Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 10 (1964)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR DIVERSES DÉFINITIONS DE LA DIFFÉRENTIABILITÉ

Autor: Fréchet, Maurice

Kapitel: Quatrième Section Parallélisme entre le cas d'une variable et celui de plusieurs variables pour les propriétés de la différentielle sous sa forme moderne.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-39417

Finalement, les différentiabilités aux sens de Stolz et de Severi sont équivalentes. Et les différentielles correspondantes sont égales.

Conclusion

Finalement, nous avons démontré que *les définitions de la différentielle aux quatre sens :*

d'approximation de Stolz et Fréchet,
géométrique de Fréchet,
opérationnel d'Hadamard,
analogique de Severi,

quoique de formes absolument différentes, sont équivalentes.

Pour abréger, nous donnerons le nom générique de définition de la différentielle *au sens moderne* à chacune des définitions ci-dessus.

Quatrième Section

Parallélisme entre le cas d'une variable et celui de plusieurs variables pour les propriétés de la différentielle sous sa forme moderne.

Nous rappellerons d'abord les propriétés de la différentielle dans les deux cas d'une ou de plusieurs variables en renvoyant le lecteur pour les démonstrations aux traités récents qui utilisent les définitions modernes (nous indiquerons, comme exemple, les pages correspondantes de la troisième édition, 1914, du tome I du cours d'Analyse Infinitésimale [13] de la Vallée-Poussin, et du tome I, 1942 du cours d'analyse mathématique de Valiron [14]. Et nous montrerons par des exemples pour plusieurs de ces propriétés qu'elles disparaissent quand on emploie l'ancienne définition de la différentielle d'une fonction de plusieurs variables, c'est-à-dire quand on suppose seulement l'existence des dérivées partielles au point considéré.

Les traités d'analyse parus, avant—disons—1910, établissaient le parallélisme des propriétés de la différentielle en un point, du cas d'une variable au cas de plusieurs variables en ajoutant à l'hypothèse de l'existence des dérivées partielles en ce point, des hypothèses variées qui, toutes, comprenaient l'hypothèse de l'existence d'au moins l'une des dérivées partielles au voisinage du point considéré. Nous allons montrer que ces démonstrations reposaient sur des hypothèses *effectivement plus strictes* que l'existence d'une différentielle au sens moderne. Pour cela il nous suffira de donner un exemple d'une fonction $f(x, y)$ qui, en un point déterminé, est différentiable au sens moderne sans avoir ses deux dérivées partielles au voisinage de ce point. *Exemple:* On doit à Weierstrass le premier exemple d'une fonction $\varphi(x)$ qui est partout continue et qui n'est nulle part dérivable. Depuis lors, on en a cité d'autres exemples. Soit $\theta(x)$ l'une d'elles. Puisque $\theta(x)$ est continue partout, elle est bornée au voisinage de $x = 0$.

Ceci étant, considérons la fonction

$$f(x\,,\,y) = \rho^2\theta(\rho) \text{ avec } \rho = \sqrt{x^2+y^2}\,.$$

On a

$$\frac{f(x\,,\,o)-f(o\,,\,o)}{x} = \frac{x^2\theta(|x|)}{x} = x\theta(|x|)\,\cdot$$

Quand $x \to o$, $\theta(|x|)$ reste borné, donc $x\,\theta(|x|) \to 0$. Par suite, $f(x, y)$ possède une dérivée partielle par rapport à x, (qui est nulle) à l'origine, de même par rapport à y. On a donc:

$$\frac{f(\Delta x\,,\,\Delta y)-f(o\,,\,o)-f'_x(o\,,\,o)\,\Delta x-f'_y(o\,,\,o)\,\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} =$$

$$\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\;\theta\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)$$

Ce rapport tend donc vers zéro quand $\Delta x^2+\Delta y^2 \to 0$: $f(x, y)$ est différentiable au sens de Stolz à l'origine.

