} \{x^\lambda\}$ ,  $\lambda \in \Lambda$ , de  $\mathfrak{M}$  est congru au vecteur nul modulo  $n$  et nous écrivons  $\vec{x} \equiv 0 \pmod{n}$  si on a  $x^\lambda \equiv 0 \pmod{n}$  quel que soit  $\lambda \in \Lambda$ . Soit  $S$  un système de vecteurs du module  $\mathfrak{M}$ . Si le système  $S$  est fini, formé des vecteurs  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ , nous disons que ce système est linéairement indépendant modulo  $n$  si la congruence vectorielle I)  $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k \equiv 0 \pmod{n}$  implique que chacun des scalaires  $\alpha_i$  est un entier du corps  $K$ , tel que  $\alpha_i \equiv 0 \pmod{n}$ , et nous disons que

les vecteurs du système  $S$  sont liés linéairement modulo  $n$  s'il existe un système d'entiers  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  de  $K$ , dont l'un au moins n'est pas congru à 0 modulo  $n$  et tels que la congruence vectorielle I) a lieu. Et, si le système  $S$  est infini, nous disons que les vecteurs de  $S$  sont linéairement indépendants modulo  $n$  si tout ensemble fini d'éléments de  $S$  est linéairement indépendant modulo  $n$ ; par contre le système  $S$  est lié modulo  $n$  s'il existe dans  $S$  au moins un système fini de vecteurs qui sont liés linéairement modulo  $n$ .

Soient  $n, s$ , et  $t$  trois entiers, tels que  $n \geq 2, 1 \leq t \leq s$  et soient  $\vec{v}_i, i = 1, \dots, t$ ,  $t$  vecteurs d'un espace vectoriel à  $s$  dimensions, rapporté à une base donnée  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_s$ . Soient  $a_i^1, \dots, a_i^s$  les composantes de  $\vec{v}_i$  dans cette base, soit  $A = (a_i^j)$  la matrice dont les vecteurs  $\vec{v}_i$  sont les vecteurs colonnes.

**PROPOSITION 1.** Pour que les  $t$  vecteurs  $\vec{v}_i$  soient linéairement indépendants modulo  $n$  il faut et il suffit que la matrice  $A$  soit de rang  $t$  et que le p.g.c.d. de  $n$  et de tous les mineurs d'ordre  $t$  de  $A$  soit égal à 1.

*Démonstration.* La condition est nécessaire. En effet, supposons que les  $t$  vecteurs  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_t$  sont linéairement indépendants modulo  $n$  et par conséquent que la congruence I')  $\alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_t \vec{v}_t \equiv 0 \pmod{n}$  implique que  $\alpha_i \equiv 0 \pmod{n}, i = 1, \dots, t$ . Soit  $r$  le rang de la matrice  $A$ . On ne saurait avoir  $r < t$ , car si  $r$  était  $< t$ , il existerait un système d'entiers  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  dont l'un au moins est  $\not\equiv 0 \pmod{n}$  et qui satisferaient la congruence I'), ce qui est contradictoire. En effet, la congruence vectorielle I') implique les  $s$  congruences numériques II)  $\alpha_1 a_1^i + \dots + \alpha_t a_t^i \equiv 0 \pmod{n}, i = 1, 2, \dots, s$ . Or, le système de congruences II) équivaut aux systèmes d'équations linéaires III)  $\alpha_1 a_1^i + \dots + \alpha_t a_t^i = v_i \pmod{n}, i = 1, \dots, s$ , où les entiers  $v_i$  sont arbitraires. On peut donc poser  $v_i = 0, i = 1, \dots, s$ , ce qui donne le système homogène III')  $\alpha_1 a_1^i + \dots + \alpha_t a_t^i = 0, i = 1, \dots, s$ , où les inconnues sont  $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ . Le rang  $r$  de ce système est, par hypothèse,  $< t$ . Il est, d'autre part,  $\geq 1$  puisque le vecteur nul ne figure pas parmi des vecteurs indépendants et par conséquent aucun des vecteurs  $\vec{v}_i$  n'est nul. Donc  $A$  contient des éléments non nuls. Soit  $\delta$  le déterminant mineur principal de  $A$ , que nous supposerons formé des éléments communs aux  $r$  premières lignes et aux  $r$  premières colonnes de  $A$ . (Le raisonnement est analogue quelles que soient les rangées de  $A$  qui contribuent à former  $\delta$ ). Pour résoudre le système III'), il suffit alors de résoudre les  $r$  premières équations de ce système par rapport à  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ . Cette solution peut se mettre sous la forme IV)  $\alpha_i = \frac{-\alpha_{r+1} \delta_{ir+1} - \dots - \alpha_t \delta_{it}}{\delta}, i = 1, \dots, r$ , où  $\delta_{ir+j}$  désigne le déterminant qui se déduit de  $\delta$  en y remplaçant la  $i^{\text{me}}$  colonne

