Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 10 (1964)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR DIVERSES DÉFINITIONS DE LA DIFFÉRENTIABILITÉ
Autor: Fréchet, Maurice
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-39417

SUR DIVERSES DÉFINITIONS DE LA DIFFÉRENTIABILITÉ

par Maurice Fréchet

INTRODUCTION

L'exposé qui suit a un but purement didactique.

La définition usitée dans notre jeunesse, de la différentielle d'une fonction $f(x, y)$, supposait seulement l'existence des dérivées partielles de f au point considéré.

Mais le recours à une rigueur croissante avait montré que pour étendre au cas de plusieurs variables, les propriétés si utiles de la différentielle d'une fonction d'une variable, il était nécessaire d'introduire des hypothèses (variées avec les différents cas).

C'est alors que plusieurs essais, couronnés de succès, ont montré qu'on pouvait rétablir ce parallélisme en donnant à la différentielle totale une définition plus stricte.

Il est alors curieux de constater que plusieurs de ces essais, partant de considérations totalement différentes, donnant des définitions de la différentiabilité de formes *essentiellement différentes* (comme on va pouvoir s'en assurer plus loin), fournissent cependant des définitions *équivalentes* comme nous avons pu le prouver aux pages 198 à 206. Nous énoncerons les quatre définitions qui sont parvenues à notre connaissance. Comme plusieurs de ces définitions semblent être assez connues et comme la convergence de quatre d'entre elles est un cas assez rare en mathématique, il nous a semblé que leur rappel pourrait intéresser les lecteurs d'une revue du type de « L'Enseignement Mathématique ».

Plusieurs des résultats exposés dans la suite ont été déjà publiés et on trouvera à la fin de ce mémoire, la liste de leurs références bibliographiques. Mais on appréciera peut-être de les trouver ici rassemblés. De plus, quelques résultats, quelques raisonnements présentés ici (en particulier la démonstration des équivalences et celle de certaines propriétés des différentielles secondes) sont inédits.

Le présent exposé est *accessible aux étudiants de première année.*

Résultat

Nous montrerons la supériorité de la définition moderne sur l'ancienne en prouvant que: si, avec l'ancienne, il fallait ajouter certaines hypothèses pour pouvoir établir le parallélisme des propriétés de la différentielle en passant du cas d'une variable à celui de plusieurs variables, ces hypothèses ne sont plus nécessaires quand il s'agit de la définition moderne. Que d'autre part, cette définition moderne garde un sens même quand ces hypothèses ne sont pas toutes vérifiées.

Répartition de l'exposé

Nous diviserons notre exposé en six sections:

I. Préliminaire et historique 179
II. Définitions modernes de la différentielle d'une fonction de plusieurs variables 183
III. Equivalence des quatre définitions de la différentielle 197
IV. Parallélisme entre le cas d'une variable et celui de plusieurs variables pour les propriétés de la différentielle sous sa forme moderne 206
V. Une application à la définition des fonctions monogènes 215
VI. Différentielles successives. Dérivées partielles du second ordre 217

Généralisations

Il n'est pas inutile de faire observer que nous avons pu généraliser la notion de différentielle, l'étendre à des fonctions abstraites de variables abstraites [19, 20] [1]), et que ces définitions

[1]) Voir la liste bibliographique à la fin de cet exposé.

ont donné naissance à des applications. Mais une telle étude est *en dehors* du sujet du présent article.

Avant d'aborder notre sujet principal, nous ferons quelques remarques sur d'anciennes conceptions de la différentielle.

Première Section

Préliminaires et historique

Une Variable

Considérons d'abord le cas des fonctions numériques *d'une* variable numérique. La raison de l'introduction de la notion de différentielle doit être cherchée principalement dans *deux directions.*

I — En désignant, suivant la commodité, par l'une ou l'autre des notations $D\,f(x)$, f'_x, la dérivée de $f(x)$, le théorème des fonctions composées s'écrit sous la forme:

$$Df(y(x)) = f'_y y'_x . \qquad (1)$$

Posons

$$dy(x) = y'_x dx$$

et de même

$$df(y) = f'_y dy, \qquad (2)$$

la formule (1) devient:

$$df(y(x)) = f'_y y'_x dx = f'_y dy(x) . \qquad (3)$$

De sorte que *la même formule* (2) convient aussi bien pour le cas où y est une variable indépendante comme dans (2) que pour le cas où y est une fonction d'une autre variable, comme dans (3).

C'est là un premier avantage très appréciable pour les mathématiciens.

II — D'autre part, on peut écrire

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_x + \varepsilon \qquad \text{avec} \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon = 0\,,$$

ou, en posant $dy = y'_x\,\Delta x$,

$$\Delta y = dy + \varepsilon \Delta x\,, \tag{4}$$

ou

$$\frac{\Delta y}{dy} = 1 + \frac{\varepsilon \Delta x}{dy} = 1 + \frac{\varepsilon}{y'(x)}\cdot \tag{5}$$

Donc, on peut dire que, si $y'_x \neq 0$, dy est la «partie principale» de Δy quand $\Delta x \to 0$. C'est là un avantage particulièrement apprécié des physiciens, qui pourront, quand Δx est petit, remplacer approximativement Δy, qui peut être une fonction assez compliquée de Δx, par $dy = y'_x \Delta x$, qui est une fonction linéaire de Δx.

Critique

Il faut toutefois remarquer que ce raisonnement suppose $y'_x \neq 0$. Ceci conduit donc à préférer à la formule (5), la formule (4).

La signification de l'approximation de Δy par dy n'est plus la même, au lieu de dire que $\dfrac{\Delta y}{dy} \to 1$ quand $\Delta x \to 0$, on dira que dy ne différe de Δy que par une quantité infiniment petite par rapport à Δx.

Deux Variables

La formule des fonctions composées peut s'écrire:

$$Df\big(y(t)\,,\; z(t)\big) = f'_y y'_t + f'_z z'_t\,.$$

En multipliant par dt, on a:

$$df\big(y(t)\,,\; z(t)\big) = f'_y dy(t) + f'_z dz(t)\,.$$

Mais on peut aussi écrire:

$$df(y, z) = f'_y dy + f'_z dz \tag{6}$$

qui a, comme pour (2), l'avantage d'être écrite indépendamment de la façon dont y et z dépendent de t. C'est encore ici un avantage appréciable pour les mathématiciens.

Quand f'_x, f'_y *existent et sont continues* en x et y *près* de x_0, y_0, on sait qu'on peut écrire:

$$\Delta f(x, y) = \Delta x (f'_{x_0} + \varepsilon) + \Delta y (f'_{y_0} + \varepsilon') \tag{7}$$

où ε et ε' tendent vers zéro quand Δx et Δy tendent simultanément vers zéro. On peut donc écrire

$$\frac{\Delta f}{df} = 1 + \frac{\varepsilon \Delta x + \varepsilon' \Delta y}{f'_{x_0} \Delta x + f'_{y_0} \Delta y}.$$

Dès lors, on est tenté de dire que: lorsque Δx et Δy tendent vers zéro, $\frac{\Delta f}{df} \to 1$, c'est-à-dire que df est la partie principale de Δf. Ici encore, df étant linéaire en Δx et Δy est en général plus simple que Δf, avantage encore apprécié par les physiciens.

Critique

Non seulement, comme dans le cas d'une variable, le raisonnement tombe si f'_{x_0} et f'_{y_0} sont nuls, mais il tombe encore si, en supposant, par exemple, $f'_{y_0} \neq 0$, on fait tendre Δx et Δy vers zéro en maintenant la relation

$$\Delta y = \frac{-f'_{x_0}}{f'_{y_0}} \Delta x .$$

Des observations analogues se présenteraient dans le cas où f dépendrait de plus de deux variables numériques. On voit donc qu'il serait préférable de ne pas définir la différentielle de f comme la valeur principale de son accroissement.

Autres critiques: La formule (7) peut s'écrire sous une forme analogue à (4):

$$\Delta f = df + \varepsilon \Delta x + \varepsilon' \Delta y \tag{7 bis}$$

$$\text{avec } \lim \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{Bmatrix} = 0$$

quand Δx et Δy tendent simultanément vers zéro. Mais pour l'obtenir, on avait dû supposer, non seulement, comme pour (4), l'existence des dérivées partielles au point considéré x_0, y_0, mais encore l'existence et la continuité de ces dérivées *au voisinage* de ce point.

De même, quand on essaie d'étendre au cas de deux variables, les propriétés de la différentielle d'une fonction d'une variable, on est amené, pour chacune, à faire une supposition plus stricte que l'existence des dérivées partielles au point considéré.

Ce sont ces diverses considérations préliminaires qui ont amené indépendamment plusieurs auteurs à formuler des définitions de la différentiabilité plus strictes. Il se trouve que quoique de formes *très différentes* elles conduisent cependant, comme nous allons le voir — et c'est là, probablement, que se placera surtout la nouveauté de nos résultats — à des définitions *équivalentes* de la différentiabilité, et à des expressions *identiques* de la différentielle. Mais chacune a son intérêt et comme plusieurs n'ont pas attiré l'attention, il nous a paru utile de les faire connaître.

Historique

Dans la première édition (datant de 1902) de son excellent cours d'analyse mathématique [1], nous trouvons à la page 25, tome I, sous la plume de Goursat, la définition suivante: « Soit $\omega = f(x, y, z)$ une fonction de trois variables indépendantes x, y, z; on appelle différentielle totale $d\omega$ l'expression suivante:

$$d\omega = f'_x\, dx + f'_y\, dy + f'_z dz$$

où dx, dy, dz, sont trois accroissements constants, d'ailleurs arbitraires, attribués aux variables indépendantes x, y, z».

Telle était à cette époque (et antérieurement) la définition généralement adoptée pour la différentielle d'une fonction de plusieurs variables (voir par exemple, la première partie de notre liste bibliographique à la fin de cet exposé). Elle supposait implicitement, l'existence des dérivées partielles au point considéré mais ne faisait aucune autre hypothèse.

Mais déjà en 1914, dans son cours d'analyse infinitésimale, de la Vallée Poussin écrit à la page V du tome I de la *troisième* édition [13] « ... nous avons abandonné l'ancienne définition de la différentielle totale et adopté celle de Stolz. La supériorité de cette définition a été mise en lumière par les travaux de M. M. S. Pierpont, Fréchet et surtout W. H. Young. Elle est indiscutable: les théorèmes découlant plus directement des principes, la théorie de la différentiation des fonctions explicites et implicites devient plus serrée et, par le fait, plus satisfaisante ». Cette définition est d'ailleurs rappelée à la page 140 du même tome. Les mêmes avantages s'appliquent aux autres définitions que nous rappellerons plus loin, puisqu'elles sont équivalentes à celle de Stolz.

Deuxième Section

Définitions modernes de la différentielle d'une fonction de plusieurs variables

Dans ce qui suit, nous nous limiterons au domaine des fonctions numériques de deux variables numériques, le cas de plus de deux variables numériques pouvant être traité de la même façon.

Autrefois, la définition théorique de la différentiabilité de $f(x, y)$ en un point, consistait dans l'hypothèse de l'existence des deux dérivées partielles en ce point. Pratiquement, pour établir un parallélisme des propriétés de la différentielle entre le cas d'une et celui de plusieurs variables, on faisait généralement l'hypothèse H définie ci-dessous. Les définitions modernes (qui vont suivre) de la différentiabilité (pour plusieurs variables) se placent entre ces deux extrêmes. Comme on le verra plus loin, elles sont moins générales que la définition théorique antérieure et plus générales que la définition pratique antérieure. Le gain acquis par les définitions modernes consiste en ce que, comme la définition pratique antérieure (voir pages 180-181, et 207) plus étroite, elles réalisent le parallélisme cherché, ce que ne faisait pas la définition théorique antérieure.