Mais en aucun autre point (a, b) voisin de l'origine, $f(x, y)$ n'a ses deux dérivées partielles. Car si $a^2+b^2 \neq 0$, on a par exemple, $a \neq 0$. Alors:

$$\frac{f(a+h\,,\,b)\ -f\,(a\ ,\ b)}{h} =$$

$$\frac{1}{h}\left\{\left[(a+h)^2+b^2\right]\theta\,(\rho+\Delta\rho)\ -\ (a^2+b^2)\,\theta\,(\rho)\right\} = \qquad (33)$$

$$\left[(a+h)^2+b^2\right]\left[\frac{\theta(\rho+\Delta\rho)-\theta(\rho)}{h}\right]+\left[\frac{\left[(a+h)^2+b^2\right]-(a^2+b)^2}{h}\right]\theta(\rho)\cdot$$

Quand $h \rightarrow o$ le dernier terme tend vers $2a\ \theta\,(\rho)$, avec

$$\rho^2 = a^2 + b^2 .$$

L'avant-dernier terme est égal à

$$\left\{\left[(a+h)^2+b^2\right]\frac{2a\ +\ h}{\sqrt{(a+h)^2+b^2}+\sqrt{a^2+b^2}}\right\}\frac{\theta\,(\rho\ +\ \Delta\rho)\ -\ \theta\,(\rho)}{\Delta\rho},$$

l'accolade tend vers $a\sqrt{a^2+b^2} \neq 0$ quand $h \rightarrow 0$. Dans le second rapport

$$\Delta\rho = \sqrt{(a+h)^2\ +\ b^2}\ -\ \sqrt{a^2\ +\ b^2}$$

tend vers zéro quand $h \rightarrow 0$. Et par suite ce second rapport n'a pas une limite finie et déterminée quand $h \rightarrow 0$. Il en est donc de même de $\dfrac{f\ (a+h,\ b)-f\ (a,\ b)}{h}$, c'est-à-dire que pour $a \neq 0$, $f\,(x,\ y)$ n'a pas de dérivée partielle en x. De même pour $b \neq 0$, $f\,(x,\ y)$ n'a pas de dérivées partielles en y au point $(a,\ b)$.

Ainsi $f\,(x,\ y)$ est différentiable au sens de Stolz à l'origine, mais n'a, en aucun autre point voisin, deux dérivées partielles.

Après cet exemple, nous montrerons que les principales propriétés de la différentielle subsistent quand on passe du cas d'une variable au cas de plusieurs variables, lorsqu'il s'agit de la différentielle au sens moderne. Puis nous montrerons, par des exemples, qu'il n'en était pas de même si la différentiabilité en un point signifiait seulement l'existence en ce point des deux dérivées partielles.

Quelques propriétés des fonctions différentiables

I — *Différentielle au sens moderne en un point*

Fonctions d'une seule variable	Fonctions de plusieurs variables
	A
Une fonction $f(x)$ est continue en tout point où elle est différentiable	En tout point où une fonction est différentiable elle est continue. C'est une conséquence immédiate de la formule de Stolz (8).
	B
Si $f(x)$ est différentiable pour $x = a$ et si $\varphi(t)$ est différentiable pour $t = \alpha$, avec $\varphi(\alpha) = a$, alors $\mathrm{F}(t) \equiv f(\varphi(t))$ est différentiable pour $t = \alpha$ et $dF(t) = f'_a \, d\varphi(t)$ pour $t = \alpha$.	Si $f(x, y)$ est différentiable au point (a, b) et si $\varphi(t, u, v)$, $\Psi(t, u, v)$ sont différentiables au point (α, β, γ) avec $\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = a$; $\Psi(\alpha, \beta, \gamma) = b$, alors $F(u, v, w) = f(\varphi(u, v, w), \Psi(u, v, w))$ est différentiable au point (α, β, γ) et $dF(u, v, w) = f'_x dx + f'_y dy$. C'est ce qu'exprime la définition d'Hadamard.
	C
	Soit une fonction $F(x, y, z)$ qui au point (a, b, c) soit nulle et différentiable avec $F'_c(a, b, c) \neq 0$ et qui soit continue au voisinage de ce point. Alors il existe au moins une fonction $\varphi(x, y)$ différentiable au point (a, b) égale en ce point à c et qui vérifie l'équation $$F(x, y, z) = 0$$ au voisinage du point (a, b) pour $z = \varphi(x, y)$. Quand F'_z existe et est $\neq 0$ au *voisinage* du point (a, b, c) la fonction $\varphi(x, y)$ est la seule qui vérifie les mêmes conditions. Si de plus F est différentiable au *voisinage* de (a, b, c), la solution $\varphi(x, y)$

