SUR DIVERSES DÉFINITIONS DE LA DIFFÉRENTIABILITÉ

par Maurice FRÉCHET

INTRODUCTION

L'exposé qui suit a un but purement didactique.

La définition usitée dans notre jeunesse, de la différentielle d'une fonction $f(x, y)$, supposait seulement l'existence des dérivées partielles de f au point considéré.

Mais le recours à une rigueur croissante avait montré que pour étendre au cas de plusieurs variables, les propriétés si utiles de la différentielle d'une fonction d'une variable, il était nécessaire d'introduire des hypothèses (variées avec les différents cas).

C'est alors que plusieurs essais, couronnés de succès, ont montré qu'on pouvait rétablir ce parallélisme en donnant à la différentielle totale une définition plus stricte.

Il est alors curieux de constater que plusieurs de ces essais, partant de considérations totalement différentes, donnant des définitions de la différentiabilité de formes *essentiellement différentes* (comme on va pouvoir s'en assurer plus loin), fournissent cependant des définitions *équivalentes* comme nous avons pu le prouver aux pages 198 à 206. Nous énoncerons les quatre définitions qui sont parvenues à notre connaissance. Comme plusieurs de ces définitions semblent être assez connues et comme la convergence de quatre d'entre elles est un cas assez rare en mathématique, il nous a semblé que leur rappel pourrait intéresser les lecteurs d'une revue du type de « L'Enseignement Mathématique ».

Plusieurs des résultats exposés dans la suite ont été déjà publiés et on trouvera à la fin de ce mémoire, la liste de leurs références bibliographiques. Mais on appréciera peut-être de les trouver ici rassemblés. De plus, quelques résultats, quelques raisonnements présentés ici (en particulier la démonstration des équivalences et celle de certaines propriétés des différentielles secondes) sont inédits.

Le présent exposé est *accessible aux étudiants de première année.*

Résultat

Nous montrerons la supériorité de la définition moderne sur l'ancienne en prouvant que: si, avec l'ancienne, il fallait ajouter certaines hypothèses pour pouvoir établir le parallélisme des propriétés de la différentielle en passant du cas d'une variable à celui de plusieurs variables, ces hypothèses ne sont plus nécessaires quand il s'agit de la définition moderne. Que d'autre part, cette définition moderne garde un sens même quand ces hypothèses ne sont pas toutes vérifiées.

Répartition de l'exposé

Nous diviserons notre exposé en six sections:

Généralisations

Il n'est pas inutile de faire observer que nous avons pu généraliser la notion de différentielle, l'étendre à des fonctions abstraites de variables abstraites [19, 20] [1]), et que ces définitions

[1]) Voir la liste bibliographique à la fin de cet exposé.

ont donné naissance à des applications. Mais une telle étude est *en dehors* du sujet du présent article.

Avant d'aborder notre sujet principal, nous ferons quelques remarques sur d'anciennes conceptions de la différentielle.

Première Section

Préliminaires et historique

Une Variable

Considérons d'abord le cas des fonctions numériques *d'une* variable numérique. La raison de l'introduction de la notion de différentielle doit être cherchée principalement dans *deux directions.*

I — En désignant, suivant la commodité, par l'une ou l'autre des notations $D\,f\,(x)$, f'_x, la dérivée de $f\,(x)$, le théorème des fonctions composées s'écrit sous la forme:

$$Df\,(y\,(x)) = f'_y\,y'_x\,. \tag{1}$$

Posons

$$dy\,(x) = y'_x\,dx$$

et de même

$$df(y) = f'_y\,dy, \tag{2}$$

la formule (1) devient:

$$df(y\,(x)) = f'_y\,y'_x dx = f'_y\,dy\,(x)\,. \tag{3}$$

De sorte que *la même formule* (2) convient aussi bien pour le cas où y est une variable indépendante comme dans (2) que pour le cas où y est une fonction d'une autre variable, comme dans (3).

C'est là un premier avantage très appréciable pour les mathématiciens.