Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 10 (1964)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: CALCUL PRATIQUE DES COEFFICIENTS DE TAYLOR D'UNE FONCTION ALGÉBRIQUE

Autor: Comtet, L.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-39424

CALCUL PRATIQUE DES COEFFICIENTS DE TAYLOR D'UNE FONCTION ALGÉBRIQUE

par L. Comtet

Soit y une fonction de la variable complexe x, analytique dans un voisinage de ζ:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-\zeta)^n . \tag{1}$$

Il est souvent commode pour obtenir rapidement les coefficients a_n de la série (1) de prouver que y satisfait à une équation différentielle linéaire dont les coefficients sont des polynomes en x: dans ce cas, les a_n sont fournis par une récurrence linéaire dont les coefficients sont des polynomes en n, et leur calcul de proche en proche devient très aisé; on pourra même en déduire une formule explicite pour a_n dans le cas où la récurrence ainsi introduite a la forme:

$$P(n) \cdot a_n + Q(n) \cdot a_{n+p} = 0 .$$

Par exemple, au voisinage de 0, les fonctions: $y = e^x$, $y = \text{Log}\,(1+x)$, $y = (1+x)^{\alpha}$, vérifient respectivement les équations différentielles: $y' - y = 0$, $(1+x)\,y' - 1 = 0$, $y'\,(1+x) - \alpha y = 0$, ce qui conduit à la forme bien connue de leurs coefficients a_n.

Dans cet ordre d'idées, il peut être intéressant de mettre l'accent sur le fait suivant:

Proposition. — *Toute fonction algébrique d'ordre* n *vérifie une équation différentielle linéaire dont les coefficients sont des polynomes et dont l'ordre est au plus égal à* (n—1).

Démonstration. — Nous supposerons la fonction algébrique y définie par:

$$f(x, y) = A_n(x) \cdot y^n + A_{n-1}(x) \cdot y^{n-1} + \dots + A_1(x) \cdot y + A_0(x) = 0 \tag{2}$$

où les $A_i(x)$ sont des polynomes en x à coefficients complexes; en outre, le polynome f est supposé irréductible.

Nous utiliserons essentiellement le résultat suivant:

Toute fraction rationelle $\dfrac{C(x, y)}{B(x, y)}$ *de x et y (y défini par* (2)) (3)

peut se mettre sous la forme d'un polynome en y, de degré au plus égal à (n—1), *et dont les coefficients sont des fractions rationnelles en x.* [1]

Dans ces conditions, faisons choix d'une branche de la fonction algébrique y de telle sorte que dans un domaine Δ, y n'ait ni pôle, ni point critique (y est alors analytique). Dans Δ, la dérivation de (2) par rapport à x conduit à:

$$y' = -\frac{A_n' y^n + \dots + A_0'}{nA_n y^{n-1} + \dots + A_1}. \tag{4}$$

Compte tenu de (3), (4) s'écrit encore:

$$y' - D_0^{(1)} - D_1^{(1)} y = D_2^{(1)} y^2 + \dots + D_{n-1}^{(1)} y^{n-1} \tag{5_1}$$

où les $D_i^{(1)}$ sont fractions rationnelles de x; dérivons (5_1), et remplaçons y' par sa valeur tirée de (5_1) chaque fois qu'il est en facteur avec un y^j. Compte tenu à nouveau de (3), on obtient

$$y'' - D_0^{(2)} - D_1^{(2)} y = D_2^{(2)} y^2 + \dots + D_{n-1}^{(2)} y^{n-1} \tag{5_2}$$

et ainsi de suite jusqu'à la dérivée $y^{(n-1)}$:

$$y^{(n-1)} - D_0^{(n-1)} - D_1^{(n-1)} y = D_2^{(n-1)} y^2 + \dots + D_{n-1}^{(n-1)} y^{n-1}. \tag{5_{n-1}}$$