Considérons d'abord l'exemple A de la page 213; $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, (avec $f(o, o) = o$), a bien ses deux dérivées partielles à l'origine, mais n'est pas continue à l'origine, donc (page 209) n'est pas différentiable au sens moderne.

Plaçons nous maintenant dans l'hypothèse suivante:
Hypothèse H: $f(x, y)$ a ses deux dérivées partielles f'_x, f'_y au *voisinage* du point (a, b) et celles-ci sont continues au point (a, b). Alors on peut écrire

$$\Delta f = f(a+h, b+k) - f(a, b) = f(a+h, b+k) - f(a, b+k) + f(a, b+k) - f(a, b)$$

Et en appliquant le théorème des accroissements finis puisque $f(x, b+k)$ et $f(a, y)$ sont dérivables en x et y respectivement, pour h et k assez petits, on aura:

$$\Delta f = hf'_x(a+\theta h, b+k) + kf'_y(a, b+\theta' k), \quad \text{avec} \quad 0 < \begin{Bmatrix} \theta \\ \theta' \end{Bmatrix} < 1,$$

et puisque f'_x et f'_y sont continues au point (a, b)

$$\Delta f = h[f'_x(a, b) + \varepsilon] + k[f'_y(a, b) + \varepsilon']$$

avec $\lim \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{Bmatrix} = 0$ quand h et k tendent vers zéro.

C'est pour éliminer l'hypothèse H que l'on a commencé à introduire une nouvelle définition de la différentiabilité, consistant à partir de la formule précédente *supposée vraie*, sans tenir compte de H. Le gain consiste en ce que si l'hypothèse H entraîne la formule ci-dessus, la réciproque n'est pas vraie comme le montre l'exemple de la page 207.

La définition de Stolz et celle de Fréchet

I — C'est en s'inspirant des considérations qui précèdent et restent dans le domaine de l'analyse classique que Stolz [7], Pierpont [8] et Young [9] sont parvenus indépendamment et successivement à la définition suivante:

Une fonction $f(x, y)$ est différentiable au point (a, b) si
1° elle est dérivable en ce point par rapport à x et à y,
2° on peut écrire:

$$\Delta f = f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a, b) = (f'_a + \varepsilon)\Delta x + (f'_b + \varepsilon')\Delta y, \quad (8)$$

où ε et ε' tendent vers zéro quand Δx et Δy tendent simultanément vers zéro.

Et s'il en est ainsi, on appelle différentielle de f (au point (a, b) et correspondant aux accroissements Δx, Δy de x et y), l'expression

$$df = f'_a \Delta x + f'_b \Delta y \tag{9}$$

(en prenant pour f, x, on a évidemment $dx = \Delta x$), on aurait de même $dy = \Delta y$, de sorte qu'on peut écrire:

$$df = f'_a dx + f'_b dy \tag{10}$$

égalité qui n'est actuellement établie que lorsque x et y sont des variables indépendantes, mais qui sera généralisée plus loin, voir pages 194. 209.

En 1893, Stolz, après avoir donné sa définition, montre [7] qu'elle permet immédiatement l'extension des propriétés de la différentielle d'une fonction d'une variable. W. H. Young en retrouvant indépendamment ces résultats en 1910, les a complétés dans un excellent opuscule [9] consacré à ces questions [1]).

Il faut ajouter que Stolz a eu aussi l'idée [7] d'une définition équivalente à sa première mais de forme légèrement différente.

Il dit que $f(x, y)$ est différentiable au point (a, b), si l'on peut écrire:

$$\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon\Delta x + \varepsilon'\Delta y \tag{11}$$

où A, B sont indépendants de Δx, Δy et où ε, ε' tendent vers zéro quand Δx et Δy tendent vers zéro.

Et alors la différentielle de f en (a, b) sera:

$$df = A\Delta x + B\Delta y$$

Mais il fait observer que pour $\Delta y \equiv 0$

$$\frac{f(a + \Delta x, b) - f(a, b)}{\Delta x} = A + \varepsilon$$

1) Nous avons nous-même publié un exposé analogue [10] en 1912 avec quelques compléments originaux reproduits ici dans la suite.

de sorte que

1°) $f(x, y)$ a une dérivée partielle f'_a au point (a, b),

2°) A est égal à cette dérivée partielle. On voit de même que f'_b existe et est égal à B.

Les deux définitions de Stolz sont bien équivalentes.

Stolz a aussi donné ([7], page 134) une condition suffisante très générale pour la différentiabilité. Pour que $f(x, y)$ soit différentiable au point (a, b), il suffit que f ait en ce point ses deux dérivées partielles et qu'en outre, l'une de ces dérivées, par exemple f'_x, existe au voisinage de (a, b) et soit continue en ce point. Car on a:

$$f(a+h\,,\ b+k) - f(a\,,\ b) = [f(a+h\,,\ b+k) - f(a\,,\ b+k)] + [f(a\,,\ b+k) - f(a\,,\ b)] = hf'_x(a+\theta h\,,\ b+k) + k[f'_y(a, b)+\eta]$$

avec $0 < \theta < 1$, $\lim\limits_{k\to 0} \eta = 0$. Mais puisque f'_x est continue au point, $(a\ b)$:

$$f'_x(a+\theta h\,,\ b+k) - f'_x(a\,,\ b) = \varepsilon$$

où $\varepsilon \to 0$ quand h et k tendent vers zéro. D'où, comme annoncé:

$$f(a+h\,,\ b+k) - f(a\,,\ b) = h[f'_x(a\,,\ b)+\varepsilon] + k[f'_y(a\,,\ b)+\eta]$$

où η et ε tendent vers zéro quand h et k tendent vers zéro.

Il est remarquable que, plus tard, Jordan ait eu une idée analogue [5], mais sans en tirer l'extension de la différentiabilité.

Il considère le cas où l'on aurait la formule (11) et il en tire:

$$A = f'_x\,, \quad B = f'_b \qquad (12)$$

Mais comment? C'est après avoir établi, comme ses prédécesseurs (sauf Stolz) la formule (8) *dans l'hypothèse H :* $f(x, y)$ a des dérivées partielles f'_x, f'_y *au voisinage* de (a, b) et celles-ci sont continues au point (a, b). Et alors, *il retranche* les expressions (8) et (11) de Δf et il fait tendre Δx et Δy vers zéro de sorte que $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to 0$. Il retrouve bien ainsi les égalités (12), mais *sous l'hypothèse H*. Alors que Stolz obtient ces égalités par le raisonnement plus simple, indiqué ci-dessus, sans faire l'hypothèse H, ni d'ailleurs sans aucune hypothèse supplémentaire.

II — C'est par une voie tout à fait différente que nous sommes parvenu à une définition équivalente et très analogue, mais d'une forme distincte, *plus propre à la généralisation aux fonctions abstraites.* En effet, contrairement au processus habituel qui consiste à passer du particulier au général, c'est *en revenant du cas général* des espaces abstraits *au cas particulier* du plan que nous avons obtenu la définition qui va suivre. Cela tient à ce que, au départ, nous étions habitués aux définitions usuelles à cette époque, mais que notre but était l'étude des fonctions abstraites. Définissant d'abord la différentielle d'une fonctionnelle [18], puis d'une transformation d'espace abstrait dans un espace abstrait, nous avons pu prouver, dans le cas d'une relation entre deux espaces de Banach [19] que cette différentielle conservait les propriétés principales de la différentielle d'une fonction numérique d'une variable numérique. C'est seulement *ensuite* (puisque notre but principal était, à cette époque, l'étude des espaces abstraits) que nous nous sommes demandé si cette définition était bien une généralisation complète de la différentielle classique. Et nous nous sommes aperçu qu'il n'en était rien et que nous obtenions la définition plus stricte suivante:

Une fonction $f(x, y)$ est *différentiable à notre sens*, au point (a, b), si son accroissement ne diffère d'une certaine fonction linéaire $\mathscr{L}(\Delta x, \Delta y)$ des accroissements Δx, Δy des variables x, y que par un infiniment petit par rapport à la distance r du point (a, b) au point voisin $(a+\Delta x, b+\Delta y)$.

Et, dans ce cas, la *différentielle* de f au point (a, b) sera cette fonction $\mathscr{L}(\Delta x, \Delta y)$. Autrement dit, en posant:

$$\mathscr{L}(\Delta x, \Delta y) = A\Delta x + B\Delta y,$$

on aura

$$\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + \omega r \tag{13}$$

$$\lim_{r\to 0} \omega = 0$$

et

$$df \equiv A\Delta x + B\Delta y. \tag{14}$$

On peut prendre pour r: $r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.
Mais puisque

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\Delta x| + |\Delta y|) \leqslant \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \leqslant |\Delta x| + |\Delta y|$$

on peut prendre aussi

$$r = |\Delta x| + |\Delta y|.$$

On peut aussi prendre pour r:

$$r = \operatorname{Max}\left\{\begin{matrix}|\Delta x| \\ |\Delta y|\end{matrix}\right\}, \text{ etc.} \ldots$$

Dès lors, en prenant dans (13), comme Stolz, $\Delta y = 0$, on voit que $f(x, y)$ est dérivable en x au point (a, b) et que $A = f'_a$. De même $f(x, y)$ est dérivable en y au point (a, b) et l'on a $B = f'_b$ et par suite:

$$df'_a = f'_a \Delta x + f'_b \Delta y.$$

Finalement on voit qu'une fonction $f(x, y)$ différentiable à notre sens l'est aussi au sens de Stolz et avec la même différentielle.

Comme dans la formule (13), si l'on écrit

$$\varepsilon \Delta x + \varepsilon' \Delta y = \omega r$$

on a
$$|\omega| = \left|\varepsilon \frac{\Delta x}{r} + \varepsilon' \frac{\Delta y}{r}\right| \leqq |\varepsilon| + |\varepsilon'|$$

d'où
$$\lim_{r \to 0} \omega = 0,$$

on voit que réciproquement, toute fonction différentiable au sens de Stolz l'est aussi à notre sens, avec la même différentielle. C'est parce que ces deux définitions sont très semblables que nous n'avons pas reporté plus loin leur comparaison.

Mais notre expression (13) se prête mieux aux généralisations. Car, ayant observé qu'on peut adopter plusieurs expressions pour r, sans changer la définition, ces expressions conduisent au contraire, chacune à une définition différente, dans le cas des espaces fonctionnels.

Définition géometrique de la différentielle

Pour les fonctions d'une variable, il y a équivalence entre l'existence de la dérivée de $f(x)$ pour $x = a$ et l'existence d'une tangente (non parallèle à Oy) à la courbe $y = f(x)$ au point $x = a$.

Mais pour les fonctions de deux variables l'équivalence n'est plus totale. Elle a bien lieu partiellement; car, il est bien exact que si la surface S: $z = f(x, y)$ a un plan tangent au point (a, b, c), $c = f(a, b)$ et si $f(x, y)$ a des dérivées partielles au point (a, b), alors l'équation du plan tangent est:

$$Z - c = (X-a)f'_a + (Y-b)f'_b \,. \qquad (15)$$

En effet, la courbe intersection de S et du plan $y = b$, ayant pour équation: $z = f(x, b)$ a alors une tangente au point d'abscisse a, qui est:

$$Z - c = f'_b(a\,,\, b)(X-a)\,.$$

Et de même on a la tangente: $Z - c = f'_b(Y-b)$ au point $y = b$ à la courbe intersection de S avec le plan $X = a$.