par celle des coefficients de  $\alpha_{r+j}$  dans les  $r$  premières équations III'). Si  $\delta \not\equiv 0 \pmod{n}$ , posons  $\alpha_{r+1} = \dots = \alpha_t = \delta$ . Comme aucun de ces nombres n'est un multiple de  $n$ , on trouve ainsi un système de valeurs entières de  $\alpha_1, \dots, \alpha_t$  qui ne sont pas toutes  $\equiv 0 \pmod{n}$  et qui satisfont la congruence vectorielle I'), ce qui est contradictoire. Et, si  $\delta \equiv 0 \pmod{n}$ , soit  $n^m$  la plus grande puissance de  $n$  qui est diviseur de  $\delta$ , soit  $d^*$  le p.g.c.d. de tous les nombres  $\delta_{ir+j}$ ,  $i = 1, \dots, r$ ,  $j = 1, \dots, t - r$ . Si  $d^*$  est un multiple de  $n^m$ , posons dans les formules IV),  $\alpha_{r+1} = \dots = \alpha_t = \delta'$  ou  $\delta' = \frac{\delta}{n^m} \not\equiv 0 \pmod{n}$ . Ces formules fournissent des valeurs entières de  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  et  $\alpha_1, \dots, \alpha_t$  est une solution de I) où les  $\alpha_i$  ne sont pas tous multiples de  $n$ , ce qui de nouveau est contradictoire. Et si  $d^*$  n'est pas un multiple de  $n^m$ , soit  $n^{m'}$  la plus grande puissance de  $n$  qui est un diviseur de  $d^*$ , soit  $d^* = d'n^{m'}$ . Il existe dans ce cas un couple d'indices  $i$  et  $j$ , tels que  $\delta_{ir+j} = hn^{m'}$ , où l'entier  $h$  est  $\not\equiv 0 \pmod{n}$ . Posons, dans ce cas,  $\alpha_{ir+j} = n^{m-m'} \delta'$  et  $\alpha_{i+j'} = 0$  quel que soit l'indice  $j' \neq j$  de la suite  $1, \dots, t - r$ . Les formules IV) fournissent alors des valeurs entières de  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  et l'ensemble des entiers  $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ , dont l'un au moins  $\alpha_i = h \not\equiv 0 \pmod{n}$ , satisfait la congruence vectorielle I') ce qui est contradictoire. On voit donc que si  $r < t$ , les  $t$  vecteurs  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_t$  sont liés linéairement modulo  $n$ . Si donc les vecteurs  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_t$  sont linéairement indépendants modulo  $n$ , ce que nous supposons, on a  $r = t$ . Il s'ensuit que  $t' > s$  vecteurs de  $\mathfrak{M}$  sont toujours liés linéairement modulo  $n$ .

Supposons maintenant que  $r = t$  et montrons que si les  $t$  vecteurs  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_t$  sont linéairement indépendants modulo  $n$ , on a  $d = 1$ . En effet, supposons le contraire et admettons que le p.g.c.d.  $d$  de  $n$  et de tous les déterminants mineurs d'ordre  $t$  que l'on peut déduire de la matrice  $A$  est  $> 1$ . Soit  $p$  un diviseur premier quelconque de  $d$ , soit  $p^m$  la plus grande puissance de  $p$ , diviseur de tout déterminant mineur d'ordre  $t$  de  $A$  et soit  $\delta$  un déterminant mineur d'ordre  $t$  de  $A$ , tel que  $\delta = \delta' p^m$ ,  $\delta' \not\equiv 0 \pmod{p}$ . Prenons  $\delta$  pour déterminant principal du système d'équations III), équivalent à l'équation vectorielle I'), où  $r = t$ . Comme les vecteurs  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_t$  sont, par hypothèse, linéairement indépendants modulo  $n$ , les seules valeurs de  $\alpha_1, \dots, \alpha_t$  qui satisfont l'ensemble des équations III) sont celles où chacun des  $\alpha_i$  est un multiple de  $n$ . Supposons, pour fixer les idées, que  $\delta$  est formé des éléments communs aux  $t$  premières lignes et aux  $t$  colonnes de  $A$  (le raisonnement est analogue dans les autres cas). Résolvons les équations principales du système III) par la règle de Cramer. Il vient  $\alpha_i = n \frac{\delta_i}{\delta}$ , où  $\delta_i$  est le déterminant qui se déduit de  $\delta$  en y

remplaçant la  $i^{\text{me}}$  colonne par  $\begin{pmatrix} v_i \\ \vdots \\ v_t \end{pmatrix}$ , quel que soit  $i = 1, \dots, t$ .

Développons  $\delta_i$  suivant les éléments de sa  $i^{\text{me}}$  colonne. Il vient  $\delta_i = v_1 A_i^1 + \dots + v_t A_i^t$  où  $A_i^j$  désigne le coefficient de  $a_i^j$  dans le développement de  $\delta$ , quels que soient  $i, j = 1, \dots, t$ . On ne saurait avoir  $A_i^j \equiv 0 \pmod{p^m}$ , quels que soient  $i, j = 1, \dots, t$ , car, dans le cas contraire, le déterminant  $\Delta$  adjoint de  $\delta$ , serait un multiple de  $p^{mt}$ . Mais  $\Delta = \delta^{t-1}$  et, comme  $p$  est premier, que  $\delta = \delta' p^m$  et que  $\delta' \not\equiv 0 \pmod{p}$ , il s'ensuit que  $\delta^{t-1}$  est multiple de  $p^{m(t-1)}$  mais non d'une puissance plus élevée de  $p$ , ce qui contredit l'égalité  $\Delta = \delta^{t-1}$ , puisque  $\Delta$  est multiple de  $p^{mt}$ . On voit donc bien que tous les éléments de  $\Delta$  ne sauraient être des multiples de  $p^m$ . Soit  $i_0, j_0$  un couple d'indices de la suite  $1, \dots, t$ , tel que  $A_{i_0}^{j_0} = h p^{m'}$ ,  $1 \leq m' < m$ ,  $h \not\equiv 0 \pmod{p}$  et que pour tout couple d'indices  $i, j$  compris entre 1 et  $t$ ,  $A_i^j \equiv 0 \pmod{p^{m'}}$ . Posons  $v_{j_0} = \delta' p^{m-m'-1}$ ,  $v_j = 0$  pour tout  $j \not\equiv j_0$  de la suite  $1, \dots, t$ . On obtiendra un système de valeurs de  $\alpha_1, \dots, \alpha_t$

dont l'une au moins  $\alpha_{i_0} = \frac{n}{p} h$  n'est pas un multiple de  $n$ . On démontre

