SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE SUISSE

Frühjahrssitzung in Bern — 3. Juni 1962

Am 3. Juni 1962 fand im Mathematischen Institut der Universität Bern die Frühjahrssitzung der Gesellschaft statt. Herr Professor A. Haefliger, Genf, hielt einen Vortrag über das Thema « Résultats récents sur les plongements différentiables d'une variété dans une autre ». Ferner diskutierte das Plenum über Massnahmen zur Förderung der mathematischen Forschung in der Schweiz. Es wurde ein Kuratorium aufgestellt, das sich mit diesen Fragen zu befassen hat.

Jahressitzung in Schuls — 8. September 1962

Die Schweizerische Mathematische Gesellschaft hielt am 8. September in Schuls ihre Jahressitzung ab, im Rahmen der Jahresversammlung der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft. Den Vorsitz hatte der Vizepräsident der SMG, Herr Professor J. de Siebenthal, inne. Es wurden sechs wissenschaftliche Vorträge gehalten, die untenstehend entweder durch Titel oder durch Auszug angeführt sind.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

1. M^lle^ S. PICCARD (Neuchâtel): 1. *Sur les ensembles de Souslin.* 2. *Un problème de la théorie des groupes.*
2. H. BIERI (Bern): *Ein Extremalproblem und seine Lösung mit allereinfachsten Mitteln.*
3. J. SUTTER (Aarau): *Konstruktion hyperbolischer Riemannscher Flächen durch Asymmetrie.*
4. B. ZWAHLEN (Zürich): *Ueber die Eigenwerte einer Summe von Hermiteschen Operatoren.*
5. B. SCARPELLINI (Genf): *Unentscheidbare Probleme in der Analysis.*
6. H. MATZINGER (Zürich): *Bemerkungen zum Begriff der uniformen Struktur.*

1. Sophie PICCARD (Neuchâtel): *Sur les ensembles de Souslin.*

Supposons le plan euclidien référé à un système d'axes rectangulaires $0xy$. Soit a_n, $n = 1, 2, \ldots$, une suite dénombrable de nombres réels, soit d_n la droite d'équation $y = a_n$, $n = 1, 2, \ldots$, soit M_n un ensemble linéaire mesurable B dont le support est la droite d_n et soit $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$. L'ensemble C est aussi mesurable B. C est un crible plan, dans le sens de N. Lusin, d'un ensemble de Souslin E dont $0x$ est le support et qui est l'ensemble des points $(x, 0)$ de $0x$, tels que la perpendiculaire en $(x, 0)$ à $0x$ coupe C en un ensemble de points P_x qui n'est pas bien ordonné suivant la grandeur des ordonnées de ses points. Soit $\mathcal{E}$ le complémentaire de E par rapport à $0x$ et soient $\mathcal{E} = \bigcup_{\alpha<\Omega} \mathcal{E}_\alpha$ et $E = \bigcup_{\alpha<\Omega} E_\alpha$ les décompositions en constituantes des ensembles $\mathcal{E}$ et E, faites à partir du crible C. On sait que toutes les constituantes de $\mathcal{E}$ et de E sont des ensembles mesurables B et qu'il y a une infinité indénombrable de constituantes non vides si E n'est pas mesurable B.

Pour étudier la décomposition de E et celle de $\mathcal{E}$ en constituantes, N. Lusin a introduit la notion de crible dérivé. Soit $M_n^0 = M_n$, $n = 1, 2, \ldots, C^0 = C$. Soit à présent α un nombre ordinal quelconque > 0 et $< \Omega$ et supposons que nous ayons déjà défini les ensembles M_n^ξ — sous-ensembles mesurables B de M_n et le crible C^ξ qui en est la réunion, quel que soit le nombre ordinal $\xi < \alpha$. Si le nombre ordinal α est de première espèce: $\alpha = \alpha^* + 1$, désignons par $C_n^{\alpha^*}$ la partie du crible C^{α^*} formée de tous les points de cet ensemble d'ordonnée $< a_n$, soit $(C_n^{\alpha^*})_{d_n}$ la projection orthogonale de cet ensemble sur la droite d_n.

Posons $M_n^\alpha = M_n^{\alpha^*} \cap (C_n^{\alpha^*})_{d_n}$. $R_n^\alpha = M_n^{\alpha^*} - (C_n^{\alpha^*})_{d_n}$ et soit $C^\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n^\alpha$.