Dès lors, le plan tangent à S au point (a, b, c), devant contenir ces deux tangentes, aura pour équation, l'équation (15).

Mais autrefois, on considérait comme allant de soi que: si une fonction $f(x, y)$ avait ses deux dérivées partielles $f'_a(a, b)$, $f'_b(a, b)$ au point (a, b), alors: 1° la surface S: $z = f(x, y)$ avait un plan tangent au point (a, b) et 2° l'équation de ce plan tangent était $Z - c = f'_a(X-a) + f'_e(Y-b)$.

Nous allons montrer qu'une telle affirmation est fausse en donnant un exemple du contraire.

Définition d'un plan tangent

A cet effet, précisons d'abord que nous entendons par plan tangent à S au point (a, b, c) un plan qui soit le lieu des tangentes aux courbes situées sur S et passant par ce point (s'entendant de celles de ces courbes qui ont effectivement une tangente en ce point).

Une condition nécessaire pour qu'il en soit ainsi, c'est qu'il existe un plan P passant par le point considéré Q et tel d'abord qu'il contienne toutes les tangentes en Q aux courbes tracées sur S, passant par Q et qui ont effectivement une tangente en Q. Mais cette condition, U, *n'est pas suffisante.*

S'il existait dans ce plan P une droite D passant par Q qui ne soit tangente à aucune courbe située sur S et passant par Q, alors D n'appartiendrait pas au lieu des tangentes précisées plus haut, ce lieu ne serait qu'une partie de P.

Dès lors, pour qu'un plan P soit tangent à S au point Q, *il faut et il suffit que deux conditions soient réalisées*, la condition U ci-dessus et la condition V suivante: toute droite D située dans P et passant par Q doit être tangente en Q, à au moins une courbe située sur S et passant par Q. Voici maintenant l'exemple annoncé à la page 189.

Exemple

Prenons pour exemple, le cas où $f(x, y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ pour $x^2+y^2 \neq 0$.

On a

$$|f| = \sqrt{|xy|}\sqrt{\frac{|xy|}{x^2 + y^2}} \leq \sqrt{\frac{|xy|}{2}}$$

donc $|f| \to 0$ avec x^2+y^2. Alors, en prenant $f(0, 0) = 0$ la fonction $f(x, y)$ sera partout continue.

On a $\dfrac{f(x, 0)-f(0, 0)}{x-0} = 0$, donc $f(x, y)$ a une dérivée partielle en x à l'origine 0 et celle-ci est nulle; de même $f'_y(0, 0)$ existe et est nulle.

Si donc la surface S a un plan tangent à l'origine, alors d'après ce qui précède, ce plan aura pour équation

$$Z = f'_x(0,0)X + f'_y(0,0)Y,$$

c'est-à-dire

$$Z = 0.$$

Dans la même hypothèse, la droite D du plan tangent située dans le plan $X = Y$ et qui, par suite passe par 0, devrait être tangente à une courbe C de S passant par 0. Soit M un point de C de coordonnées x, y, et $z = f(x, y)$, distinct de 0. Les cosinus directeurs de OM sont:

$$\frac{x}{k}, \frac{y}{k}, \frac{z}{k}, \text{ où } k = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

et ils devraient tendre vers les cosinus directeurs de D, c'est-à-dire:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0.$$

Dès lors, puisque $x/k \not\to 0$, et même $\to \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$, alors

$\frac{y}{x} \to 1$ et $\frac{z}{x} \to 0$. Or

$$\frac{z}{x} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\pm y/x}{\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}} \to \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + 1}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

et non vers zéro. Ainsi, S n'a pas un véritable plan tangent au point O: il existe au moins une surface S représentée par l'équation $z = f(x, y)$ où $f(x, y)$ est continue partout et a en un point particulier $x = O$, $y = O$, deux dérivées partielles $f'_x(O, O)$, $f'_y(O, O)$ sans que cette surface ait un plan tangent au point considéré. *Ainsi l'ancienne condition pour l'existence du plan tangent n'est pas assez stricte.*

Définition géométrique de la différentielle

Pour rétablir l'analogie avec le cas des fonctions d'une variable (page 180)e t avecn otre première définition (page 187) de la différentiabilité d'une fonction de deux variables, nous dirons [10, page 438, 439] qu'une fonction $f(x, y)$ est *différentiable* au point (a, b) si la surface S: $z = f(x, y)$ a un plan tangent T, non parallèle à Oz, au point de coordonnées a, b, et $c = f(a, b)$. Et alors, l'équation de ce plan étant nécessairement de la forme

$$Z - c = A(X - a) + B(Y - b),$$

on appellera différentielle de f au point (a, b) l'expression

$$df \equiv A\,\Delta a + B\,\Delta b \qquad (\text{où } \Delta a = x - a\,, \Delta b = y - b)\,.$$

Existence du plan tangent

Pour savoir si la fonction $f(x, y)$ est différentiable au point (a, b), tout revient à chercher à quelle condition la surface $z = f(x, y)$ a un plan tangent non parallèle à Oz, au point (a, b, c).

Il faudra qu'il passe au point (a, b, c), un plan non parallèle à Oz vérifiant les conditions U et V de la page 190. Mais on devra tenir compte explicitement de deux conditions liées implicitement à la notion de surface représentable par la fonction $z = f(x, y)$. On supposera:

1°) que $f(x, y)$ qui n'est pas nécessairement définie partout, soit définie au voisinage du point Q considéré, c'est-à-dire à l'intérieur d'un cercle de rayon r positif $(x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2$;

2°) que $f(x, y)$ soit continue au point (a, b). Par exemple, on ne pourra pas prendre $a = b = 0$ et $f = \sqrt{x^3y^3}$, qui n'est définie dans aucun voisinage complet de $(0, 0)$ et qui a pourtant deux dérivées partielles (qui sont nulles) à l'origine.

Par exemple encore, on ne pourra prendre pour $f(x, y)$ une fonction définie partout sauf sur $x = o$, $y > O$ et nulle ailleurs, bien qu'elle vérifie les conditions V et U de la page 190.

Définition du plan tangent

Soit M un point quelconque d'une surface S et Q un point fixe de S. Soit enfin φ l'angle aigu de la corde QM avec un plan P. Si S a un plan tangent en Q et si celui-ci est P; si d'autre part, il passe par Q et s'il y a une courbe située sur S, ayant une tangente T en Q, telle que T soit située sur P, alors l'angle aigu, Ψ de QM et de T tend vers zéro quand $M \to Q$. Or, quand φ est l'angle de QM avec le plan P, on a $O \leqslant \varphi \leqslant \Psi$. Donc quand $M \to Q$, Ψ tendant vers zéro, il en sera de même de φ.

Réciproquement, sans savoir si P est tangent à S en Q, supposons que $\varphi = (\widehat{QM, P}) \to O$ avec QM, quelle que soit la façon dont $M \to Q$ sur S. Alors, soit, Δ, une droite du plan P passant par Q. Le plan R perpendiculaire à P et passant par Δ coupe S suivant une courbe C passant par Q. Soit M un point de C, distinct de Q. L'angle φ de MQ avec P est aussi l'angle de MQ avec Δ. Quand $M \to Q$, $\varphi \to O$ par hypothèse. C'est dire que la corde MQ de C tend vers Δ quand $M \to Q$, autrement dit que la condition V est vérifiée par P. Soit, d'autre part, Γ, une courbe sur S passant par Q et ayant une tangente δ en Q. Si M est un point de Γ alors l'angle φ de QM avec P tend vers zéro avec QM et il en est de même de l'angle Ψ de QM avec δ.

Prenons sur QM, dans la direction de Q vers M, un point M' tel que $QM' = 1$. Puisque la droite portant QM tend vers δ, M' va tendre vers un point N de δ tel que $QN = 1$. Or puisque $\varphi \to O$, la distance de M' au plan P tend vers zéro. Et comme cette distance tend vers la distance constante de N au plan P, cette dernière tend vers zéro, c'est-à-dire que δ est dans le plan P et par suite que P vérifie aussi la condition U.

Dans le raisonnement précédent, nous avons supposé que le plan R coupe effectivement S suivant une courbe C. C'est que nous avons admis implicitement que P vérifie une condition analogue à 1°, de la page 192, soit W: si l'on projette S sur P, il y a au moins un voisinage de Q qui appartient entièrement à cette projection.

D'autre part, quand nous supposons que le point M de S tend vers Q, nous admettons implicitement une condition T analogue à la condition 2° de la page 192.

En résumé, on peut définir un plan tangent de la manière suivante:

Un plan P passant par un point Q d'une surface S est, par définition, tangent à S en Q si,

1°) M étant un point quelconque de S, distinct de Q, l'angle aigu de M avec P tend vers zéro quand M tend vers Q,

2°) La condition W ci-dessus est satisfaite.

Définitions opérationnelle par Hadamard

Aux pages 2 et 3 du tome I de son cours d'analyse [16], M. Hadamard rappelle en 1927, brièvement mais nettement, deux définitions de la différentielle. La seconde est celle où Stolz et moi-même considérons la différentielle de $f(x, y)$ comme une expression approchée, mais plus simple, de l'accroissement de f.

La première procède d'une idée tout à fait différente qu'il avait déjà introduite en 1923 [11].

Pour Hadamard, l'introduction de la différentielle a pour effet d'exprimer plus simplement les théorèmes des fonctions de fonctions et des fonctions composées.

Au moyen de la notion de dérivée, on écrit, *sous certaines conditions :*

$$Df(x(t), y(t)) = f'_a x'_t + f'_b y'_t . \tag{16}$$

En introduisant la notion de différentielle, on écrit, sous les mêmes conditions:

$$df(x, y) = f'_a dx + f'_b dy \tag{17}$$

que x et y soient des variables indépendantes ou qu'elles soient des fonctions d'une variable indépendante. C'est là un avantage précieux qui non seulement abrège à la fois l'écriture de la formule, mais aussi rend les démonstrations plus simples, plus intuitives et plus générales.

Cette utilité de la notion de différentielle étant admise, notons que, dans notre jeunesse, la formule (16) était démontrée dans l'hypothèse H où la fonction $f(x, y)$ admettait des dérivées partielles, non seulement au point (a, b), mais en son voisinage et où, en outre, ces dérivées partielles étaient continues en ce point. (On suppose, bien entendu, que pour la valeur de t considérée, $x(t)$ et $y(t)$ sont dérivables et respectivement égaux à a et b). Or la formule (16) peut rester exacte sans que toutes les hypothèses de H soient vérifiées.

Par exemple, il suffit de prendre:

$$f(0,0) = 0 \text{ et } f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ pour } x^2 + y^2 \neq 0$$

Cette fonction est continue partout et a, à l'origine, deux dérivées partielles. Mais celles-ci ne sont pas continues à l'origine. Comme elles sont nulles à l'origine, la formule (16) exprime que $f(x(t)), y(t))$ (où $x(o) = y(o) = O$) a une dérivée à l'origine et que celle-ci est nulle, ce qui a lieu. Ainsi pour cette fonction, la formule (16) est exacte sans que les dérivées partielles de f soient continues à l'origine.