sans peine qu'il est toujours possible de choisir les entiers  $v_{t+1}, \dots, v_s$  de façon à annuler tous les déterminants caractéristiques du système III). On voit donc que si  $d > 1$ , il existe un système de valeurs entières de  $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ , dont l'une au moins n'est pas un multiple de  $n$  et qui satisfont l'équation vectorielle I'), ce qui est contradictoire, puisque  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_t$  sont par hypothèse linéairement indépendants. La condition énoncée est donc bien nécessaire. Elle est aussi suffisante. En effet, supposons que  $r = t$  et que le p.g.c.d.  $d$  de  $n$  et de tous les déterminants mineurs d'ordre  $t$  de  $A$  (dont l'un au moins est  $\neq 0$ ) est  $= 1$ . Il s'agit de montrer que les vecteurs  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_t$  sont linéairement indépendants modulo  $n$ . Décomposons  $n$  en facteurs premiers. Soit  $n = p_1^{m_1} \dots p_h^{m_h}$  cette décomposition. Comme  $d = 1$ , il existe pour tout  $i = 1, \dots, h$ , un déterminant mineur  $\delta_i$  d'ordre  $t$ , non nul, déduit de  $A$ , qui n'est pas divisible par  $p_i$ . Prenons successivement chacun des déterminants  $\delta_1, \dots, \delta_h$  pour déterminant principal du système d'équations III) et résolvons successivement les  $t$  équations principales correspondantes par la règle de Cramer. On trouve

V)  $\alpha_j = n \frac{\delta_{ij}}{\delta_i}$ , où  $i = 1, \dots, h, j = 1, \dots, t$ , et comme pour tout indice  $i$  donné ( $1 \leq i \leq t$ ), le déterminant  $\delta_i$  n'est pas divisible par  $p_i$ , donc à plus forte raison pas par  $p_i^{m_i}$ , si  $m_i > 1$ , il s'ensuit que  $\alpha_i$  défini par la formule V) est un multiple de  $p_i^{m_i}$  qui est un diviseur de  $n$ . Cela étant quel que soit  $i = 1, \dots, h$ , on voit bien que les entiers  $\alpha_1, \dots, \alpha_t$  qui satisfont le système d'équations III) sont tous des multiples de  $n$ . Or le système III) équivaut à la congruence vectorielle I'). Si donc  $d = 1$ , la congruence I') implique que  $\alpha_j \equiv 0 \pmod{n}$ ,  $j = 1, \dots, t$  et, par suite, que les vecteurs  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_t$

sont linéairement indépendants modulo  $n$ . La condition énoncée est donc aussi suffisante et la proposition 1 est démontrée.

Soit maintenant  $E$  un espace vectoriel de dimension infinie, défini sur un corps  $K$  de scalaires, rapporté à une base donnée  $\{ \vec{e}_\lambda \}$ ,  $\lambda \in \Lambda$ , soit  $S$  un système fini ou infini de vecteurs de  $E$ , à composantes entières, et soit  $n$  un entier  $\geq 2$ . Tout vecteur de l'espace  $E$  est une combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs de base. Quel que soit l'entier  $t \geq 1$  et quels que soient  $t$  vecteurs  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_t$  de  $E$ , il existe un système fini  $\vec{e}_{\lambda_1}, \dots, \vec{e}_{\lambda_u}$  de vecteurs de la base donnée de  $E$ , tels que chacun des vecteurs  $\vec{v}_i$  est une combinaison linéaire de ces  $u$  vecteurs. Soit  $\vec{v}_i = a_i^1 \vec{e}_{\lambda_u} + \dots + a_i^u \vec{e}_{\lambda_1}$ ,  $i = 1, \dots, t$ , et soit  $\mu = (a_i^j)$  la matrice des composantes  $a_i^j$ ,  $j = 1, \dots, u$ , des vecteurs  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_t$  relatives aux vecteurs de base  $\vec{e}_{\lambda_1}, \dots, \vec{e}_{\lambda_u}$ . Nous dirons que  $\mu$  est la matrice des composantes essentielles associées à ce système. Toutes les composantes de chacun des vecteurs  $\vec{v}_i$  qui ne figurent pas dans  $\mu$  sont nulles, la matrice  $\mu$  elle-même pouvant également contenir des éléments nuls.

**PROPOSITION 2.** La condition nécessaire et suffisante pour que les vecteurs du système  $S$  soient linéairement indépendants modulo  $n$ , c'est que, quel que soit l'entier  $t \geq 1$  et quels que soient  $t$  vecteurs du système  $S$ , la matrice  $\mu$  des composantes essentielles associée à ces vecteurs soit de rang  $t$  et que le p.g.c.d. de  $n$  et de tous les déterminants mineurs d'ordre  $t$  que l'on peut déduire de  $\mu$  soit égal à 1.

La dépendance et l'indépendance linéaire modulo  $n$  de vecteurs à composantes entières joue un rôle important dans bien des problèmes de la théorie des groupes et en particulier dans celle des groupes quasi libres.