Et, si α est de seconde espèce, posons $M_n^\alpha = \bigcap_{\xi<\alpha} M_n^\xi$ et $C^\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n^\alpha$.

Par définition, C^α est le crible dérivé d'ordre α de C. C^α crible le même ensemble de Souslin E que C, mais il décompose de la façon suivante E et $\mathcal{E}$ en constituantes mesurables B: $E = \bigcup_{\beta<\Omega} E_\beta^\alpha$, $\mathcal{E} = \bigcup_{\beta<\Omega} \mathcal{E}_\beta^\alpha$, où $E_0^\alpha = \bigcup_{0\leqq\beta\leqq\alpha} E_\beta$, $\mathrm{E}_{\alpha+\gamma} = E_\gamma^\alpha$, $\mathcal{E}_0^\alpha = \bigcup_{0\leqq\beta\leqq\alpha} \mathcal{E}_\beta$, $\mathcal{E}_{\alpha+\gamma} = \mathcal{E}_\gamma^\alpha$ quel que soit le nombre ordinal $\gamma > 0$ et $< \Omega$. A tout nombre ordinal α de première espèce $\alpha = \alpha^* + 1$ correspond une suite dénombrable d'ensembles R_n^α, $n = 1, 2, \ldots$, tels que $C^{\alpha^*} - C^\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n^\alpha$.

Et, si α est de seconde espèce, on a $C - C^\alpha = \bigcup_{\xi=\xi^\alpha+1<\alpha} \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n^\xi$.

Quels que soient les nombres ordinaux α et β $(0 < \alpha < \beta < \Omega)$, on a

$C^\alpha \supset C^\beta$, $C^\beta = C^\alpha \cap C^\beta = \bigcup_{n=1}^{\infty} (M_n^\alpha \cap M_n^\beta) = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n^\beta$ puisque $M_n^\beta \subset M_n^\alpha$ quel que soit $n = 1, 2, \ldots$, ce qui est conforme à la définition du crible C^β. Quel que soit le nombre ordinal $\alpha < \Omega$, le crible dérivé C^α se compose d'une infinité dénombrable d'ensembles linéaires mesurables B de supports parallèles à $0x$.

Il existe, comme on sait, des ensembles de Souslin non mesurables B qui admettent, de même que leurs complémentaires, des décompositions en constituantes E_α et $\mathscr{E}_\alpha$ dont aucune n'est vide, quel que soit l'indice $\alpha < \Omega$. Le crible plan au moyen duquel se fait cette décomposition est appelé universel, car, quel que soit l'ensemble linéaire dénombrable D, il existe au moins une parallèle à $0y$ qui coupe un tel crible en un ensemble de points semblable à D. On sait que si un ensemble de Souslin E n'est pas mesurable B, son complémentaire $\mathscr{E}$ n'est pas un ensemble de Souslin.

Soit E un ensemble linéaire de Souslin non mesurable B, soit $\mathscr{E}$ son complémentaire et soit C un crible plan qui décompose E et $\mathscr{E}$ en constituantes: $E = \bigcup_{\lambda<\Omega} E_\lambda$, $\mathscr{E} = \bigcup_{\lambda<\Omega} \mathscr{E}_\lambda$.

Supposons qu'aucune des constituantes E_λ et $\mathscr{E}_\lambda$ n'est vide, quel que soit $\lambda < \Omega$.

La proposition suivante a lieu: Quels que soient les nombres ordinaux α et β, tels que $0 < \alpha < \beta < \Omega$, il existe un crible plan C^* qui crible l'ensemble E et qui décompose E et $\mathscr{E}$ en constituantes de la façon suivante: $E = \bigcup_{\lambda<\Omega} E^*_\lambda$, $\mathscr{E} = \bigcup_{\lambda<\Omega} \mathscr{E}^*_\lambda$, où $E^*_\lambda = E_\lambda$ et $\mathscr{E}^*_\lambda = \mathscr{E}_\lambda$ quel que soit $\lambda < \alpha$, $E^*_\alpha = E_\alpha \cup E_{\alpha+1} \cup \ldots \cup E_\beta$, $\mathscr{E}^*_\alpha = \mathscr{E}_\alpha \cup \mathscr{E}_{\alpha+1} \cup \ldots \cup \mathscr{E}_\beta$, $E^*_{\alpha+\gamma} = E_{\beta+\gamma}$, $\mathscr{E}^*_{\alpha+\gamma} = \mathscr{E}_{\beta+\gamma}$ quel que soit $\gamma > 0$ et $< \Omega$.