Inversement, il ne suffit pas que la formule (16) ait un sens — c'est-à-dire que $x(t)$ et $y(t)$ étant dérivables et égaux respectivement à a, b pour la valeur de t considérée, la fonction $f(x, y)$ ait ses deux dérivées partielles pour $x = a$, $y = b$. Par exemple prenons $x(t) = y(t) = t$, $a = b = x(o) = y(o) = 0$ et, comme à la page 190,

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ pour } x^2 + y^2 \neq 0 \text{ et } f(0,0) = 0 .$$

On voit comme plus haut que $f'_a(O, O) = f'_b(O, O) = O$. On devrait donc avoir

$$f(t, t) = \frac{t^2}{\sqrt{2t^2}} = \frac{|t|}{\sqrt{2}},$$

donc $f(t, t)$ n'est même pas dérivable pour $t = 0$, contrairement à (17). Ainsi pour conserver (16), il ne suffit pas que cette formule ait un sens et il n'est pas nécessaire non plus que les hypothèses restrictives, faites plus haut, sur f au voisinage de (a, b) soient vérifiées. Il en est de même pour la formule (17).

Pour être sûr que cette dernière formule soit valable, Hadamard — admettant la définition usuelle de la différentielle d'une fonction d'une variable — dit, tout simplement que la fonction $f(x, y)$ est différentiable au point (a, b) si la formule (16) est axacte. C'est à dire:

1°) Si $f(x, y)$ admet ses deux dérivées partielles au point (a, b);

2°) Si, quelles que soient les fonctions $x(t)$, $y(t)$ dérivables et respectivement égales à a et b pour la valeur de t considérée, la fonction $f(x(t), y(t))$ est dérivable pour cette même valeur de t et si la dérivée est égale au second membre de (16) pour la valeur de t considérée.

S'il en est ainsi, la différentielle de f sera donnée par définition, par la formule:

$$df(x, y) = f'_a dx + f'_b dy \tag{19}$$

pour la valeur de t considérée.

Remarque : Comme Stolz l'avait fait, (voir p. 186), on pourrait se dispenser d'introduire dans la définition précédente, l'hypothèse de l'existence des dérivées partielles de $f(x, y)$ au point (a, b).

On supprimerait 1° et 2°, on dirait que pour la valeur de t considérée, la dérivée de $f(x(t), y(t))$ est de la forme :

$$Ax'_t + By'_t .$$

En effet, en appliquant cette définition au cas où

$$x(t) = t \quad \text{et} \quad y(t) = b, \quad \text{on devrait avoir} \quad Df(t, b) = A;$$

c'est dire que $f(x, y)$ a une dérivée partielle en x au point (a, b) et que celle-ci est égale à A. On verrait de même que $B = f'_y(a, b)$ et l'on verrait ainsi que la seconde forme de la définition de Hadamard est équivalente à la première.

Définition analogique par Severi

Severi [12] a réussi à donner la définition moderne de la différentiabilité la plus analogue à la définition antérieure. Au lieu de supposer seulement l'existence de dérivées partielles au point considéré, il exige l'existence en ce point de dérivées partielles restreintes (plus tard, Ostrowski a été conduit à la même définition à une nuance près dans la définition équivalente, des dérivées partielles restreintes).

Nous dirons, avec Severi, que $f(x, y)$ a au point (a, b), *une dérivée partielle restreinte* par rapport à x si le rapport :

$$\frac{f(x, y) - f(a, y)}{x - a}$$

tend vers une limite finie et déterminée λ, quand $(x-a)^2 + (y-b)^2$ tend vers zéro de façon que $\left|\frac{y-b}{x-a}\right|$ reste bornée [1]). S'il en est ainsi, cela aura lieu, en particulier, quand $y = b$, c'est-à-dire que

1) En réalité, Severi suppose que ce rapport a une limite, mais qu'il reste borné suffit.

$$\frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} \to \lambda \quad \text{quand} \quad x \to a .$$

Autrement dit, quand $f(x, y)$ a au point (a, b) une dérivée partielle restreinte, par rapport à a, elle a aussi une dérivée partielle au sens ordinaire par rapport à a et la première est égale à la seconde f'_a.

On dira de même que $f(x, y)$ a au point (a, b) une dérivée partielle restreinte par rapport à y, si le rapport

$$\frac{f(x, y) - f(x, b)}{y - b} \qquad (20)$$

a une limite quand $(x-a)^2 + (y-b)^2 \to 0$ de sorte que $\left|\frac{x-a}{y-b}\right|$ reste bornée. Et alors $f(x, y)$ a une dérivée partielle f'_b au sens ordinaire au point (a, b) et le rapport (20) tend vers f'_b.

Ceci étant, nous dirons que $f(x, y)$ est *différentiable* au point (a, b) *au sens de Severi*, si en ce point, $f(x, y)$ a ses deux dérivées partielles restreintes par rapport à x et y. Et alors la différentielle de $f(x, y)$ au point (a, b) au sens de Severi sera encore

$$df = f'_a \Delta x + f'_b \Delta y . \qquad (19)$$

Troisième Section

Equivalence des quatre définitions de la différentielle

Les quatre définitions précédentes de la différentielle d'une fonction $f(x, y)$ en un point (a, b) quoique différentes dans la forme présentent cependant dans cette même forme deux traits communs.

D'une part, ou bien elles présupposent l'existence des dérivées partielles de $f(x, y)$ au point (a, b), ou bien cette existence résulte-t-elle directement de la définition.

D'autre part, toutes ces définitions conduisent à la même expression de la différentielle:

$$df(x\,,\,y) = f'_a \Delta x + f'_b \Delta y\,.$$

Les différences entre les quatre définitions de la différentielle *se réduisent donc* aux différences entre les définitions de la *différentiabilité*. C'est donc celles-ci qu'il nous suffira de comparer *pour conclure qu'elles sont équivalentes.*

Equivalence des quatre définitions de la différentiabilité

I — Comparons, par exemple, la définition de Stolz, à celle de Hadamard. Si, au point (a, b), $f(x, y)$ est différentiable au sens de Stolz, on aura:

$$\Delta f = (f'_a + \varepsilon)\,\Delta x + (f'_b + \varepsilon')\,\Delta y$$

avec $\lim\limits_{\Delta x^2 + \Delta y^2 \to 0} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{Bmatrix} = 0\,.$

Donc si $x(t)$, $y(t)$ sont des fonctions de t dérivables et respectivement égales à a et b pour $t = \alpha$, on aura

$$\frac{f(x(t), y(t)) - f(a\,,\,b)}{\Delta t} = (f'_a + \varepsilon)\frac{\Delta x}{\Delta t} + (f'_b + \varepsilon')\frac{\Delta y}{\Delta t}\,.$$

Quand $\Delta t \to 0$, $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ et $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ tendent vers $x'(\alpha)$, $y'(\alpha)$, donc Δx et Δy tendent vers zéro et par suite aussi ε et ε'. Dès lors, le second membre tend vers

$$f'_a x'_t + f'_b y'_t\,; \tag{21}$$

donc aussi le premier.

Par suite, $f(x(t), y(t))$ est dérivable pour $t = \alpha$ et sa dérivée est égale à (21). C'est à dire que toute fonction différentiable au sens de Stolz l'est aussi au sens d'Hadamard.

La démonstration de la réciproque est moins simple. Nous considérons une fonction $f(x, y)$ différentiable au sens d'Hadamard au point (a, b). C'est-à-dire qu'on peut écrire:

$$df(x(t), y(t)) = Ax'_t + By'_t \tag{22}$$

pour la valeur de t considérée, soit $t = \alpha$. Il suffit de montrer qu'on a

$$\lim_{r \to 0} \frac{R}{r} \equiv \lim_{r \to 0} \frac{f(x, y) - f(a, b) - A\Delta x - B\Delta y}{r} \equiv 0 \quad \text{(22bis)}$$

en posant:

$$r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} .$$

A cet effet, nous allons montrer qu'on arrive à une contradiction si l'on suppose que $\frac{R}{r}$ ne tend pas vers zéro et que par conséquent, il existe une suite de points (x_n, y_n) correspondant aux valeurs $\Delta_n x$, $\Delta_n y$, r_n, R_n de Δx, Δy, r, R telles que $\left|\frac{R_n}{r_n}\right|$ reste supérieur à un nombre positif fixe k, quand $r_n \to 0$.

Pour cela, admettons pour commencer qu'on puisse définir deux fonctions $x(t)$, $y(t)$ dérivables pour $t = \alpha$ et prenant les valeurs respectives a, b, x_n, y_n, pour $t = \alpha$ et $t_n = r_n + \alpha$. On aura

$$\frac{R_n}{r_n} \equiv \frac{f(x(t_n), y(t_n)) - f(x(\alpha), y(\alpha)) - A\Delta_n x - B\Delta_n y}{r_n} \tag{23}$$

$\frac{R_n}{r_n}$ est donc la valeur pour $t = t_n$ de $\frac{R}{r}$ dans (22*bis*) quand on y remplace t par t_n. Et l'on a (23). Or, on a $\left|\frac{R_n}{r_n}\right| > k$ et la relation (22) qui peut s'écrire dans le cas actuel:

$$\frac{f(x(t), y(t)) - f(x(\alpha), y(\alpha))}{t - \alpha} \to \lim A \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} + B \frac{\Delta y(t)}{\Delta t}$$

ou

$$\lim_{r \to 0} \frac{R}{r} = 0 ,$$

d'où en particulier

$$\lim_{r_n \to 0} \frac{R_n}{r_n} = 0 \quad \text{avec} \quad \left| \frac{R_n}{r_n} \right| > k > 0 . \tag{24}$$

Les deux relations (24) fournissent la contradiction annoncée. Reste à démontrer l'existence des fonctions $x(t)$, $y(t)$ décrites plus haut. On a fixé d'avance les valeurs de $x(t)$, $y(t)$ pour les valeurs $t = t_n = r_n + \alpha$. Mais pour que les t_n soient distincts, on pourra ne retenir de la suite des $r_n (\neq 0)$ qui tendent vers zéro qu'une suite de valeurs distinctes et même décroissantes. On a évidemment:

$$\left| \frac{x(t_n) - x(\alpha)}{r_n} \right| \leqq 1 , \qquad \left| \frac{y(t_n) - y(\alpha)}{r_n} \right| \leqq 1 ,$$

ce qui peut s'écrire

$$\left| \frac{x(t_n) - x(\alpha)}{t_n - \alpha} \right| \leqq 1 , \qquad \left| \frac{y(t_n) - y(\alpha)}{t_n - \alpha} \right| \leqq 1 . \tag{25}$$

On peut donc extraire de la nouvelle suite des t_n une suite telle que les deux premiers membres de (25) tendent vers deux limites finies respectives, λ et μ.

A cette troisième suite de valeurs de t_n correspondra une suite de points M_n, $(x(t_n), y(t_n))$ avec $t_n - t_{n+1} > 0$. Pour définir complètement $x(t)$, $y(t)$, nous les prendrons fonctions linéaires de t, de t_n à t_{n+1} égales respectivement à $x(t_n)$, $y(t_n)$ et à $x(t_{n+1})$, $y(t_{n+1})$ pour $t = t_n$ et t_{n+1}. La courbe lieu du point $x(t)$, $y(t)$ sera une ligne polygonale tendant vers le point (a, b). Alors

$$\frac{x(t) - x(\alpha)}{t - \alpha}$$

sera une fonction homographique de t de t_n à t_{n+1} dont les valeurs resteront comprises entre ses valeurs pour $t = t_n$ et $t = t_{n+1}$. Or celles-ci tendent vers λ quand $t_n \to \alpha$. Il en résulte que $x(t)$ est bien dérivable pour $t = \alpha$; et de même pour $y(t)$.