## 2. Sophie PICCARD (Neuchâtel): *Les groupes quasi libres*<sup>1</sup>.

Soit  $G$  un groupe multiplicatif et soit  $A = \{ a_\lambda \}$ ,  $\lambda \in \Lambda$ , un ensemble de ses éléments générateurs. Une relation entre les éléments de  $A$  est appelée *quasi triviale* si elle est de la forme 1)  $f(a_{\lambda_1}, \dots, a_{\lambda_k}) = 1$ , où 1 est l'élément neutre de  $G$  et  $f$  est une composition finie de certains éléments  $a_{\lambda_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , de  $A$ , de degré nul par rapport à chacun d'eux. Le groupe  $G$  est appelé *quasi libre* s'il est engendré par un ensemble  $A$  d'éléments qui ne sont liés

<sup>1)</sup> La démonstration des résultats indiqués dans cette Note est donnée dans l'ouvrage de S. Piccard: *Les Groupes quasi libres*, Paris, Gauthier-Villars (Sous presse).

que par des relations quasi triviales et les éléments de  $A$  sont dits quasi libres. Soit  $n$  un entier  $\geq 2$ . On dit que le groupe  $G$  jouit par rapport à chaque élément de son système générateur  $A$  de la propriété  $P \pmod{n}$  si toute relation 1) entre éléments de  $A$  est telle que son premier membre  $f$  est de degré  $\nu_i \equiv 0 \pmod{n}$  par rapport à  $a_{\lambda i}$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Tout élément de  $G$  qui fait partie d'un système de générateurs de  $G$  liés uniquement par des relations quasi triviales est appelé quasi libre. Un groupe quasi libre jouit par rapport à tout élément d'un quelconque de ses systèmes de générateurs quasi libres de la propriété  $P \pmod{n}$ ,  $n = 2, 3, \dots$ .

Soit  $G$  un groupe quasi libre et soit  $A$  un système de générateurs quasi libres de  $G$ . Tout élément  $a$  du groupe  $G$  possède alors un degré fixe par rapport à tout élément de  $A$  en ce sens que, quel que soit  $\lambda \in \Lambda$ , toute composition finie d'éléments de  $A$  qui représente  $a$  a le même degré par rapport à  $a_\lambda$ . Soit  $a$  un élément quelconque de  $G$  et soit  $\mu_\lambda$  son degré par rapport à  $a_\lambda$ , quel que soit  $\lambda \in \Lambda$ . Nous dirons que  $a$  appartient à la classe  $M\left(\begin{smallmatrix} a_\lambda \\ \mu_\lambda \end{smallmatrix}\right)$ ,  $\lambda \in \Lambda$ . On répartit ainsi les éléments de  $G$  en classes d'équivalence, disjointes deux à deux, d'égale puissance. On peut définir pour ces classes  $M$  une loi de composition commutative et associative, appelée produit, comme suit. Soient  $M\left(\begin{smallmatrix} a_\lambda \\ \mu_\lambda \end{smallmatrix}\right)$  et  $M\left(\begin{smallmatrix} a_\lambda \\ \nu_\lambda \end{smallmatrix}\right)$  deux classes  $M$ . Leur produit est l'ensemble des éléments de  $G$  de la forme  $ab$ , où  $a \in M\left(\begin{smallmatrix} a_\lambda \\ \mu_\lambda \end{smallmatrix}\right)$  et  $b \in M\left(\begin{smallmatrix} a_\lambda \\ \nu_\lambda \end{smallmatrix}\right)$ . Ce produit est la classe  $M\left(\begin{smallmatrix} a_\lambda \\ \mu_\lambda + \nu_\lambda \end{smallmatrix}\right)$ . Avec cette loi de composition, les classes  $M$  forment un groupe abélien  $\Gamma$  associé à  $G$ . L'élément neutre de  $\Gamma$  est la classe  $_0M = M\left(\begin{smallmatrix} a_\lambda \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ ,  $\lambda \in \Lambda$ , dite classe  $M$  nulle.

Un système de générateurs  $A$  d'un groupe  $G$  est dit *irréductible* si, quels que soient les entiers  $k$  et  $m$  ( $1 \leq k < m$ ), il n'existe aucun système formé de  $k$  éléments de  $G$ , que l'on puisse substituer à  $m$  éléments de  $A$  et obtenir un nouvel ensemble  $A^*$  générateur de  $G$ . Lorsque le système  $A$  est irréductible, nous disons qu'il constitue une *base* de  $G$ . Un groupe qui possède des bases est appelé *fondamental*.

Tout groupe quasi libre est fondamental et tout système de générateurs quasi libres constitue une base de ce groupe. Le groupe abélien  $\Gamma$  est également fondamental et, si  $A$  est d'ordre fini  $n$ ,  $\Gamma$  est également à base d'ordre  $n$ .

Un nombre fini quelconque  $m$  de classes  $M$ :  $_iM$ ,  $i = 1, \dots, m$ , sont dites *indépendantes* si la relation  $(_1M)^{n_1} \dots (_mM)^{n_m} = _0M$ , où  $n_1, \dots, n_m$  sont des entiers, implique que  $n_1 = \dots = n_m = 0$ . Un

sous-ensemble infini de  $\Gamma$  est dit indépendant si chacun de ses sous-ensembles finis est formé de classes  $M$  indépendantes.

Soit  $\mathfrak{M}$  un ensemble ordonné de classes  $M$ . Chacune d'elles est formée d'éléments de  $G$  de degré non nul tout au plus par rapport à un nombre fini d'éléments de  $A$ . Pour tout ensemble fini  $\mathfrak{M}$  de classes  $M$  dont l'une au moins n'est pas nulle il existe un ensemble fini<sup>1)</sup>  $A^*$  d'éléments de  $A$ , tels que l'un au moins des éléments de  $G$  faisant partie d'une classe  $M$  de  $\mathfrak{M}$  est de degré  $\neq 0$  par rapport à l'élément envisagé de  $A^*$ . Soit  $A^* = \{a_{\lambda_1}, a_{\lambda_2}, \dots, a_{\lambda_r}\}$ ,  $\mathfrak{M} = \{_1 M, _2 M, \dots, _s M\}$  et soit  $\nu_{ij}$  le degré de tout élément de la classe  $_i M$  par rapport à l'élément  $a_{\lambda_j}$  ( $i = 1, \dots, s$ ,  $j = 1, \dots, r$ ). Nous disons que  $\nu_{ij}$  est le degré de la classe  $_i M$  de  $\mathfrak{M}$  par rapport à  $a_{\lambda_j}$  et nous appelons la matrice  $(\nu_{ij})$ , formée de  $s$  lignes et de  $r$  colonnes, la matrice des degrés de l'ensemble  $\mathfrak{M}$  par rapport aux éléments de  $A^*$ . La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble  $\mathfrak{M}$  de puissance quelconque de classes  $M$  soit indépendant c'est que, quel que soit le sous-ensemble fini  $\mathfrak{M}^*$  de  $\mathfrak{M}$ , formé d'un nombre  $k \geq 1$  quelconque de classes  $M$ ,  $\mathfrak{M}^*$  ait une matrice de degrés, par rapport aux éléments de l'ensemble correspondant  $A^*$ , de rang  $k$ . Une classe  $M$  est dite unité si  $M = M \begin{pmatrix} a_{\lambda} \\ \mu_{\lambda} \end{pmatrix}$  où, pour une valeur unique de l'indice  $\lambda \in A$ ,