L'élimination de y^2, y^3, ..., y^{n-1} dans les $(n—1)$ équations (5) linéaires en y^2, y^3, ..., y^{n-1} implique:

$$\det \begin{bmatrix} y' - D_0^{(1)} - D_1^{(1)} y, & D_2^{(1)}, & \dots\dots\dots\dots, & D_{n-1}^{(1)} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ y^{(n-1)} - D_0^{(n-1)} - D_1^{(n-1)} y, & D_2^{(n-1)}, & \dots, & D_{n-1}^{(n-1)} \end{bmatrix} = 0. \qquad (6)$$

Il suffit alors de chasser les dénominateurs des fractions rationnelles $D_j^{(i)}(x)$ et de développer le déterminant (6) par rapport à sa première colonne, pour obtenir la condition suivante, du type indiqué:

$$P_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + P_{n-2}(x) \cdot y^{(n-2)} + \dots + P_1(x) \cdot y' + P_0(x) \cdot y = S(x) \qquad (7)$$

(P_i, S: polynomes en x).

Remarques

I. Une conséquence immédiate de la proposition est que, au voisinage d'un point ζ régulier pour une branche de y définie par (2), le développement (1) de la dite branche est tel que les a_n vérifient une récurrence linéaire dont les coefficients sont des polynômes en n, de degrés $\leqq$ n — 1.

II. La question se pose évidemment de caractériser parmi les équations différentielles linéaires dont les coefficients sont des polynômes, celles qui admettent une intégrale qui est fonction algébrique (ou encore, parmi les récurrences linéaires dont les coefficients sont des polynômes en n, distinguer celles qui admettent une fonction algébrique pour fonction génératrice).

III. On pourrait appliquer le procédé indiqué plus haut à une fonction y définie par (2), où cette fois les A_i seraient des fonctions analytiques dans un certain domaine Δ, il s'ensuivrait encore une condition analogue à (7) où les P_i seraient des fonctions analytiques dans Δ.

EXEMPLES D'APPLICATIONS

I. Développer en série entière $y = (1+(1+x)^{\frac{1}{2}})^{1/p}$ (x réel, p reel $\neq 0$). Il vient $y^{2p} - 2y^p - x = 0$, ce qui conduit à

$$4p^2 (x+x^2) y'' + 2p [(2p-2) + (3p-2) x] y' - (p-1) y = 0$$

d'où

$$a_{n+1} = -\frac{2pn[p(2n+1)-2] - (p-1)}{2p(n+1)[2p(n+1)-2]} a_n \, .$$

II. Equation différentielle vérifiée par une fonction y:

$$y^3 + p(x) \cdot y + q(x) = 0$$

où les p, q sont analytiques. Si l'on pose:

$\Delta = 4p^3 + 27q^2$; $A = 6pp'q - 4p^2 q'$; $B = 2p^2 p' + 9qq'$; $C = 9p'q - 6pq'$; $A_1 = A'\Delta - A\Delta' + AB - 2C^2 q$; $B_1 = B'\Delta - B\Delta' + B^2 + 2AC - 2pC^2$; $C_1 = C'\Delta - C\Delta' + 3BC$,

on trouve:

$$C\Delta^2 y'' - \Delta C_1 y' + (BC_1 - B_1 C) y + (AC_1 - A_1 C) = 0 \, .$$

Ainsi, par exemple, pour $y^3 + y + x = 0$, au voisinage de $x = 0$, on a $(4+27x^2) y'' + 27xy' - 3y = 0$ ce qui fournit

$$a_{n+2} = -\frac{3(3n+1)(3n-1)}{4(n+1)(n+2)} a_n \qquad (a_{2q} = 0) \, .$$

RÉFÉRENCES

[1] H. MILLOUX (avec la collaboration de Ch. PISOT): Traité de théorie des fonctions, publié sous la direction de M. Gaston Julia: Principes, méthodes générales. *Gauthier-Villars*, 1956.

L. Comtet
96, av. André Morizet
Boulogne, Seine
France

(Reçu le 5 juillet 1963)