Fonctions d'une seule variable	Fonctions de plusieurs variables
	sera aussi différentiable *au voisinage* de (a, b, c). Voir, pour les démonstrations, de la Vallée-Poussin [13, page 168]. C′ (généralisation de C) Soient n fonctions $F_1, \dots F_n$ des n variables $l_1, \dots l_n$ et de m autres variables $x, y, \dots$ Supposons qu'au point $(C_1 \dots C_n, \alpha, \beta \dots)$ les fonctions F soient nulles, différentiables et que le déterminant $J = \frac{D(F_1, \dots F_n)}{D(l_1 \dots l_n)}(y)$ soit $\neq 0$. Alors il existe au moins un système de fonctions $L_1(x, y \dots), \dots, L_n(x, y \dots)$ se réduisant à $l_1 \dots l_n$ pour $x = \alpha, y = \beta, \dots$ et tel que $F_j(L_1 \dots L_n, x, y \dots) = 0$ pour $j = 1, \dots n$. Tout système tel que $L_1 \dots L_n$ est différentiable au point $(\alpha, \beta, \dots)$. Enfin si les dérivées partielles qui figurent dans le déterminant J sont continues au point $(C_1 \dots C_n, \alpha, \beta, \dots)$, J ne s'annule pas au voisinage de ce point et le système des solutions $L_1 \dots L_n$ est unique. Pour la démonstration, voir de la Vallée-Poussin (I, page 169). Le théorème précédent subsiste si l'on remplace deux fois le mot différentiable par continue et si l'on suppose que les dérivées partielles de F_j par rapport aux l_i existent non seulement au point $(C_1 \dots \alpha, \dots)$ mais en son voisinage et sont continues en ce point. Pour la démonstration, voir Valiron [14, page 246]

Fonctions d'une seule variable	Fonctions de plusieurs variables
	D
Si $f(x)$ est différentiable au point a, la courbe $y = f(x)$ a une tangente, non parallèle à $0y$, au point $(a, b = f(a))$.	Si $f(x, y)$ est différentiable au point (a, b), la surface $z = f(x, y)$ a un plan tangent non parallèle à $0z$, au point $(a, b, c = f(a, b))$. (Cela résulte de l'équivalence démontrée plus haut de notre définition géométrique avec la définition de Stolz).

Différentielle au sens moderne au voisinage d'un point.

Fonctions d'une seule variable	Fonctions de plusieurs variables
	E
Si $f(x)$ est continue sur le segment $a \leqq x \leqq b$ et si elle est différentiable à l'intérieur de ce segment, on peut écrire $f(b) — f(a) = (b — a)$ $f'(a + \theta h)$ avec $0 < \theta < 1$, $h = b — a$.	Si $f(x, y)$ est continue sur le rectangle $R : a \leqq x \leqq a'$; $b \leqq y \leqq b'$ et si elle est différentiable à l'intérieur de R, on peut écrire: $f(\alpha + h, \beta + k) — f(\alpha, \beta) =$ $hf'_{\alpha}(\alpha + \theta h, \beta + \theta k) +$ $kf'_{\beta}(\alpha + \theta h, \beta + \theta k)$ avec $0 < \theta < 1$, quand les deux points (α, β), $(\alpha + h, \beta + k)$ sont intérieurs à R. Pour le démontrer il suffit d'appliquer la formule $\varphi(1) — \varphi(o) = \varphi'(\theta)$, $o < \theta < 1$ à la fonction $\varphi(t) = f(\alpha + ht, \beta + kt)$ et à calculer $\varphi'(t)$ au moyen du théorème B ci-dessus.
	F
Soit $f(x, \alpha)$ une fonction intégrable en x dans l'intervalle $a \leqq x \leqq b$ pour $\alpha' \leqq \alpha \leqq \alpha''$, qui est différentiable en α pour ce même	Soit $f(x, \alpha, \beta)$ une fonction intégrable en x dans l'intervalle I : $a \leqq x \leqq b$ quand le point (α, β) est sur le rectangle R: $\alpha' \leqq \alpha \leqq \alpha''$, $\beta' \leqq \beta \leqq \beta''$. Si $f(x, \alpha, \beta)$ est différentiable en α, β dans R pour