$\mu_{\lambda} = 1$ , alors que pour tout  $\lambda^* \neq \lambda$  de l'ensemble des indices  $A$ , on a  $\mu_{\lambda^*} = 0$ ; de façon plus précise, une telle classe  $M$  est une classe unité relative à l'élément  $a_{\lambda}$  de  $A$ . Tout ensemble de classes  $M$  unités par rapport à des éléments d'une même base de  $G$  est indépendant et l'ensemble de toutes les classes  $M$  unités par rapport aux divers éléments de  $A$  constitue une base du groupe  $\Gamma$ . La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble  $\mathfrak{M}$  de classes  $M$ , générateur du groupe  $\Gamma$ , constitue une base de ce groupe c'est qu'il soit formé de classes  $M$  indépendantes. L'indépendance du système entraîne son irréductibilité et vice-versa, l'irréductibilité implique l'indépendance des éléments de  $\mathfrak{M}$ .

Lorsque l'ensemble  $A$  de générateurs quasi libres de  $G$  est fini, formé de  $n$  éléments  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , tout système de  $n$  éléments de  $G$ , générateur de ce groupe, constitue une base de  $G$  et il est formé d'éléments quasi libres. Quelle que soit la base  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  de  $G$ , les classes  $M$  qui contiennent les éléments de  $B$  sont indépendantes et forment une base du groupe  $\Gamma$ . Tout élément quasi libre fait partie d'une classe  $M$  et d'une seule et aucune classe  $M$  ne saurait contenir plus d'un élément d'une même base  $A$  de  $G$ . Les classes  $M$  ont un caractère intrinsèque, indépendant de la base  $A$  de  $G$  à partir de laquelle elles sont définies. L'ensemble des éléments de la classe  $M$  nulle constitue un sous-groupe invariant de  $G$ .

---

1) Non majorable.

Les groupes quasi libres sont plus généraux que les groupes libres et les comprennent comme cas particulier. Un groupe quasi libre peut avoir un sous-groupe non fondamental.

2. William S. HATCHER (Neuchâtel): *La notion d'équivalence entre systèmes formels.*

Nous dirons qu'un *système formel logique*  $F$  est un triple ordonné  $\langle S, A, R \rangle$  où  $S$  est un ensemble récursif non-vide, dit l'ensemble des *énoncés* de  $F$ ,  $A$  est un sous-ensemble récursif non-vide de  $S$ , dit l'ensemble des *axiomes* de  $F$ , et  $R$  est un ensemble fini de relations récursives sur  $S$  (chaque relation étant de degré supérieur à 1), dit l'ensemble des *règles primitives d'inférence*. Soit  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$  ( $n > 1$ ) une suite finie d'éléments de  $S$ . Nous disons que l'énoncé  $x$  de  $F$  (donc  $x \in S$ ) est *inféré* de cette suite par la règle primitive  $R_n$  (de degré  $n$ ) si et seulement si la relation  $R_n(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, x)$  tient. Pour  $X \subset S$ ,  $y \in S$ , nous disons que  $y$  est *déductible de  $X$  dans  $F$* , et nous écrivons  $X \vdash_F y$ , si et seulement s'il existe une liste finie d'éléments de  $S$  dont  $y$  est la dernière ligne et telle que chaque membre  $z$  de la liste est, soit: 1) un axiome de  $F$ ; 2) un élément de  $X$ ; 3) inféré d'une permutation quelconque des membres antérieurs à  $z$  dans la liste par une règle primitive d'inférence.

Pour  $X \subset S$ , soit  $\bar{K}_F(X)$  l'ensemble de tous les éléments  $y$  de  $S$  tels que  $X \vdash_F y$ . Nous montrons que  $\bar{K}_F$  est une fermeture de Moore sur  $S$  (mais pas, en général, une fermeture topologique).  $\langle S, \bar{K}_F \rangle$  est donc un espace de Moore univoquement rattaché au système formel  $F$ . Nous définissons *l'isomorphisme* de deux systèmes formels  $F$  et  $F'$  comme étant l'isomorphisme des deux espaces de Moore  $\langle S, \bar{K}_F \rangle$  et  $\langle S', \bar{K}_{F'} \rangle$  qui sont respectivement rattachés à  $F$  et à  $F'$ .

Soit  $\underline{e}$  la relation d'équivalence sur  $S$  définie par  $x \underline{e} y \Leftrightarrow \bar{K}_F(\{x\}) = \bar{K}_F(\{y\})$ . Considérez l'espace de Moore quotient  $F^* = \langle S/\underline{e}, \bar{K}_{F^*} \rangle$  par la relation  $\underline{e}$ , et appelons  $F^*$  le *quasi-système* rattaché au système formel  $F$ . (Nous montrons que  $X \subset S \Rightarrow \bar{K}_F(X) \subset S/\underline{e}$ , d'où il suit que  $X \subset S/\underline{e} \Rightarrow \bar{K}_{F^*}(X) = \bar{K}_F(X)$ . La fermeture sur  $S/\underline{e}$  est donc la même que celle sur  $S$ , à part des distinctions logiques entre ces deux ensembles. Mais, malgré cette compatibilité des fermetures, le quasi-système  $F^*$  ne constitue pas lui-même un système formel en général, comme nous le montrons). Nous disons que deux systèmes formels  $F$  et  $F'$  sont *équivalents* si et seulement si leurs quasi-systèmes respectifs sont isomorphes.