L'opération de dérivation d'un crible a pour effet de réunir en une seule certaines constituantes de E ainsi que de son complémentaire et de changer les indices des constituantes de façon qu'à tout indice $\alpha < \Omega$ corresponde toujours une constituante non vide.

On peut se poser divers problèmes au sujet de la décomposition en constituantes d'un ensemble de Souslin et de son complémentaire.

Problème 1. Existe-t-il pour tout ensemble de Souslin non mesurable B un crible qui le décompose en constituantes de telle façon que quel que soit l'indice $\alpha < \Omega$, la constituante d'indice α aussi bien de E que de son complémentaire soit non vide?

Problème 2. Si pour un indice donné $\alpha < \Omega$, la constituante d'indice α de E est non vide, peut-il exister un autre crible qui décompose E en constituantes de façon que la constituante d'indice α soit vide?

2. Sophie Piccard (Neuchâtel): *Un problème de la théorie des groupes.*

Soit G un groupe multiplicatif à un nombre quelconque (fini ou infini) de générateurs. On désignera par 1 l'élément neutre de G. Soit $A = \{a_\lambda\}_{\lambda \in \Omega}$ un ensemble de générateurs de G et soit p un nombre premier donné $\geqq 2$. Nous disons que G jouit par rapport à tout élément a_λ de A de la propriété P (mod p) si quelle que soit la relation $f(a_{\lambda_1}, a_{\lambda_2}, \ldots, a_{\lambda_t}) = 1$ entre un nombre fini $t \geqq 1$ d'éléments de A, son premier membre f est de degré $\equiv 0 \pmod p$ par rapport à chacun de ces éléments. Le but de ce travail est d'étudier les propriétés de tels groupes.

Soit G un groupe multiplicatif qui jouit de la propriété P (mod p) par rapport à tout élément de son système générateur A.

1. Quel que soit l'élément a de G et quel que soit l'élément a_λ de A, il existe un entier fixe $\mu_\lambda (0 \leqq \mu_\lambda < p)$ telle que toute composition finie d'éléments de A qui représente a est de degré $\equiv \mu_\lambda \pmod p$ par rapport à a_λ. On dira que μ_λ est le degré modulo p de a par rapport à a_λ.

2. Tout élément de A est soit d'ordre infini soit d'ordre $\equiv 0$ (mod p).

3. On peut répartir les éléments de G en classes disjointes $M^{(p)}$ comme suit. Soit a un élément quelconque de G, soit μ_λ l'entier de la suite $0, 1, \ldots, p - 1$ égal au degré mod. p de a par rapport à a_λ. On dira que a est de classe $M^{(p)}\begin{pmatrix} a_\lambda \\ \mu_\lambda \end{pmatrix}_{\lambda \in A}$. Appelons produit de deux classes $M^{(p)}\begin{pmatrix} a_\lambda \\ \mu_\lambda \end{pmatrix}_{\lambda \in A}$ et $M^{(p)}\begin{pmatrix} a_\lambda \\ \nu_\lambda \end{pmatrix}_{\lambda \in A}$ l'ensemble des éléments de G de la forme ab, où a est un élément de la première et b un élément de la seconde classe $M^{(p)}$ considérée. Cette loi de composition est commutative et conduit à une nouvelle classe $M^{(p)}$. L'ensemble des classes $M^{(p)}$ avec la loi de composition indiquée constitue un groupe abélien $\Gamma^{(p)}$ associé au groupe G. L'élément neutre de $\Gamma^{(p)}$ est la classe *nulle* $M_0 = M^{(p)}\begin{pmatrix} a_\lambda \\ 0 \end{pmatrix}_{\lambda \in A}$ qui est un sous-groupe invariant de G. Une classe $M^{(p)}$ est dite unité par rapport à un élément a_λ de A si elle est formée d'éléments de G de degré 1 mod. p par rapport à a_λ et de degré nul mod. p par rapport à tout autre élément de G. Soit $\mathscr{M}$ l'ensemble des classes $M^{(p)}$ unités relativement aux divers éléments de A. Soit n un entier $\geqq 1$ et soient $M_1, \ldots, M_n$ n classes $M^{(p)}$. Ces classes sont dites