Ainsi toute fonction $f(x, y)$ différentiable au point (a, b) au sens d'Hadamard est aussi différentiable en ce point au sens de Stolz et au mien.

En résumé, les définitions de la différentiabilité *au sens de Stolz et au sens d'Hadamard sont équivalentes.*

II—Comparons notre définition géométrique (page 191) de la différentiabilité avec notre première définition.

1°) Supposons d'abord que $f(x, y)$ soit différentiable au point (a, b) au sens de notre première définition. Alors on aura une relation de la forme:

$$\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon r \tag{26}$$

$$\text{avec } r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \text{ et } \lim_{r \to 0} \varepsilon = 0\,.$$

Condition U—Si Γ est une courbe, lieu des points $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, qui pour $t = \alpha$, passe par le point $(a, b, c = f(a, b))$ de la surface S: $z = f(x, y)$ et qui a une tangente en ce point, on aura, d'après (26)

$$\frac{\Delta z - A\Delta x - B\Delta y}{\Delta t} = \varepsilon \frac{r}{\Delta t}\,. \tag{27}$$

Quand $\Delta t \to 0$, le premier membre tend vers

$$z'_\alpha - Ax'_\alpha - By'_\alpha\,. \tag{28}$$

Dans le second: $$\frac{r}{\Delta t} = \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta t} \to \pm \sqrt{x'^2 + y'^2}\,.$$

Donc le second membre de (27) tend vers zéro avec Δt et par suite

$$z'_\alpha = Ax'_\alpha + By'_\alpha\,.$$

Donc la tangente en Q à Γ appartient au plan P:

$$Z - c = A(X - a) + B(Y - b)\,,$$

fixe et non parallèle à Oz.

Condition V : Inversement considérons une droite T passant par Q et contenue dans le plan P. Soient l, m, n ses coefficients directeurs. On aura (26) $Al+Bm = n$ avec $l^2+m^2 \neq 0$. Il existe dans le plan xoy une infinité de courbes passant par le point (a, b) et tangentes à la projection T' de T sur xoy. Choisissons-en une, soit C. Il y aura donc, pour cette courbe, une représentation paramétrique où ses coordonnées $\xi(t)$, $\eta(t)$ sont égales à a et b pour $t = \beta$ et sont dérivables pour $t = \beta$ avec $\xi_\beta'^2 + \eta_\beta'^2 \neq 0$ et

$$\frac{\xi'_\beta}{l} = \frac{\eta'_\beta}{m} . \tag{29}$$

Soit maintenant la courbe Γ de la surface S qui se projette suivant la courbe C sur $x\,Oy$. Sa cote correspondant à t, sera

$$S(t) = f(\xi(t), \eta(t))$$

et en vertu de (24), on aura

$$\frac{\Delta S(t)}{\Delta t} = \frac{A\Delta\xi(t) + B\Delta\eta(t)}{\Delta t} + \omega\frac{P}{\Delta t}, \tag{30}$$

où $$\frac{P}{\Delta t} = \pm\sqrt{\left(\frac{\Delta\xi(t)}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\eta(t)}{\Delta t}\right)^2} \quad \textit{et} \quad \lim_{\Delta t \to 0} \omega = 0 .$$

Quand $\Delta t \to 0$,

$$\frac{P}{\Delta t} \to \pm\sqrt{\xi_\beta'^2 + \eta_\beta'^2} .$$

Finalement $\omega \dfrac{P}{\Delta t} \to 0$. Donc d'après (30), $S(t)$ est dérivable pour $t = \beta$ et sa dérivée est

$$S'_\beta = A\xi'_\beta + \beta\eta'_\beta \tag{31}$$

et puisque $\sqrt{\xi_\beta'^2 + \eta_\beta'^2} \neq 0$, les trois dérivées ξ'_β, η'_β, S'_β ne sont pas toutes nulles et la courbe Γ a bien une tangente au point $t = \beta$. Puisque $\dfrac{\xi'_\beta}{l} = \dfrac{\eta'_\beta}{m}$ on aura d'après (29) et (30)

$\frac{\xi'_\beta}{l} = \frac{\eta'_\beta}{m} = \frac{S'_\beta}{n}$: il y a bien une courbe Γ sur S passant par Q et tangente en Q à la droite T donnée située dans P. Dès lors les conditions U et V étant remplies par P, S a bien au point Q, un plan tangent: le plan P, non parallèle à Oz: la fonction $f(x, y)$ est bien différentiable au sens de notre définition géométrique.

2°) Inversement, supposons que $f(x, y)$ soit différentiable au point (a, b) à notre sens géométrique. C'est-à-dire que la surface S ait au point Q, un plan tangent non parallèle à Oz, soit le plan P:

$$Z - c = A(X-a) + B(Y-b) .$$

Nous voulons démontrer que $f(x, y)$ est au point Q différentiable à notre premier sens, et même, plus précisément que

$$\lim_{r \to 0} \left(\frac{\Delta f - A\Delta x - B\Delta y}{r} \right) = 0$$

avec
$$r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} .$$

En effet, dans le cas contraire, il existerait une borne $k > 0$ et une suite de valeurs h_n, k_n de Δx et Δy telle que en posant $\frac{R_n}{r_n} \equiv \frac{\Delta_n f - Ah_n - Bk_n}{r_n}$ où $r_n = \sqrt{h_n^2 + k_n^2}$, $\left|\frac{R_n}{r_n}\right|$ reste $> k > 0$ quand $r_n \to 0$.

Soient λ_n, μ_n, ν_n les cosinus directeurs de la droite $Q\,Q_n$, (Q_n ayant pour coordonnées $a+h_n$, $b+k_n$, $c+l_n = f(a+h_n, b+k_n)$.

On pourra toujours extraire de la suite σ des points de coordonnées λ_n, μ_n, ν_n (qui restent sur une sphère de rayon 1) une suite σ' qui converge vers un point de coordonnées λ, μ, ν, (avec $\lambda^2+\mu^2+\nu^2 = 1$). Remplaçons la suite des Q_n par la suite correspondant à σ'. Ceci étant, considérons une courbe C du plan de xy passant par les projections des points Q_1, Q_2, ... Q_n ... Q. Sur $x\,oy$, ce sera par exemple la ligne polygonale dont les sommets sont ces projections. Ce sera la projection, C, d'une courbe Γ de la surface S. Pour celle-ci λ_n, μ_n, ν_n tendant vers λ, μ, ν, la droite $Q\,Q_n$ tend vers la droite δ passant par Q et de cosinus directeur λ, μ, ν. Si nous supposons, en outre (condition T), que $f(x, y)$ est continu au point Q, on voit que le point Q_n

tend vers Q et que la corde $Q\,Q_n$ de Γ a une limite δ. Dès lors la courbe Γ a une tangente au point Q et par hypothèse cette tangente est dans le plan P. On a donc

$$\nu = A\lambda + B\mu \,. \tag{32}$$

Mais
$$\frac{h_n}{\lambda_n} = \frac{k_n}{\mu_n} = \frac{l_n}{\nu_n} \equiv C_n$$

avec
$$C_n = \sqrt{h_n^2 + k_n^2 + (\Delta_n f)^2} \,.$$

D'où

$$\frac{R_n}{r_n} = \frac{C_n}{r_n}(\nu_n - A\lambda_n - B\mu_n) = \frac{C_n}{r_n}\gamma_n$$

où d'après (32), $\gamma_n \to 0$. Or

$$\frac{C_n}{r_n} = \sqrt{\frac{\lambda_n^2 + \mu_n^2 + \nu_n^2}{\lambda_n^2 + \mu_n^2}} \to \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} \,.$$

Si $\lambda^2+\mu^2$ était nul, on aurait d'après (32) $\nu = 0$ alors que $\lambda^2+\mu^2+\nu^2 = 1$. Donc $\dfrac{C_n}{r_n}$ a une limite finie et $\dfrac{R_n}{r_n} \to 0$, alors qu'on a supposé que $\left|\dfrac{R_n}{r_n}\right| > k > 0$. Il y a bien contradiction.

De 1°, p. 201 et 2°, p. 203, il résulte que notre définition géométrique de la différentiabilité est équivalente à notre première définition, comme à celle de Stolz.

III— Comparons enfin la définition de Severi à celle de Stolz.

1°) Si $f(x, y)$ est différentiable au point (a, b) au sens de Stolz, on a

$$f(x, y) - f(a, b) = (x-a)f'_a + (y-b)f'_b + \varepsilon(x-a) + \varepsilon_1(y-b)$$

avec $\lim \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon_1 \end{Bmatrix} = 0$ quand $(x-a)^2 + (y-b)^2 \to 0$. Alors

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(a, y) &= [f(x, y) - f(a, b)] - [f(a, y) - f(a, b)] \\ &= (x-a)(f'_a + \varepsilon) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(y-b) \end{aligned}$$

où ε, ε_1 et $\varepsilon_2 \to 0$ avec $(x-a)^2 + (y-b)^2$.

Donc

$$\left|\frac{f(x\,,\,y)-f(a\,,\,y)}{x-a}-f'_a\right| \leqq |\varepsilon| + |\varepsilon_1-\varepsilon_2|\left|\frac{y-b}{x-a}\right|.$$

Quand $(x-a)^2+(y-b)^2\to 0$ de sorte que $\left|\dfrac{y-b}{x-a}\right|$ reste borné, le second membre tend vers zéro, donc aussi le premier. Par suite $f(x, y)$ a, au point (a, b) une dérivée partielle au sens de Severi, par rapport à x. On verrait qu'il en est de même par rapport à y. Ainsi $f(x, y)$ est différentiable au point (a, b) au sens de Severi. Les différentielles de $f(x, y)$ au point (a, b) sont évidemment les mêmes aux deux sens.

2°) Si $f(x, y)$ est différentiable au point (a, b) au sens de Severi, écrivons

$$f(x\,,\,y)-f(a\,,\,b) = \left[\frac{f(x\,,\,y)-f(a\,,\,y)}{x-a}\right](x-a)$$

$$+\left[\frac{f(a\,,\,y)-f(a\,,\,b)}{y-b}\right](y-b) = [f'_a+\omega]\,(x-a)+[f'_b+\omega']\,(y-b)\,.$$

Alors, quand $(x-a)^2+(y-b)^2\to 0$ de sorte que $\left|\dfrac{y-b}{x-a}\right|$ reste $\leqslant 1$, on voit que ω et ω' tendront vers zéro. De même on peut écrire

$$f(x\,,\,y)-f(a\,,\,b) = (f'_\alpha+\theta)(x-a)+(f'_b+\theta')(y-b)$$

avec $\lim\begin{Bmatrix}\theta\\ \theta'\end{Bmatrix}=0$ quand $(x-a)^2+(y-b)^2\to 0$ de sorte que $\left|\dfrac{x-a}{y-b}\right|<1$.

Dès lors on pourra écrire

$$f(x\,,\,y)-f(a\,,\,b) = (f'_a+\varepsilon)(x-a)+(f_b+\varepsilon')(y-b)$$

avec $\lim\begin{Bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{Bmatrix}=0$ quand $(x-a)^2+(y-b)^2\to 0$, quelle que soit la valeur du rapport entre $x-a$ et $y-b$. Autrement dit $f(x, y)$ est aussi différentiable au sens de Stolz.

Finalement, les différentiabilités aux sens de Stolz et de Severi sont équivalentes. Et les différentielles correspondantes sont égales.