Ces définitions, qui ne s'appuient que sur la structure déductive d'un système formel et non sur une interprétation ou un modèle,

nous permettent de caractériser d'une façon abstraite la structure déductive d'un système formel. Nous démontrons, par exemple, le théorème suivant :

Pour qu'un système formel  $F$  quelconque soit équivalent au Calcul des propositions classique  $P$ , il est nécessaire et suffisant que 1)  $S/e$  soit (dénombrablement) infini, 2) le couple ordonné  $\langle S/e, \mid_{F^*}^0 \rangle$  soit un treillis Booléen *sans aucun atome*, où la relation  $\mid_{F^*}^0$  est la relation  $\mid_{F^*}$  restreinte aux éléments de  $S/e$ . ( $\mid_{F^*}^0$ , ainsi définie, est toujours un ordre partiel sur  $S/e$ , comme nous le montrons). 3)  $X \subset S/e$ ,  $X$  fini, entraîne que  $X \mid_{F^*}^0 y \Leftrightarrow \inf. X \mid_{F^*}^0 y$ , où  $y$  est un élément de  $S/e$ .

Dans ce théorème, la formulation du Calcul des propositions  $P$  implicitement utilisée est celle qui évite une règle primitive de substitution en posant une infinité d'axiomes. Il est intéressant de noter que certaines autres formulations habituelles (par exemple celles qui font appel à la règle primitive de substitution) ne sont pas équivalentes à  $P$ .

#### 4. Pierre JEANQUARTIER (Lausanne): *Distributions invariantes.*

Soit  $\mathcal{D}'$  l'espace des distributions sur  $R^{n+1} \ni (x_1, \dots, x_n, t) = (x, t)$ , et soit  $a$  un nombre réel positif. Nous dirons que  $f \in \mathcal{D}'$  est *invariante* si  $f(\rho x, t) = f(x, t)$  pour toute rotation  $\rho$  de  $R^n$  et que  $f$  est *homogène de degré  $v$*  si  $f(\lambda x, \lambda^a t) = \lambda^v f(x, t)$  pour tout  $\lambda > 0$ . Désignons par  $\mathcal{H}_v$  le sous-espace de  $\mathcal{D}'$  formé des distributions invariantes et homogènes de degré  $v$ . Dans l'ouvert  $|x| \neq 0$  de  $R^{n+1}$ , on peut écrire tout élément  $f \in \mathcal{H}_v$  sous la forme

$$f(x, t) = |x|^v h(t|x|^{-a}),$$

où  $h(s)$  est une distribution d'une seule variable  $s$ ; si  $\varphi(x, t) \in \mathcal{D}$  est à support compact dans  $|x| \neq 0$ , on a alors  $\langle f(x, t), \varphi(x, t) \rangle = \langle h(s), \alpha_v \varphi(s) \rangle$ . On peut prolonger  $\alpha_v$  en une application linéaire continue de  $\mathcal{D}$  sur un espace  $K_v$  de fonctions  $C^\infty$  d'une variable, muni d'une structure topologique convenable, de façon que l'application transposée  $\alpha'_v$ , du dual  $K'_v$  dans  $\mathcal{D}'$ , induise un isomorphisme d'un sous-espace  $H_v$  de  $K'_v$  sur  $\mathcal{H}_v$ . Soit  $N_v$  l'ensemble des entiers  $k \geq 0$  tels que  $-(v+n+a+ka)$  soit entier pair  $\geq 0$ . Si  $N_v$  est vide on a  $H_v = K'_v$ . Localement, les éléments de  $K'_v$  sont des distributions; toutefois un élément non nul de  $K'_v$  peut être nul localement.

Prenons  $a = 2 \frac{p}{q}$ ,  $p$  et  $q$  entiers premiers entre eux  $> 0$ , et considérons par exemple l'opérateur différentiel

$$D = \left( \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{hq} - c (-\Delta_x)^{hp} : \mathcal{H}_v \rightarrow \mathcal{H}_{v-2hp},$$

$h$  entier  $> 0$ ,  $c$  nombre complexe non nul. Envisageons quatre cas: 1)  $hq$  pair,  $c$  non réel  $> 0$ ; 2)  $hq$  pair,  $c$  réel  $> 0$ ; 3)  $hq$  impair,  $c$  non réel; 4)  $hq$  impair,  $c$  réel. Par transformation de Fourier et à l'aide des isomorphismes  $\alpha_v$  on montre que la codimension de l'image de  $D$  est égale au nombre d'éléments de  $N_{\mu'} - N_{\mu''}$  avec:  $\mu'' = v' + 2hp$ ,  $\mu' = v'$  dans les 1<sup>er</sup> et 3<sup>e</sup> cas,  $\mu' = v' + 2p$  dans le 2<sup>e</sup> cas si  $q$  est pair et dans le 4<sup>e</sup> cas,  $\mu' = v' + 4p$  dans le 2<sup>e</sup> cas si  $q$  est impair, où  $v' = -(v+n+a)$ .

En particulier,  $D$  n'admet une solution élémentaire invariante et homogène que si  $N_{-2hp}$  n'a pas d'élément pair, contient au plus un élément pair, est vide ou contient au plus un élément, suivant que l'on considère le 1<sup>er</sup>, 2<sup>e</sup>, 3<sup>e</sup> ou 4<sup>e</sup> cas.