indépendentes modulo p si l'égalité I) $(M_1)^{m_1}(M_2)^{m_2}\dots(M_n)^{m_n}=M_0$, où $m_1, \dots, m_n$ sont des entiers, implique que chacun de ces nombres m_i est $\equiv 0 \pmod{p}$. Les classes envisagées sont *liées* modulo p si l'égalité I) est satisfaite pour un système de valeurs des entiers $m_1, \dots, m_n$ dont l'un au moins $\not\equiv 0 \pmod{p}$. D'autre part, un ensemble infini de classes $M^{(p)}$ est appelé lié modulo p s'il existe au moins un système fini de classes de cet ensemble, lié modulo p dans le sens de la définition précédente; par contre on dira qu'un ensemble infini de classes $M^{(p)}$ est formé de classes indépendantes si tout sous-ensemble fini de cet ensemble est formé de classes indépendantes modulo p.

Etant donné n classes $M_1, \dots, M_n$, il existe un nombre fini t d'éléments $a_{\lambda_1}, a_{\lambda_2}, \dots, a_{\lambda_t}$ de A, tels que quel que soit l'indice j $(1 \leqq j \leqq t)$ l'une au moins des classes M données est formée d'éléments de degré mod. p non nul par rapport à a_{λ_j}. Soit ν_i^j le degré modulo p de tout élément de la classe M_i par rapport à a_{λ_γ}. Si $n \leqq \gamma$, la condition nécessaire et suffisante pour que les n classes M_i soient liées mod. p c'est que le *p.g.c.d.* de tous les déterminants d'ordre n que l'on peut déduire de la matrice (ν_i^δ) soit $\equiv 0 \pmod{p}$. Et, si $n > t$, les n classes données sont toujours liées modulo p.

4. Le groupe $\Gamma^{(p)}$ est fondamental, autrement dit il possède des systèmes irréductibles de générateurs qui en sont des *bases*. En particulier, l'ensemble $\mathscr{M}$ est une base de $\Gamma^{(p)}$ et la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble de classes $M^{(p)}$ générateur de $\Gamma^{(p)}$ constitue une base de ce groupe c'est qu'il soit formé de classes $M^{(p)}$ indépendantes. Quel que soit le sous-groupe γ de $\Gamma^{(p)}$, la réunion des classes $M^{(p)}$ qui constituent les éléments de γ est un sous-groupe invariant de G.

5. Le groupe G est fondamental et l'ensemble A est une base de G. *Si l'ensemble A est fini*, on a les résultats suivants:

6. Quelle que soit la base B de G, le groupe G jouit par rapport à tout élément de B de la propriété $P \pmod{p}$.

7. Les classes $M^{(p)}$ ont un caractère intrinsèque, indépendant de la base de G à partir de laquelle elles sont déterminées.

8. Quelle que soit la base B de G, les éléments de B font partie de classes $M^{(p)}$ indépendantes.

Les propriétés 6, 7 et 8 peuvent être en défaut si l'ensemble A de générateurs de G est de puissance infinie.

Au lieu de considérer un nombre premier p, on peut considérer un entier $n \geqq 2$ quelconque et on peut étudier les propriétés d'un groupe multiplicatif G qui jouit de la propriété $P \pmod{n}$ par rapport à tout élément d'un de ses systèmes générateurs A. On peut encore répartir les éléments de G en classes disjointes $M^{(n)}$ pour lesquelles il existe une loi de composition commutative et qui, avec cette loi de composition, forment un groupe abélien. Si l'ensemble A est fini, les classes $M^{(n)}$ ont aussi un caractère intrinsèque, le groupe G est fondamental, A est une base de G et G jouit de la propriété P (mod n) par rapport à tout élément de chacune de ses bases.

Tout groupe abélien d'ordre fini G jouit de la propriété P (mod α_i) par rapport à tout élément de chacune de ses bases (*minima*), α_i désignant le plus petit des invariants du groupe G qui sont les ordres des éléments d'une base minimum de G.