Fonctions d'une seule variable

ensemble de valeurs de x et de α.
Alors si $f'_\alpha(x, \alpha)$ est continue sur l'ensemble E, l'intégrale $F(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\, dx$ est différentiable pour $\alpha' < \alpha < \alpha''$ et on a

$$F'_\alpha = \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha)\, dx .$$

Fonctions de plusieurs variables

x dans I et si sa différentielle est continue pour x dans I et (α, β) dans R, alors $F(\alpha, \beta) = \int_a^b f(x, \alpha, \beta)\, dx$ est différentiable dans R et sa différentielle est

$$dF(\alpha, \beta) = \int_a^b df\, dx$$

$$= \int_a^b [f'_\alpha(x, \alpha, \beta)\, \Delta\alpha + f'_b(x, \alpha, \beta)\, \Delta\beta]\, dx .$$

En effet

$$\Delta F = \int_a^b [f(x, \alpha + \Delta\alpha, \beta + \Delta\beta) - f(x, \alpha, \beta)]\, dx$$

$$= \int_a^b [\Delta\alpha f'_\alpha(x, \alpha + \theta\Delta\alpha, \beta + \theta\Delta\beta) + \Delta\beta f'_\beta(x, \alpha + \theta\Delta\alpha, \beta + \theta\Delta\beta)]\, dx .$$

D'où

$$\Delta F - \int_a^b df dx =$$

$$\int_a^b \Delta\alpha [f'_\alpha(x, \alpha + \theta\Delta\alpha, \beta + \theta\Delta\beta) - f'_\alpha(x, \alpha, \beta)]\, dx + \int_a^b \Delta\beta [f'_\beta(x, \alpha + \theta\Delta\alpha, \beta + \theta\Delta\beta) - f'_\beta(x, \alpha, \beta)]\, dx = \Delta\alpha \int_a^b A dx + \Delta\beta \int_a^b B dx .$$

Et comme on a supposé df continu, A et B sont deux fonctions de x qui convergent uniformément vers zéro quand $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$ tendent vers zéro. Il en est donc de même de

$$\varepsilon = \int_a^b A dx, \quad \eta = \int_a^b B dx .$$

Fonctions d'une seule variable	Fonctions de plusieurs variables
	On aura donc $\Delta F = \int_a^b dfdx + \varepsilon\Delta\alpha + \eta\Delta\beta$ où ε, η tendent vers zéro avec $\lvert\Delta\alpha\rvert + \lvert\Delta\beta\rvert$. C'est-à-dire que $F(\alpha, \beta)$ est différentiable (pour (α, β) sur R) et qu'on a $dF(\alpha, \beta) = \int_a^b dfdx = \int_a^b [\Delta\alpha f'_\alpha(x, \alpha, \beta) + \Delta\beta f'_\beta(x, \alpha, \beta)]\, dx\,.$

Remarque: On peut démontrer directement, très facilement, les égalités suivantes qui nous seront utiles par la suite, ou les déduire du théorème ci-dessus sur les fonctions composées.

Si y et z sont différentiables:

$$d(y+z) = dy+dz;\ d(zy) = zdy+ydz.$$

Critiques de l'ancienne définition de la différentielle

Nous allons montrer que le parallélisme qui vient d'être illustré par les théorèmes A, B, ... F, n'existe plus quand on définit, comme autrefois, la différentiabilité de $f(x, y)$ au point (a, b) seulement par l'existence des dérivées partielles f'_a, f'_b. Nous en avons déjà cité un exemple page 190.

Rappelons que si $f(x)$ a une différentielle pour $x = a$, la courbe $y = f(x)$ a au point où $x = a$ une tangente non parallèle à oy. Or, à la même page, nous avons montré qu'une fonction $f(x, y)$ peut être continue partout et avoir en un point Q deux dérivées partielles sans avoir un plan tangent en ce point. Donnons d'autres exemples.

A. Si $f(x)$ a une différentielle pour $x = a$, elle est continue pour $x = a$. Mais considérons la fonction $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ pour

$x^2+y^2 \neq o$ et $f(o, o) = 0$. Elle a ses deux dérivées partielles pour $x = 0$, $y = 0$. Pourtant elle n'est pas continue en ce point, puisque $f(x, x) = \frac{1}{2}$ pour $x \neq o$ et $f(o, o) = 0$.