## 5. K. Voss (Zürich): *Über vollständige Minimalflächen.*

Es wird bewiesen:

*Satz 1:* Es gibt bis auf Ähnlichkeit genau zwei vollständige Minimalflächen mit eineindeutiger sphärischer Abbildung: Die Ennepersche Minimalfläche und das Katenoid.

Bei der Enneperschen Fläche ist das sphärische Bild die einfach punktierte Kugel, beim Katenoid die Kugel mit Ausnahme von zwei Diametralpunkten.

Der Beweis erfolgt in vier Schritten:

1. Eine vollständige Fläche im Raum mit eineindeutiger sphärischer Abbildung hat höchstens vier Enden.

Dies folgt aus der Cohn-Vossenschen Ungleichung: Die totale Gauss'sche Krümmung einer Fläche mit vollständiger Riemannscher Metrik ist höchstens gleich  $2\pi\chi$  ( $\chi$  = Euler-Charakteristik). In unserem Falle ist  $\chi = 2$  — Anzahl der Enden.

2. Bei einer vollständigen Minimalfläche mit eineindeutiger sphärischer Abbildung wird jede Normalrichtung mit höchstens vier Ausnahmen angenommen.

Hierzu ziehen wir einen Satz von Osserman und Ahlfors heran (siehe R. OSSERMAN, *Comment. Math. Helv.* 35 (1961) 65-76): Bei

einer vollständigen, nicht ebenen Minimalfläche bilden die Ausnahmewerte der sphärischen Abbildung eine Menge der Kapazität Null. Die zusammenhängenden Komponenten der Ausnahmemenge sind daher einpunktig (sonst wäre die Kapazität positiv), und wir haben höchstens vier solche Komponenten.

3. Ich beweise folgenden lokalen funktionentheoretischen Satz:

*Satz 2:* Ist  $f(z)$  in der Umgebung von  $z_0$  analytisch und  $\neq 0$ , und ist  $z_0$  wesentliche Singularität, so gibt es einen gegen  $z_0$  strebenden Weg, auf dem  $\int |f| |dz| < \infty$  ist.

4. In der Weierstrass'schen Darstellung des Ortsvektors  $\mathbf{x}$  unserer Minimalfläche

$$d\mathbf{x} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1-z^2}{2}, i \frac{1+z^2}{2}, z \right\} f(z) dz$$

ist  $f$  analytisch auf der Kugel mit höchstens 4 Singularitäten. Aus Satz 2 und der Vollständigkeit folgt  $f = 1/p$  mit einem Polynom  $p$  von höchstens drittem Grade. (Ausnahmewerte der sphärischen Abbildung sind die Nullstellen von  $p$  und der Punkt  $\infty$ .) Ferner muss  $d\mathbf{x}$  eindeutig integrierbar sein. Dies trifft nur für  $f = 1$  und  $f = 1/z^2$  zu; dem entsprechen die beiden Flächen des Satzes 1.

Falls  $p$  ein beliebiges Polynom vom Grade  $\leq 3$  ist, so erhält man durch Bildung der universellen Überlagerung neue Beispiele vollständiger Minimalflächen, bei denen die Ausnahmemenge aus genau  $k \leq 4$  beliebigen Punkten der Kugel besteht. Eine Fläche mit Ausnahmewerten  $0, \infty, \pm 1$  war schon von Osserman konstruiert worden.

6. Erwin KREYSZIG (Graz): *Eine Verallgemeinerung der Whittaker-Bergman-Operatoren.*

Betrachtet werden lineare Operatoren  $T$  im Raum der komplex-analytischen Funktionen  $f$  mit dem Wertebereich im Raum der Lösungen  $\omega$  einer linearen partiellen Differentialgleichung

$$L\omega = 0 \quad (1)$$

in  $N$  unabhängigen Veränderlichen und von 2. Ordnung. Mit Hilfe solcher Operatoren lassen sich aus funktionentheoretischen Ergebnissen Sätze über allgemeine Eigenschaften (Singularitäten, Wachstum usw.) der genannten Lösungen gewinnen. Dabei erhebt sich die grundlegende Frage, wie man unter den zahlreichen denkbaren Operatoren diejenigen bestimmen kann, die die Eigenschaften der analytischen Funktionen  $f$  in überschaubarer Weise transformieren.

Für  $N > 2$  betrachten wir hier nur die Laplace-Gleichung. Es sei  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_N)$  und  $\vec{v} = (v_1, \dots, v_{N-2})$ . Ist  $f(u, \vec{v})$  analytisch in  $u = \vec{a} \cdot \vec{x}$  und ist  $\vec{a} = (a_1, \dots, a_N)$  isotrop, so ist

$$h(\vec{x}) = Tf = \prod_{j=1}^{N-2} T_j f, \quad T_j f = \int_C f(u, \vec{v}) dv_j \quad (2)$$

eine harmonische Funktion von  $N$  Veränderlichen. Für jedes  $N = 3, 4, \dots$  existieren beliebig viele solche Operatoren  $T$ , die sich voneinander durch das zugehörige  $\vec{a}$  unterscheiden. Darunter befinden sich als Sonderfälle Operatoren von E. T. Whittaker und S. Bergman ( $N = 3$ ) sowie von A. Erdélyi und R. P. Gilbert ( $N = 4$ ). Für  $N = 3$  und  $N = 4$  kann man jeweils eine Klasse von Operatoren  $T$  angeben, die sich zur Behandlung des Koeffizientenproblems bei Entwicklungen von  $h(\vec{x})$  in eine Reihe harmonischer Polynome eignen. Letztere besitzen gewisse Orthogonalitätseigenschaften und sind im Falle  $N = 4$  mit den Jacobischen Polynomen verwandt.