2. H. MATZINGER (Zürich): *Bemerkungen zum Begriff der uniformen Struktur.*

1. Die Definition des metrischen Raumes verwendet den Begriff der (positiven) reellen Zahl. Von der Struktur der reellen Zahlen wird beim Aufbau der Theorie der metrischen Räume aber nur die Existenz einer abzählbaren Basis des Filters der Umgebungen der 0 wesentlich verwendet. Diese Ueberlegungen führen zur Definition eines neuen Distanzbegriffes:

Sei E eine Menge. Sei H die totalgeordnete, abzählbare Menge $H = \{a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_\omega\}$. Sei d eine Abbildung d: $E \times E \to H$, die folgende Axiome erfüllt:

a) $d(x, y) = a_\omega \Leftrightarrow x = y$

b) $d(x, y) = d(y, x)$

c) zu $a_n \in H$ existiert $a_m \in H$, sodass aus $d(x, y), d(y, z) \leqq a_m$ folgt, dass $d(x, z) \leqq a_n$.

d heisst dann eine « Pseudometrik mit abzählbarer Basis ».

Satz: Zu jeder Pseudometrik mit abzählbarer Basis existiert eine (gewöhnliche) Metrik und umgekehrt, sodass die zugehörigen uniformen Strukturen (und Topologieen) identisch sind.

Analoge Zusammenhänge gelten, wenn nicht-Hausdorfsche Abstände betrachtet werden.

2. Die Vermutung liegt nahe, dass mit einer teilweise geordneten Distanzenmenge, deren Ordnungsstruktur « in der Umgebung » des kleinsten Elementes isomorph der Ordnungsstruktur einer Basis des Nachbarschaftsfilters einer gegebenen uniformen Struktur ist, diese uniforme Struktur durch einen verallgemeinerten Distanzbegriff ausgedrückt werden könne.

Sei H eine teilweise geordnete Menge mit dem kleinsten Element 0. Sei d eine Abbildung d: $E \times E \to H$ mit:

a) $d(x, x) = 0$

b) $d(x, y) = d(y, x)$

c) zu $a \in H$ existiert $b \in H$, sodass aus $d(x, y) \not> b$ und $d(y, z) \not> b$ folgt, dass $d(x, z) \not> a$.

Eine solche Funktion heisse eine Pseudometrik.

d induziert eine uniforme Struktur, wenn verlangt wird, dass die Mengen

$$U_{a_1}, \ldots {}_{a_n} = \{(x, y) : d(x, y) \not> a_i \ (i = 1, \ldots n), a_i \neq 0\}$$

eine Basis des Filters der Nachbarschaften bilden sollen.

Satz: Ein topologischer Raum ist genau dann uniformisierbar, wenn er pseudometrisierbar ist.

Zum Beweise wird zu einer beliebigen gegebenen uniformen Struktur eine Pseudometrik explizit angegeben, deren zugehörige uniforme Struktur mit der gegebenen übereinstimmt.

Frühjahrssitzung in Bern — 9. Juni 1963

Am 9. Juni 1963 fand im Mathematischen Institut der Universität Bern die Frühjahrssitzung der Gesellschaft statt. Es wurden zwei grosse Vorträge gehalten:

1. Prof. Dr. A. Dold (Universität Zürich): *Ueber das verallgemeinerte Schönflies-Theorem.*
2. Prof. Dr. P. Henrici (ETH Zürich): *Einige metrische Aufgaben bei nicht-normalen Matrizen.*

Ferner wurden Bericht und Anträge des Kuratoriums zur Förderung der mathematischen Forschung entgegengenommen und gutgeheissen.

Jahressitzung in Sitten — 31. August 1963

Die Schweizerische Mathematische Gesellschaft hielt am 31. August in Sitten ihre Jahressitzung ab, im Rahmen der Jahresversammlung der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft. Den Vorsitz hatte der Präsident der SMG, Professor B. Eckmann, inne. Es wurden sieben wissenschaftliche Vorträge gehalten, die untenstehend entweder durch Titel oder durch Auszug angeführt sind.

In der Geschäftssitzung wurde der Vorstand der SMG für die Amtsperiode 1964/65 wie folgt neu bestellt: *Präsident:* Prof. Dr. J. de Siebenthal (Lausanne), *Vizepräsident:* Prof. Dr. H. Huber (Basel),