Conclusion

Finalement, nous avons démontré que *les définitions de la différentielle aux quatre sens :*

d'approximation de Stolz et Fréchet,
géométrique de Fréchet,
opérationnel d'Hadamard,
analogique de Severi,

quoique de formes absolument différentes, sont équivalentes.

Pour abréger, nous donnerons le nom générique de définition de la différentielle *au sens moderne* à chacune des définitions ci-dessus.

Quatrième Section

Parallélisme entre le cas d'une variable et celui de plusieurs variables pour les propriétés de la différentielle sous sa forme moderne.

Nous rappellerons d'abord les propriétés de la différentielle dans les deux cas d'une ou de plusieurs variables en renvoyant le lecteur pour les démonstrations aux traités récents qui utilisent les définitions modernes (nous indiquerons, comme exemple, les pages correspondantes de la troisième édition, 1914, du tome I du cours d'Analyse Infinitésimale [13] de la Vallée-Poussin, et du tome I, 1942 du cours d'analyse mathématique de Valiron [14]. Et nous montrerons par des exemples pour plusieurs de ces propriétés qu'elles disparaissent quand on emploie l'ancienne définition de la différentielle d'une fonction de plusieurs variables, c'est-à-dire quand on suppose seulement l'existence des dérivées partielles au point considéré.

Les traités d'analyse parus, avant—disons—1910, établissaient le parallélisme des propriétés de la différentielle en un point, du cas d'une variable au cas de plusieurs variables en ajoutant à l'hypothèse de l'existence des dérivées partielles en ce point, des hypothèses variées qui, toutes, comprenaient l'hypothèse de l'existence d'au moins l'une des dérivées partielles au voisinage du point considéré. Nous allons montrer que ces démonstrations reposaient sur des hypothèses *effectivement plus strictes* que l'existence d'une différentielle au sens moderne. Pour cela il nous suffira de donner un exemple d'une fonction $f(x, y)$ qui, en un point déterminé, est différentiable au sens moderne sans avoir ses deux dérivées partielles au voisinage de ce point. *Exemple:* On doit à Weierstrass le premier exemple d'une fonction $\varphi(x)$ qui est partout continue et qui n'est nulle part dérivable. Depuis lors, on en a cité d'autres exemples. Soit $\theta(x)$ l'une d'elles. Puisque $\theta(x)$ est continue partout, elle est bornée au voisinage de $x = 0$.

Ceci étant, considérons la fonction

$$f(x\,,\,y) = \rho^2\theta(\rho) \text{ avec } \rho = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

On a

$$\frac{f(x\,,\,o) - f(o\,,\,o)}{x} = \frac{x^2\theta(|x|)}{x} = x\theta(|x|)\cdot$$

Quand $x \to o$, $\theta(|x|)$ reste borné, donc $x\,\theta(|x|) \to 0$. Par suite, $f(x, y)$ possède une dérivée partielle par rapport à x, (qui est nulle) à l'origine, de même par rapport à y. On a donc:

$$\frac{f(\Delta x\,,\,\Delta y) - f(o\,,\,o) - f'_x(o\,,\,o)\,\Delta x - f'_y(o\,,\,o)\,\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} =$$

$$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\;\theta\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)$$

Ce rapport tend donc vers zéro quand $\Delta x^2 + \Delta y^2 \to 0$: $f(x, y)$ est différentiable au sens de Stolz à l'origine.

Mais en aucun autre point (a, b) voisin de l'origine, $f(x, y)$ n'a ses deux dérivées partielles. Car si $a^2 + b^2 \neq 0$, on a par exemple, $a \neq 0$. Alors:

$$\frac{f(a+h\,,\,b)\ -f\,(a\,,\ b)}{h} =$$

$$\frac{1}{h}\left\{\left[(a+h)^2+b^2\right]\theta\,(\rho+\varDelta\rho)\ -(a^2+b^2)\,\theta\,(\rho)\right\} = \tag{33}$$

$$[(a+h)^2+b^2]\left[\frac{\theta(\rho+\varDelta\rho)-\theta(\rho)}{h}\right]+\left[\frac{[(a+h)^2+b^2]-(a^2+b)^2}{h}\right]\theta(\rho)\,\cdot$$

Quand $h \rightarrow o$ le dernier terme tend vers $2a\ \theta\,(\rho)$, avec

$$\rho^2\ =\ a^2\ +\ b^2\,.$$

L'avant-dernier terme est égal à

$$\left\{[(a+h)^2+b^2]\,\frac{2a\ +\ h}{\sqrt{(a+h)^2+b^2}+\sqrt{a^2+b^2}}\right\}\frac{\theta\,(\rho\ +\ \varDelta\rho)\ -\ \theta\,(\rho)}{\varDelta\rho}\ ,$$

l'accolade tend vers $a\sqrt{a^2+b^2} \neq 0$ quand $h \rightarrow 0$. Dans le second rapport

$$\varDelta\rho\ =\ \sqrt{(a+h)^2\ +\ b^2}\ -\ \sqrt{a^2\ +\ b^2}$$

tend vers zéro quand $h \rightarrow 0$. Et par suite ce second rapport n'a pas une limite finie et déterminée quand $h \rightarrow 0$. Il en est donc de même de $\dfrac{f\ (a+h,\ b)-f\ (a,\ b)}{h}$, c'est-à-dire que pour $a \neq 0$, $f\ (x,\ y)$ n'a pas de dérivée partielle en x. De même pour $b \neq 0$, $f\ (x,\ y)$ n'a pas de dérivées partielles en y au point $(a,\ b)$.

Ainsi $f\ (x,\ y)$ est différentiable au sens de Stolz à l'origine, mais n'a, en aucun autre point voisin, deux dérivées partielles.

Après cet exemple, nous montrerons que les principales propriétés de la différentielle subsistent quand on passe du cas d'une variable au cas de plusieurs variables, lorsqu'il s'agit de la différentielle au sens moderne. Puis nous montrerons, par des exemples, qu'il n'en était pas de même si la différentiabilité en un point signifiait seulement l'existence en ce point des deux dérivées partielles.

Quelques propriétés des fonctions différentiables

I — *Différentielle au sens moderne en un point*

Fonctions d'une seule variable	Fonctions de plusieurs variables
	A
Une fonction $f(x)$ est continue en tout point où elle est différentiable	En tout point où une fonction est différentiable elle est continue. C'est une conséquence immédiate de la formule de Stolz (8).
	B
Si $f(x)$ est différentiable pour $x = a$ et si $\varphi(t)$ est différentiable pour $t = \alpha$, avec $\varphi(\alpha) = a$, alors $F(t) \equiv f(\varphi(t))$ est différentiable pour $t = \alpha$ et $dF(t) = f'_a \, d\varphi(t)$ pour $t = \alpha$.	Si $f(x, y)$ est différentiable au point (a, b) et si $\varphi(t, u, v)$, $\Psi(t, u, v)$ sont différentiables au point (α, β, γ) avec $\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = a$; $\Psi(\alpha, \beta, \gamma) = b$, alors $F(u, v, w) = f(\varphi(u, v, w), \Psi(u, v, w))$ est différentiable au point (α, β, γ) et $dF(u, v, w) = f'_x dx + f'_y dy$. C'est ce qu'exprime la définition d'Hadamard.
	C
	Soit une fonction $F(x, y, z)$ qui au point (a, b, c) soit nulle et différentiable avec $F'_c(a, b, c) \neq 0$ et qui soit continue au voisinage de ce point. Alors il existe au moins une fonction $\varphi(x, y)$ différentiable au point (a, b) égale en ce point à c et qui vérifie l'équation $F(x, y, z) = 0$ au voisinage du point (a, b) pour $z = \varphi(x, y)$. Quand F'_z existe et est $\neq 0$ au *voisinage* du point (a, b, c) la fonction $\varphi(x, y)$ est la seule qui vérifie les mêmes conditions. Si de plus F est différentiable au *voisinage* de (a, b, c), la solution $\varphi(x, y)$

Fonctions d'une seule variable	Fonctions de plusieurs variables

sera aussi différentiable *au voisinage* de (a, b, c).

Voir, pour les démonstrations, de la Vallée-Poussin [13, page 168].

C′ (généralisation de C)

Soient n fonctions $F_1, \dots F_n$ des n variables $l_1, \dots l_n$ et de m autres variables $x, y, \dots$

Supposons qu'au point $(C_1 \dots C_n, \alpha, \beta \dots)$ les fonctions F soient nulles, différentiables et que le déterminant

$$J = \frac{D\,(F_1, \dots F_n)}{D\,(l_1 \dots l_n)}\,(y) \text{ soit } \neq 0.$$

Alors il existe au moins un système de fonctions $L_1\,(x, y \dots), \dots, L_n\,(x, y \dots)$ se réduisant à $l_1 \dots l_n$ pour $x = \alpha, y = \beta, \dots$ et tel que

$$F_j\,(L_1 \dots L_n, x, y \dots) = 0 \text{ pour } j = 1, \dots n.$$

Tout système tel que $L_1 \dots L_n$ est différentiable au point $(\alpha, \beta, \dots)$. Enfin si les dérivées partielles qui figurent dans le déterminant J sont continues au point $(C_1 \dots C_n, \alpha, \beta, \dots)$, J ne s'annule pas au voisinage de ce point et le système des solutions $L_1 \dots L_n$ est unique.

Pour la démonstration, voir de la Vallée-Poussin (I, page 169).

Le théorème précédent subsiste si l'on remplace deux fois le mot différentiable par continue et si l'on suppose que les dérivées partielles de F_j par rapport aux l_i existent non seulement au point $(C_1 \dots \alpha, \dots)$ mais en son voisinage et sont continues en ce point.

Pour la démonstration, voir Valiron [14, page 246]

Fonctions d'une seule variable	Fonctions de plusieurs variables
	D
Si $f(x)$ est différentiable au point a, la courbe $y = f(x)$ a une tangente, non parallèle à $0y$, au point $(a, b = f(a))$.	Si $f(x, y)$ est différentiable au point (a, b), la surface $z = f(x, y)$ a un plan tangent non parallèle à $0z$, au point $(a, b, c = f(a, b))$. (Cela résulte de l'équivalence démontrée plus haut de notre définition géométrique avec la définition de Stolz).

Différentielle au sens moderne au voisinage d'un point.