Für  $N = 2$  ist der Fall der Laplace-Gleichung trivial, und wir betrachten

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + a(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_2} + b(x_1, x_2). \quad (3)$$

Zugehörige Operatoren haben die Form

$$\varphi = Tf = \int_C g(x_1, x_2, t) f(\varphi(x_1, t)) dt \quad (4)$$

mit festem  $\varphi$  und von (3), aber nicht von  $f$  abhängigem  $g$ . Man gewinnt  $g$  nämlich als Lösung einer partiellen Differentialgleichung  $Mg = 0$ . Dabei soll  $g$  « möglichst einfach », die Koeffizienten in (3) aber trotzdem möglichst allgemein sein. H. Florian hat kürzlich ein Verfahren entwickelt, das derartige Funktionen  $g$  liefert. Diese Methode lässt sich auch im Zusammenhang mit einem von M. Eichler angegebenen Operator anwenden.

Abschliessend werden einige offene Fragen gestreift. Dabei wird auf die Bedeutung der Operatoren bei der Untersuchung spezieller Funktionen hingewiesen. Eine grundlegende Arbeit in dieser Richtung ist die Dissertation von P. Henrici.

## 7. A. PFLUGER (Zürich): *Ueber harmonische Funktionen im Einheitskreis mit Werten in einem Banach'schen Raum.*

Die Resolventen unitärer Operatoren auf einem Hilbert'schen Raum sind Beispiele für analytische Funktionen vom Einheitskreis

in einem Banach'schen Raum. Die Darstellbarkeit dieser Resolventen als Integrale der Form

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{i\delta} - z} d\phi(\delta),$$

wo  $\phi$  eine Zerlegung der Einheit ist, legt die Frage nahe, ob die klassischen Sätze über die Darstellbarkeit als Stieltjes'sches Integral und die Existenz radialer Grenzwerte fast überall auf die genannten Funktionen übertragen werden können. Es gilt der folgende

*Satz A:*  $F$  sei eine harmonische Funktion vom Einheitskreis  $\{z \mid |z| < 1\}$  in einem komplexen Banach'schen Raum  $B$  und

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|F(re^{i\delta})\| d\delta < \infty$$

( $\lim$  existiert, da  $\|F\|$  subharmonisch ist). Dann gibt es eine Funktion  $\phi$  von beschränkter Schwankung vom Intervall  $[0, 2\pi]$  in  $B$  mit

$$F(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\delta} - z|^2} d\phi(\delta), \quad |z| < 1.$$

Für analytisches  $F$  gilt insbesondere

$$F(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{i\delta} - z} d\phi(\delta).$$

Zum Beweis betrachtet man die Abbildung  $A_r$  von  $C_{2\pi}$  in  $B$ :

$$A_r(f) = \int_0^{2\pi} f(\delta) F(re^{i\delta}) d\delta, \quad f \in C_{2\pi}.$$

Sie konvergiert für  $r \rightarrow 1$  gegen eine beschränkte lineare Abbildung  $A$  und es ist

$$\frac{1}{2\pi} A \left( \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\delta} - z|^2} \right) = F(z). \quad (1)$$

Hätte der Satz von F. Riesz über die Darstellbarkeit beschränkter linearer Funktionale auf  $C_{2\pi}$  durch Stieltjes'sche Integrale hier ein Analogon, so wäre man fertig. Hiefür ist aber die Bedingung der Beschränktheit zu schwach. Hingegen ist die folgende Bedingung notwendig und hinreichend: Es sei  $j$  ein offenes Intervall in  $(0, 2\pi)$ ,  $\varphi_j$  seine charakteristische Funktion und

$$\sigma(j) = \sup \|A(f)\| \quad \text{für } f \in C_{2\pi} \quad \text{und} \quad |f| \leq \varphi_j.$$

Dann gibt es eine Konstante  $K$ , sodass für irgendwelche fremde Intervalle  $j_1, \dots, j_n$  in  $(0, 2\pi)$  gilt

$$\sigma(j_1) + \dots + \sigma(j_n) < K.$$

Ein solches  $\Lambda$  nennt man wohl Abbildung von beschränkter Schwankung. Es gilt: Zu einer linearer Abbildung  $\Lambda$  von  $C_{2\pi}$  in  $B$  gibt es eine Funktion  $\phi$  von  $(0, 2\pi)$  in  $B$ , die von beschränkter Schwankung ist, mit

$$\Lambda(f) = \int_0^{2\pi} f(\delta) d\phi(\delta), \quad f \in C_{2\pi}, \quad (2)$$

dann und nur dann, wenn  $\Lambda$  von beschränkter Schwankung ist. Ist  $B$  der Körper der komplexen Zahlen, so ist jedes beschränkte  $\Lambda$  auch von beschränkter Schwankung, da zu jeder komplexen Zahl  $c$  ein reelles  $\alpha$  mit  $e^{i\alpha} c = |c|$  existiert.

Es ist leicht zu zeigen, dass das eingangs mit  $F$  konstruierte  $\Lambda$  von beschränkter Schwankung ist. (1) und (2) ergeben dann sofort die Behauptung des Satzes.

Wie im klassischen Fall zeigt man: Wo  $\phi$  differenzierbar ist, existiert der Grenzwert  $\lim_{r \rightarrow 1} F(re^{i\delta})$ . In einigen Banach'schen Räumen,

z.B. den gleichmässig konvexen, gilt auch das Analogon zum Lebesgue'schen Satz von der « Differenzierbarkeit fast überall » einer Funktion von beschränkter Schwankung<sup>1)</sup> und damit in Verbindung mit Satz A das Analogon zum Satz von Fatou von der Existenz radialer Grenzwerte fast überall.

---

<sup>1)</sup> J. A. CLARKSON, Uniformly convex spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **40** (1936), 396-414.