Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 10 (1964)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ÜBER EINE KLASSE VON FUNKTIONALGLEICHUNGEN

Autor: Gheorghiu, Oct. Em.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-39420

ÜBER EINE KLASSE VON FUNKTIONALGLEICHUNGEN

von Oct. Em. GHEORGHIU

V. ALACI veröffentlichte ein Buch über die quadratische Trigonometrie [1], wo er an Stelle des trigonometrischen Kreises ein Grundquadrat verwendet und an Stelle der Kreisfunktionen das quadratische Sinus un das quadratische Cosinus einführt.

Vor kurzem studierte Herr Ivan Singer [2] den Begriff des abstrakten Winkels und die trigonometrischen Funktionen in einem Banachschen Raum I_2 und leitete als einen Sonderfall die quadratische Trigonometrie von V. ALACI.

In dieser Mitteilung bringen wir die allgemeine messbare Lösung einer Klasse von Funktionalgleichungen mit einer unbekannten Funktion

$$F(x+y) = \frac{[c(ad-bc)+a(ab+cd)]F(x)F(y)+(b^2+d^2)[aF(x)+aF(y)+b]}{(a^2+c^2)[-aF(x)F(y)-bF(x)-bF(y)]+d(ad-bc)-b(ab+cd)} \qquad (1)$$

wobei a, b, c, d beliebige reelle Konstanten sind und $ad—bc \neq 0$. In dieser Klasse sind auch die von V. ALACI [4] studierten Funktionalgleichungen der quadratischen Funktionen *spx* und *cpx* enthalten.

Um die Funktionalgleichung (1) zu lösen, schreiben wir

$$F(x) = \frac{G(x)}{H(x)}.$$

Dann erhalten wir aus (1) das System

$$\frac{G(x+y)}{[c(ad-bc)+a(ab+cd)]\,G(x)G(y)+(b^2+d^2)\,[aG(x)\,H(y)+aG(y)\,H(x)+bH(x)\,H(y)]} =$$

$$(2)$$

$$= \frac{H(x+y)}{(a^2+c^2)[-aG(x)\,G(y)-bG(x)\,H(y)-bG(y)\,H(x)[+[d(ad-bc)-b(ab+cd)]\,H(x)\,H(y)}.$$

Bezeichnen wir den gemeinsamen Wert der Verhältnisse von (2) mit einer neuen unbekannten Funktion mit zwei Veränderlichen $\dfrac{1}{\lambda(x, y)}$, so erhalten wir

$$\left\{\begin{aligned} \lambda(x,y)\,G(x+y) &= [c(ad-bc)+a(ab+cd)[\;G(x)G(y)+ \\ &\quad (b^2+d^2)[aG(x)H(y)+aG(y)H(x)+bH(x)H(y)] \\ \lambda(x,y)\,H(x+y) &= (a^2+c^2)[-aG(x)G(y)-bG(x)H(y)- \\ &\quad bG(y)H(x)]+[d(ad-bc)-b(ad+bc)]H(x)H(y)\,. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Zur Lösung des Systems (3), welches drei unbekannte Funktionen $G(x)$, $H(x)$ und $\lambda(x, y)$ enthält, betrachten wir die Funktionen

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= aG(x)+bH(x) \\ \psi(x) &= cG(x)+dH(x)\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Dadurch übergeht das System der Funktionalgleichungen (3) in das System der Funktionalgleichungen, die die trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus charakterisieren

$$\left\{\begin{aligned} \lambda(x\,,\,y)\cdot\varphi(x+y) &= \varphi(x)\psi(y)+\varphi(y)\psi(x) \\ \lambda(x\,,\,y)\cdot\psi(x+y) &= \psi(x)\psi(y)-\varphi(x)\varphi(y)\,. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Die allgemeine messbare Lösung dieses Systems wurde von Herrn M. Ghermǎnescu [3] angegeben und ist

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= A(x)\,e^{\gamma x}\cdot\ \sin\,\alpha x \\ \psi(x) &= A(x)\,e^{\gamma x}\,.\ \cos\,\alpha x \\ \lambda(x\,,\,y) &= \frac{A(x)\cdot A(y)}{A(x+y)} \end{aligned} \tag{6}$$

wobei $A(x)$ eine beliebige messbare Funktion, α und γ beliebige reelle Konstanten sind.

Wir gehen durch die Reihe der Substitutionen auf die Funktion $F(x)$ zurück und finden das Resultat

$$F(x) = \frac{b-d\cdot tg\alpha x}{c\cdot tg\alpha x-a}, \tag{7}$$

welches die allgemeine messbare Lösung der Klasse der Funktionalgleichungen (1) ist. Sie enthält eine einzige reelle Konstante α und stimmt, wie ersichtlich, mit der reellen und stätigen Lösung überein.

Setzen wir in (7) $a = 1, b = 0, c = -1, d = 1$ oder $a = -1$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 0$, so finden wir die von V. ALACI [4] gegebenen Lösungen wieder, vorausgesetzt, dass spx und cpx stätig sind.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALACI, V., Trigonometria pătratică, *ed. Timişoara*, (1939), p. 3-20.

[2] SINGER, I., Unghiuri abstracte şi funcţii trigonometrice în spaţii Banach, *Bul. St. Secţia mat. şi fiz. Acad. R.P.R.* t. IX, nr. 1. (1957).

[3] GHERMÂNESCU, M., Caractérisation fonctionnelle des fonctions trigonométriques, *Bull. Inst. Polyt. Jassy*, t. IV, (1949), p. 362-368.

[4] ALACI, V., Sur deux équations fonctionnelles, *Mathematica (Cluj)*, t. XIX, (1943), p. 23-25.

Octavian Em. GHEORGHIU
str. Traian Lalescu Nr. 1
Timişoara 3, R.P.R. (Romînia)

(Reçu le 18 mars 1959.)