B. Si $f(x)$ a une différentielle pour $x = o$ et si $x = \varphi(t)$ est égal à a pour $t = \alpha$ et est différentiable pour $t = \alpha$, alors $f(\alpha(t))$ est différentiable pour $t = \alpha$. Mais posons $f(x, y) = \sqrt{|xy|}\log(x^2+y^2)$ pour $x^2+y^2 \neq o$ et $f(o, o) = o$. Cette fonction est continue et a deux dérivées partielles, d'ailleurs nulles, pour $x = y = o$. Pourtant si l'on prend $x = t, y = t, F(t) = f(t, t) = |t| \log 2t^2$ pour $t \neq o$, $F(o) = o$ et $F(t)$ n'est pas différentiable pour $t = o$.

C. Considérons la fonction $F(x, y, z)$. Supposons que l'équation $F(x, y, z) = 0$ ait une solution $z = \varphi(x, y)$ continue au point (a, b). Supposons en outre que $F(x, y, z)$ ait ses trois dérivées partielles au point $(a, b, c = \varphi(a, b))$ et que $F'_c(a, b, c)$ soit $\neq o$. Il s'agit de montrer que le théorème C cesse d'être valable si la définition de la différentiabilité d'une fonction en un certain point consiste seulement en la condition que la fonction ait des dérivées partielles en ce point. Nous allons donc montrer qu'il existe au moins une fonction $F(x, y, z)$ satisfaisant aux conditions ci-dessus et pour laquelle aucune solution $\varphi(x, y)$ ne possède ses dérivées partielles au point (a, b) ou bien est telle que, si elle possède en ce point deux dérivées partielles, celles-ci ne vérifient pas les relations:

$$F'_a + F'_c\varphi'_a = 0 \qquad F'_b + F'_c\varphi'_b = 0 .$$

A cet effet, appelons $\varphi(x)$ une fonction nulle, continue, mais non dérivable pour $x = 0$, non nulle pour $x \neq 0$ et telle que $\left|\frac{x}{\varphi(x)}\right|$ soit bornée pour $|x|$ borné. Par exemple, on peut prendre $\varphi(x) = \sqrt{|x|}$.

Introduisons maintenant une fonction $\alpha(x, y)$ bornée au voisinage de $(0, 0)$, différente de zéro à l'origine: $\alpha(o, o) = k > o$ et telle que $\alpha(x, o) = \frac{|x|}{\varphi(x)}$ pour $x \neq 0$. Par exemple,

$$\alpha(x, y) = \sqrt{|x|} + |y| \tag{34}$$

pour $|x| + |y| \neq 0$ *et* $\alpha(o, o) = k$.

Enfin, prenons pour $F(x, y, z)$ la fonction:

$$F(x, y, z) = \alpha(x, y)\left[z - \varphi(x)\right].$$

La fonction $\alpha(x, y)$ est bornée au voisinage de l'origine, on aura donc $F(x, y, \varphi(x)) = 0$ et en particulier $F(o, o, o) = o$. Cette fonction $F(x, y, z)$ est différentiable à l'ancien sens théorique à l'origine. C'est-à-dire que ses trois dérivées partielles existent à l'origine. En effet:

$$\frac{F(x, o, o) - F(o, o, o)}{x} = \frac{\alpha(x, o)\left[o - \varphi(x)\right]}{|x|} = -1.$$

Donc $F'_x(o, o, o)$ existe et est égal à -1.

$$\frac{F(o, y, o) - F(o, o, o)}{y} = \frac{\alpha(o, y)\left[o - o\right]}{y} = 0.$$

Donc $F'_y(o, o, o)$ existe et est nul.

Enfin

$$\frac{F(o, o, z) - F(o, o, o)}{z} = \frac{\alpha(o, o)(z - o)}{z} = k.$$

Donc $F'_z(o, o, o)$ existe et est égal à $k \neq 0$. Toutes les conditions du théorème C sont vérifiées au sens ancien de la différentiabilité. A ce même sens, puisque la solution $\varphi(x)$ n'est pas dérivable, la conclusion du théorème (que $\varphi(x)$ est différentiable à l'origine) n'est pas exacte.

Cinquième Section

Une application à la définition des fonctions monogènes

On dit avec Emile Borel qu'une fonction complexe $f(z)$ de la variable complexe $z = x + iy$ est *monogène* au point $c = a + ib$, si cette fonction est dérivable en ce point. C'est-à-dire que

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = f'_c + \varepsilon \text{ avec } \lim_{\Delta z \to 0} \varepsilon = 0.$$