Fonctions d'une seule variable	Fonctions de plusieurs variables
	E
Si $f(x)$ est continue sur le segment $a \leqq x \leqq b$ et si elle est différentiable à l'intérieur de ce segment, on peut écrire $f(b) - f(a) = (b - a)$ $f'(a + \theta h)$ avec $0 < \theta < 1$, $h = b - a$.	Si $f(x, y)$ est continue sur le rectangle $R : a \leqq x \leqq a'$; $b \leqq y \leqq b'$ et si elle est différentiable à l'intérieur de R, on peut écrire: $f(\alpha+h, \beta+k) - f(\alpha, \beta) = hf'_\alpha(\alpha + \theta h, \beta + \theta k) + kf'_\beta(\alpha + \theta h, \beta + \theta k)$ avec $0 < \theta < 1$, quand les deux points (α, β), $(\alpha+h, \beta+k)$ sont intérieurs à R. Pour le démontrer il suffit d'appliquer la formule $\varphi(1) - \varphi(o) = \varphi'(\theta)$, $o < \theta < 1$ à la fonction $\varphi(t) = f(\alpha+ht, \beta+kt)$ et à calculer $\varphi'(t)$ au moyen du théorème B ci-dessus.
	F
Soit $f(x, \alpha)$ une fonction intégrable en x dans l'intervalle $a \leqq x \leqq b$ pour $\alpha' \leqq \alpha \leqq \alpha''$, qui est différentiable en α pour ce même	Soit $f(x, \alpha, \beta)$ une fonction intégrable en x dans l'intervalle I: $a \leqq x \leqq b$ quand le point (α, β) est sur le rectangle R: $\alpha' \leqq \alpha \leqq \alpha''$, $\beta' \leqq \beta \leqq \beta''$. Si $f(x, \alpha, \beta)$ est différentiable en α, β dans R pour

Fonctions d'une seule variable	Fonctions de plusieurs variables
ensemble de valeurs de x et de α. Alors si $f'_\alpha(x, \alpha)$ est continue sur l'ensemble E, l'intégrale $F(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\, dx$ est différentiable pour $\alpha' < \alpha < \alpha''$ et on a $$F'_\alpha = \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha)\, dx\,.$$	x dans I et si sa différentielle est continue pour x dans I et (α, β) dans R, alors $F(\alpha, \beta) = \int_a^b f(x, \alpha, \beta)\, dx$ est différentiable dans R et sa différentielle est $$dF(\alpha, \beta) = \int_a^b df\, dx$$ $$= \int_a^b [f'_\alpha(x, \alpha, \beta)\, \Delta\alpha + f'_b(x, \alpha, \beta)\, \Delta\beta]\, dx\,.$$ En effet $$\Delta F = \int_a^b [f(x, \alpha+\Delta\alpha, \beta+\Delta\beta) - f(x, \alpha, \beta)]\, dx$$ $$= \int_a^b [\Delta\alpha f'_\alpha(x, \alpha + \theta\Delta\alpha, \beta + \theta\Delta\beta) + \Delta\beta f'_\beta(x, \alpha + \theta\Delta\alpha, \beta + \theta\Delta\beta)]\, dx\,.$$ D'où $$\Delta F - \int_a^b df dx =$$ $$\int_a^b \Delta\alpha [f'_\alpha(x, \alpha + \theta\Delta\alpha, \beta + \theta\Delta\beta) - f'_\alpha(x, \alpha, \beta)]\, dx + \int_a^b \Delta\beta [f'_\beta(x, \alpha + \theta\Delta\alpha, \beta + \theta\Delta\beta) - f'_\beta(x, \alpha, \beta)]\, dx = \Delta\alpha \int_a^b A dx + \Delta\beta \int_a^b B dx\,.$$ Et comme on a supposé df continu, A et B sont deux fonctions de x qui convergent uniformément vers zéro quand $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$ tendent vers zéro. Il en est donc de même de $$\varepsilon = \int_a^b A dx,\ \eta = \int_a^b B dx\,.$$

Fonctions d'une seule variable	Fonctions de plusieurs variables
	On aura donc $$\Delta F = \int_a^b dfdx + \varepsilon\Delta\alpha + \eta\Delta\beta$$ où ε, η tendent vers zéro avec $\lvert\Delta\alpha\rvert + \lvert\Delta\beta\rvert$. C'est-à-dire que $F(\alpha, \beta)$ est différentiable (pour (α, β) sur R) et qu'on a $$dF(\alpha, \beta) = \int_a^b dfdx = \int_a^b [\Delta\alpha f'_\alpha(x, \alpha, \beta) + \Delta\beta f'_\beta(x, \alpha, \beta)]\, dx\,.$$

Remarque: On peut démontrer directement, très facilement, les égalités suivantes qui nous seront utiles par la suite, ou les déduire du théorème ci-dessus sur les fonctions composées.

Si y et z sont différentiables:

$$d(y+z) = dy+dz;\; d(zy) = zdy+ydz.$$

Critiques de l'ancienne définition de la différentielle

Nous allons montrer que le parallélisme qui vient d'être illustré par les théorèmes A, B, ... F, n'existe plus quand on définit, comme autrefois, la différentiabilité de $f(x, y)$ au point (a, b) seulement par l'existence des dérivées partielles f'_a, f'_b. Nous en avons déjà cité un exemple page 190.

Rappelons que si $f(x)$ a une différentielle pour $x = a$, la courbe $y = f(x)$ a au point où $x = a$ une tangente non parallèle à oy. Or, à la même page, nous avons montré qu'une fonction $f(x, y)$ peut être continue partout et avoir en un point Q deux dérivées partielles sans avoir un plan tangent en ce point. Donnons d'autres exemples.

A. Si $f(x)$ a une différentielle pour $x = a$, elle est continue pour $x = a$. Mais considérons la fonction $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ pour

$x^2+y^2 \neq o$ et $f(o, o) = 0$. Elle a ses deux dérivées partielles pour $x = 0$, $y = 0$. Pourtant elle n'est pas continue en ce point, puisque $f(x, x) = \frac{1}{2}$ pour $x \neq o$ et $f(o, o) = 0$.

B. Si $f(x)$ a une différentielle pour $x = o$ et si $x = \varphi(t)$ est égal à a pour $t = \alpha$ et est différentiable pour $t = \alpha$, alors $f(\alpha(t))$ est différentiable pour $t = \alpha$. Mais posons $f(x, y) = \sqrt{|xy|} \log (x^2+y^2)$ pour $x^2+y^2 \neq o$ et $f(o, o) = o$. Cette fonction est continue et a deux dérivées partielles, d'ailleurs nulles, pour $x = y = o$. Pourtant si l'on prend $x = t, y = t, F(t) = f(t, t) = |t| \log 2t^2$ pour $t \neq o$, $F(o) = o$ et $F(t)$ n'est pas différentiable pour $t = o$.

C. Considérons la fonction $F(x, y, z)$. Supposons que l'équation $F(x, y, z) = 0$ ait une solution $z = \varphi(x, y)$ continue au point (a, b). Supposons en outre que $F(x, y, z)$ ait ses trois dérivées partielles au point $(a, b, c = \varphi(a, b))$ et que $F'_c(a, b, c)$ soit $\neq o$. Il s'agit de montrer que le théorème C cesse d'être valable si la définition de la différentiabilité d'une fonction en un certain point consiste seulement en la condition que la fonction ait des dérivées partielles en ce point. Nous allons donc montrer qu'il existe au moins une fonction $F(x, y, z)$ satisfaisant aux conditions ci-dessus et pour laquelle aucune solution $\varphi(x, y)$ ne possède ses dérivées partielles au point (a, b) ou bien est telle que, si elle possède en ce point deux dérivées partielles, celles-ci ne vérifient pas les relations:

$$F'_a + F'_c\varphi'_a = 0 \qquad F'_b + F'_c\varphi'_b = 0\,.$$

A cet effet, appelons $\varphi(x)$ une fonction nulle, continue, mais non dérivable pour $x = 0$, non nulle pour $x \neq 0$ et telle que $\left|\dfrac{x}{\varphi(x)}\right|$ soit bornée pour $|x|$ borné. Par exemple, on peut prendre $\varphi(x) = \sqrt{|x|}$.

Introduisons maintenant une fonction $\alpha(x, y)$ bornée au voisinage de (0, 0), différente de zéro à l'origine: $\alpha(o, o) = k > o$ et telle que $\alpha(x, o) = \dfrac{|x|}{\varphi(x)}$ pour $x \neq 0$. Par exemple,

$$\alpha(x, y) = \sqrt{|x|} + |y| \tag{34}$$

pour $|x| + |y| \neq 0$ *et* $\alpha(o, o) = k$.

Enfin, prenons pour $F(x, y, z)$ la fonction:

$$F(x, y, z) = \alpha(x, y)[z - \varphi(x)].$$

La fonction $\alpha(x, y)$ est bornée au voisinage de l'origine, on aura donc $F(x, y, \varphi(x)) = 0$ et en particulier $F(o, o, o) = o$. Cette fonction $F(x, y, z)$ est différentiable à l'ancien sens théorique à l'origine. C'est-à-dire que ses trois dérivées partielles existent à l'origine. En effet:

$$\frac{F(x, o, o) - F(o, o, o)}{x} = \frac{\alpha(x, o)[o - \varphi(x)]}{|x|} = -1.$$

Donc $F'_x(o, o, o)$ existe et est égal à -1.

$$\frac{F(o, y, o) - F(o, o, o)}{y} = \frac{\alpha(o, y)[o - o]}{y} = 0.$$

Donc $F'_y(o, o, o)$ existe et est nul.

Enfin

$$\frac{F(o, o, z) - F(o, o, o)}{z} = \frac{\alpha(o, o)(z - o)}{z} = k.$$

Donc $F'_z(o, o, o)$ existe et est égal à $k \neq 0$. Toutes les conditions du théorème C sont vérifiées au sens ancien de la différentiabilité. A ce même sens, puisque la solution $\varphi(x)$ n'est pas dérivable, la conclusion du théorème (que $\varphi(x)$ est différentiable à l'origine) n'est pas exacte.

Cinquième Section

Une application à la définition des fonctions monogènes

On dit avec Emile Borel qu'une fonction complexe $f(z)$ de la variable complexe $z = x + iy$ est *monogène* au point $c = a + ib$, si cette fonction est dérivable en ce point. C'est-à-dire que

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = f'_c + \varepsilon \text{ avec } \lim_{\Delta z \to 0} \varepsilon = 0.$$

En posant $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$, cherchons à quelles conditions doivent satisfaire P et Q pour que $f(z)$ soit monogène pour $z = c$. Conformément à l'usage en vigueur à son époque, Goursat [1] résoud le problème aux pages 6 à 9 de l'édition de 1905 du tome II de son cours d'analyse, en prouvant d'abord que les fonctions $P(x, y)$, $Q(x, y)$ doivent avoir des dérivées partielles au point considéré et alors en supposant (hypothèses H)

1°) qu'elles en ont encore au voisinage de ce point,

2°) que ces dérivées partielles sont continues au point considéré.

Nous allons voir que la définition moderne de la différentielle *permet de réduire considérablement* cette hypothèse H et même d'obtenir une condition nécessaire et suffisante.

En effet, si $f(z)$ est monogène au point c, on peut écrire

$$\Delta f = (f'_c + \varepsilon)\Delta z \quad \text{ou} \quad \Delta P + i\Delta Q = (A + iB + \varepsilon' + i\varepsilon'')(\Delta x + i\Delta y),$$

d'où

$$\Delta P = (A + \varepsilon')\Delta x - (B + \varepsilon'')\Delta y$$

et

$$\Delta Q = (B + \varepsilon'')\Delta x + (A + \varepsilon')\Delta y$$

avec $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \begin{Bmatrix} \varepsilon' \\ \varepsilon'' \end{Bmatrix} = 0$.

D'après la définition donnée plus haut, page 185, il en résulte que *P et Q sont différentiables au sens moderne au point (a, b)* et que leurs différentielles

$$dP = P'_a dx + P'_b dy$$

$$dQ = Q'_a dx + Q'_b dy$$

sont telles que $P'_a = A$, $P'_b = -B$, $Q'_a = B$, $Q'_b = A$.

