Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 10 (1964)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: VERTEX POINTS OF FUNCTIONS
Autor: Amir-Moéz, Ali R.
Kapitel: 6. FUNCTIONS OF FIXED CENTER
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-39423

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Proof: At a vertex point the projection of the direction of quadric curvature on the tangent plane is zero. Thus

$$-\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right) Q^{-1}(I-P) = 0 .$$

This implies that

$$Q^{-1} PQ = P .$$

In all cases this implies

$$PQ = QP .$$

A vertex point in particular may become a spherical point, i.e. a point where

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial \bar{x}_j} = \lambda \delta_{ij} , \lambda$$

is a constant.

A vertex point will be called a cylindrical point when

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial \bar{x}_j} = \lambda \delta_{ij} , i , j \leqq k ,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial \bar{x}_j} = 0 , i , j > k .$$

6. Functions of fixed center

An interesting fact about these functions is that they are not necessarily quadrics.

The equation.

$$\xi Q = -\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right) \tag{6.1}$$

where $\xi = (c_1 - x_1, \ldots, c_n - x_n)$, and $(c_1, \ldots, c_n)$ is the fixed center gives f. To produce a counter example we let the origin be the center and the dimension of the space be two. Then in the real case (6.1) becomes

$$\left.\begin{aligned} x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial x} \\ x\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial f}{\partial y}\,. \end{aligned}\right\} \tag{6.2}$$

We can easily find a solution of (6.2) which is not a quadric. For example

$$f = \frac{x^2}{2}\log\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}+y}{x}\right) + \frac{y}{2}\sqrt{x^2+y^2}\,.$$

REFERENCES

[1] A. R. Amir-Moéz, Quadrics in a Unitary space, *L'Enseignement Mathématique*, tome VII (1961), pp. 252-257.

[2] Penrose, A generalized inverse of matrices, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, vol. 51 (1953), pp. 406-413.

[3] Ali R. Amir-Moéz, Les sommets d'une surface, *L'Enseignement Mathématique* 10 (1964) p. 255

University of Florida
Gainesville, Florida

(Reçu le 1er octobre 1963)