

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 10 (1964)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** ÜBER EINE KLASSE VON FUNKTIONALGLEICHUNGEN  
**Autor:** Gheorghiu, Oct. Em.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-39420>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 13.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# ÜBER EINE KLASSE VON FUNKTIONALGLEICHUNGEN

von Oct. Em. GHEORGHIU

V. ALACI veröffentlichte ein Buch über die quadratische Trigonometrie [1], wo er an Stelle des trigonometrischen Kreises ein Grundquadrat verwendet und an Stelle der Kreisfunktionen das quadratische Sinus und das quadratische Cosinus einführt.

Vor kurzem studierte Herr Ivan Singer [2] den Begriff des abstrakten Winkels und die trigonometrischen Funktionen in einem Banachschen Raum  $I_2$  und leitete als einen Sonderfall die quadratische Trigonometrie von V. ALACI.

In dieser Mitteilung bringen wir die allgemeine messbare Lösung einer Klasse von Funktionalgleichungen mit einer unbekannten Funktion

$$F(x+y) = \frac{[c(ad-bc) + a(ab+cd)] F(x)F(y) + (b^2+d^2)[aF(x) + aF(y) + b]}{(a^2+c^2)[-aF(x)F(y) - bF(x) - bF(y)] + d(ad-bc) - b(ab+cd)} \quad (1)$$

wobei  $a, b, c, d$  beliebige reelle Konstanten sind und  $ad-bc \neq 0$ . In dieser Klasse sind auch die von V. ALACI [4] studierten Funktionalgleichungen der quadratischen Funktionen  $spx$  und  $cpx$  enthalten.

Um die Funktionalgleichung (1) zu lösen, schreiben wir

$$F(x) = \frac{G(x)}{H(x)}.$$

Dann erhalten wir aus (1) das System

$$\begin{aligned} & \frac{G(x+y)}{[c(ad-bc) + a(ab+cd)] G(x)G(y) + (b^2+d^2)[aG(x)H(y) + aG(y)H(x) + bH(x)H(y)]} = \\ & \frac{H(x+y)}{(a^2+c^2)[-aG(x)G(y) - bG(x)H(y) - bG(y)H(x)] + [d(ad-bc) - b(ab+cd)] H(x)H(y)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Bezeichnen wir den gemeinsamen Wert der Verhältnisse von (2) mit einer neuen unbekannten Funktion mit zwei Veränderlichen

$\frac{1}{\lambda(x, y)}$ , so erhalten wir

$$\begin{cases} \lambda(x, y) G(x+y) = [c(ad-bc) + a(ab+cd)] [G(x)G(y) + \\ (b^2+d^2)[aG(x)H(y) + aG(y)H(x) + bH(x)H(y)] \\ \lambda(x, y) H(x+y) = (a^2+c^2) [-aG(x)G(y) - bG(x)H(y) - \\ bG(y)H(x)] + [d(ad-bc) - b(ad+bc)] H(x)H(y). \end{cases} \quad (3)$$

Zur Lösung des Systems (3), welches drei unbekannte Funktionen  $G(x)$ ,  $H(x)$  und  $\lambda(x, y)$  enthält, betrachten wir die Funktionen

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= aG(x) + bH(x) \\ \psi(x) &= cG(x) + dH(x). \end{aligned} \quad (4)$$

Dadurch übergeht das System der Funktionalgleichungen (3) in das System der Funktionalgleichungen, die die trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus charakterisieren

$$\begin{cases} \lambda(x, y) \cdot \varphi(x+y) = \varphi(x)\psi(y) + \varphi(y)\psi(x) \\ \lambda(x, y) \cdot \psi(x+y) = \psi(x)\psi(y) - \varphi(x)\varphi(y). \end{cases} \quad (5)$$

Die allgemeine messbare Lösung dieses Systems wurde von Herrn M. GHERMĂNESCU [3] angegeben und ist

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= A(x) e^{\gamma x} \cdot \sin \alpha x \\ \psi(x) &= A(x) e^{\gamma x} \cdot \cos \alpha x \\ \lambda(x, y) &= \frac{A(x) \cdot A(y)}{A(x+y)} \end{aligned} \quad (6)$$

wobei  $A(x)$  eine beliebige messbare Funktion,  $\alpha$  und  $\gamma$  beliebige reelle Konstanten sind.

Wir gehen durch die Reihe der Substitutionen auf die Funktion  $F(x)$  zurück und finden das Resultat

$$F(x) = \frac{b - d \cdot \operatorname{tg} \alpha x}{c \cdot \operatorname{tg} \alpha x - a}, \quad (7)$$

welches die allgemeine messbare Lösung der Klasse der Funktionalgleichungen (1) ist. Sie enthält eine einzige reelle Konstante  $\alpha$  und stimmt, wie ersichtlich, mit der reellen und stätigen Lösung überein.

Setzen wir in (7)  $a = 1, b = 0, c = -1, d = 1$  oder  $a = -1, b = 1, c = 1, d = 0$ , so finden wir die von V. ALACI [4] gegebenen Lösungen wieder, vorausgesetzt, dass  $spx$  und  $cpx$  stätig sind.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] ALACI, V., Trigonometria pătratică, *ed. Timișoara*, (1939), p. 3-20.
- [2] SINGER, I., Unghiuri abstracte și funcții trigonometrice în spații Banach, *Bul. St. Secția mat. și fiz. Acad. R.P.R.* t. IX, nr. 1. (1957).
- [3] GHERMÂNESCU, M., Caractérisation fonctionnelle des fonctions trigonométriques, *Bull. Inst. Polyt. Jassy*, t. IV, (1949), p. 362-368.
- [4] ALACI, V., Sur deux équations fonctionnelles, *Mathematica (Cluj)*, t. XIX, (1943), p. 23-25.

Octavian Em. GHEORGHIU  
str. Traian Lalescu Nr. 1  
Timișoara 3, R.P.R. (România)

(Reçu le 18 mars 1959.)