Ceci exige que l'on ait:

$$P'_a = Q'_b, \quad P'_b = -Q'_a. \tag{35}$$

Réciproquement si 1°) P et Q sont différentiables au point (a, b), ce qui implique qu'elles ont chacune leurs deux dérivées partielles au point (a, b), 2°) ces dérivées partielles vérifient les conditions (35) dites de Cauchy-Riemann, alors la fonction $f(z)$ sera monogène pour $z = 0$, car on aura:

$$\Delta f = \Delta P + i\Delta Q = (A+\varepsilon')\Delta x - (B+\varepsilon'')\Delta y + i\left[(B+\varepsilon_1)\Delta x + (A+\varepsilon_2)\Delta y\right] + (\varepsilon'+i\varepsilon_1)\Delta x + (-\varepsilon''+i\varepsilon_2)\Delta y\,,$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = A + iB + \eta$$

avec

$$|\eta| = \frac{|(\varepsilon'+i\varepsilon_1)\Delta x + (-\varepsilon''+i\varepsilon_2)\Delta y|}{|\Delta z|} \leqq |\varepsilon'| + |\varepsilon_1| + |\varepsilon''| + |\epsilon_2|$$

et par suite, $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \eta = 0$, c'est-à-dire que $f(z)$ est dérivable pour $z = c$.

En résumé: Pour que la fonction $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ soit *monogène* pour $z = c = a + ib$, il faut et il suffit:

1°) que P et Q soient différentiables au sens moderne au point (a, b),

2°) que, ces fonctions ayant alors nécessairement des dérivées partielles au point (a, b), celles-ci vérifient les conditions de Cauchy-Riemann

$$P'_a = Q'_b\,, \quad P'_b = -Q'_a\,.$$

Remarque: Nous avons établi ce théorème en 1919 [17]. Quelques années plus tard, Mrs. Chisholm Young l'a indépendamment redécouvert et l'a appelé « Théorème fondamental de la théorie des fonctions complexes ».

Sixième Section

Différentielles successives.
Dérivées partielles du second ordre.

Avant de nous occuper des différentielles, disons quelques mots des dérivées partielles. On a longtemps admis implicitement que si f''_{xy} et f''_{yx} existent, elles sont égales. Pourtant leurs conditions d'existence sont différentes. Pour que f''_{xy} existe au point (a, b), il faut, et il suffit que $f'_x(x, y)$ existe pour y voisiu de b et ait une dérivée en y pour $y = b$, Pour que f''_{yx} existe an point (a, b), les conditions s'obtiennent en permutant x avec y, a avec b, dans les conditions précédentes.

C'est ce qui a permis à H. A. Schwarz de donner l'exemple de la fonction:

$$f(x, y) = x^2 \, arctg \frac{y}{x} - y^2 \, arctg \frac{x}{y}, \text{ quand } x^2 + y^2 \pm 0, \text{ et } f(o, o) = 0$$

pour laquelle

$$f''_{xy}(o, o) = 1 \quad \text{et} \quad f''_{yx}(o, o) = -1 .$$

Plus tard, Peano a donné, en 1884, l'exemple suivant:

$$f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{pour} \quad x^2 + y^2 \neq 0, f(o, o) = 0$$

pour lequel on a encore:

$$f''_{xy}(o, o) = 1, \quad f''_{yx}(o, o) = -1 .$$

Mais le même H. A. Schwarz a donné ensuite des conditions très générales sous lesquelles $f''_{ab} = f''_{ba}$. Sous une forme simple, on peut dire: il suffit que f''_{xy} et f''_{yx} existent au voisinage du point (a, b) et soient continues en ce point.

Thomae et Peano prouvent ensuite des conditions suffisantes très analogues, mais un peu plus générales: si f''_{xy} existe au voisinage de (a, b) et est continu en ce point, alors, f''_{ba} existe et est égal à f''_{ab}.

Enfin, en 1877, Dini obtient une condition encore très générale, mais un peu différente: pour que $f''_{ab} = f''_{ba}$, il suffit que

1°) f''_{xy} existe au voisinage de (a, b) et ait une limite quand le point (x, y) tend vers le point (a, b) et alors il montre que f''_{ab} existe nécessairement et est égal à cette limite, c'est-à-dire que f''_{xy} est continu au point a, b;

2°) $f'_y(x, b)$ a une dérivée en x pour $x = a$.

Nous renverrons pour les démonstrations de ces différentes propositions, aux pages 147-5 de l'ouvrage de Stolz [7].

Nous voyons que ces théorèmes ne supposent pas l'existence de f''_{a^2}, ni de f''_{b^2}.

Nous allons voir que W. H. Young a pu établir la même égalité dans un cas différent en utilisant la notion de différentielle.

Différentielle seconde: Par définition, une fonction $f(x, y)$ admet une différentielle seconde au point (a, b) si

1°) $f(x, y)$ admet une différentielle du premier ordre df au voisinage du point (a, b);

2°) si pour Δx, Δy, constants, cette différentielle $f'_x \Delta x + f'_y \Delta y$ admet elle-même une différentielle (correspondant à des accroissements $\Delta' x$, $\Delta' y$, en général, nouveaux).

Et alors cette dernière différentielle, nécessairement de la forme

$$d'df = (d'f'_x)\Delta x + (d'f'_y)\Delta y = (f''_{a^2}\Delta' x + f''_{ab}\Delta' y)\Delta x + (f''_{ba}\Delta' x + f''_{b^2}\Delta' y)\Delta y$$

sera appelée *la différentielle seconde* de $f(x, y)$ au point (a, b). *Une simplification:* on vient de voir qu'en supposant l'existence des dérivées partielles du premier et du second ordre de $f(x, y)$ *au voisinage* du point (a, b) *et la continuité* en ce point de f''_{xy} et f''_{yx}, on démontrait autrefois (1) que $f''_{ab} = f''_{ba}$. W. H. Young [9] a montré que cette égalité subsiste quand on suppose seulement que $f(x, y)$ est différentiable au second ordre *au point* (a, b). Soit

$$\delta = f(a+h, b+h) - f(a+h, b) - f(a, b+h) + f(a, b).$$

Posons:

$$\delta(t) = f(a+h, b+ht) - f(a+h, b) - f(a, b+ht) + f(a, b).$$

On a $\delta(o) = 0$, $\delta(1) = \delta$. Or, d'après le théorème sur les fonctions composées $\delta(t)$ est dérivable et

$$\delta'(t) = h[f'_y(a+h, b+ht) - f'_y(a, b+ht)].$$

En appliquant le théorème de Rolle,

$$\delta = \delta(1) - \delta(o) = \delta'(\theta) \quad \text{avec} \quad 0 < \theta < 1.$$

Donc $$\delta = h[f'_y(a+h, b+h\theta) - f'_y(a, b+h\theta)].$$

Et puisque $f'_y\ (x, y)$ est différentiable au point (a, b),

$$\frac{\delta}{h^2} = (f''_{ba} + \varepsilon) + \theta(f''_{b^2} + \varepsilon') - \theta(f''_{b^2} + \varepsilon'')$$

ou

$$\frac{\delta}{h^2} = f''_{ba} + \omega\,, \tag{36}$$

avec

$$|\,\omega\,| = |\,\varepsilon + \theta(\varepsilon' - \varepsilon'')\,| \leqq |\,\varepsilon\,| + |\,\varepsilon'\,| + |\,\varepsilon''\,|\,,$$

où ε, ε', ε'' tendent vers zéro avec h et où, par suite, il en est de même de ω.

Or, on obtiendrait de façon analogue

$$\frac{\delta}{h^2} = f''_{ab} + \omega' \quad \text{où} \quad \lim_{h \to 0}\ \omega' = 0\,. \tag{37}$$

Dès lors en retranchant (36) de (37),

$$o = f''_{ba} - f''_{ab} + \omega - \omega'$$

$$\text{et quand} \quad h \to 0\,,$$

$$f''_{ba} = f''_{ab}\,. \tag{38}$$

Remarque: L'égalité (38) est prouvée par H. A. Schwarz en supposant que f''_{xy} et f''_{yx} existent au voisinage de (a, b) et sont continues en ce point et par W. H. Young, en supposant que f a une différentielle seconde au point (a, b).

Ces deux conditions coïncident quand elles sont vérifiées à la fois, mais Schwarz ne suppose pas l'existence de f''_{a^2} et de f''_{b^2}, même au point (a, b) et W. H. Young ne suppose pas que f''_{xy} et f''_{yx} existent près de (a, b) et y sont continues.

Suivant les cas, on pourra utiliser l'une ou l'autre des conditions de ces deux auteurs.

De l'égalité (38), on tire

$$d'df = \Delta x \Delta' x f''_{a^2} + (\Delta x \Delta' y + \Delta x' \Delta y) f''_{ab} + \Delta y \Delta' y f''_{b^2}$$

et en particulier

$$d^2f = \Delta x^2 f''_{a^2} + 2\Delta x \Delta y f''_{ab} + \Delta y^2 f''_{b^2} .$$

Grâce à cette simplification (38), on peut, connaissant seulement d^2f, reformer $d'df$; tandis que sans la relation (38), on ne pourrait déduire de d^2f une expression unique de $d'df$.

Différence seconde: Nous avons pu obtenir en 1912 [10, page 439] une formule qui montre qu'on pourrait calculer directement $d'df$ sans connaître df. Nous allons en rappeler ici la démonstration avec une petite variante.

La différence première de f étant de la forme:

$$\Delta f = \psi(x, y) = f(x+h, y+k) - f(x, y),$$

la différence seconde de f sera de la forme

$$\Delta' \Delta f = \psi(a+h', b+k') - \psi(a, b)$$

ou

$$\Delta'\Delta f = [f(a+h+h', b+k+k') - f(a+h', b+k')] - [f(a+h, b+k) - f(a, b)] .$$

En posant:

$$\xi(t) = [f(a+ht+h', b+kt+k') - f(a+ht, b+kt)] - [f(a+h', b+k') - f(a, b)],$$

on a

$$\xi(o) = o, \quad \xi(1) = \Delta'\Delta f$$

d'où

$$\Delta'\Delta f = \xi(1) - \xi(o)$$

et puisque $f(x, y)$ est différentiable près de (a, b), alors si h et k sont assez petits, en vertu du théorème des fonctions composées, $\xi(t)$ sera dérivable, et l'on aura d'après le théorème de Rolle

$$\Delta'\Delta f = \xi'(\theta) \quad \text{avec} \quad 0 < \theta < 1 ,$$

d'où

$$\Delta'\Delta f = [hf'_x(a+h\theta+h', b+k\theta+k') + kf'_y(a+h\theta+h', b+k\theta+k')] - [hf'_x(a+h\theta, b+k\theta) + kf'_y(a+h\theta, b+k\theta)] .$$

Et si f'_x, f'_y sont différentiables pour $x = a$, $y = b$:

$$f'_x(a+\Delta x\,,\ b+\Delta y) - f'_x(a\,,\ b) = \Delta x\,[f''_{a^2}+\varepsilon] + \Delta y\,[f''_{ab}+\varepsilon']$$

avec $\lim \begin{Bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{Bmatrix} = 0$ quand $|\Delta x| + |\Delta y| \to 0$ et de même pour f'_y.

D'où

$$\Delta'\Delta f = h\{(h\theta+h')(f''_{a^2}+\varepsilon) + (k\theta+k')(f''_{ab}+\varepsilon') - h\theta(f''_{a^2}+\varepsilon_1) - k\theta(f''_{ab}+\varepsilon'_1)\} + k\{(h\theta+h')(f''_{ba}+\varepsilon_2) + (k\theta+k')(f''_{b^2}+\varepsilon'_2) - h\theta(f''_{ba}+\varepsilon_3) - k\theta(f''_{b^2}+\varepsilon'_3)\} = hh'f''_{a^2} + hk'f''_{ab} + kh'f''_{ba} + kk'f''_{b^2} + \eta$$

où ε, ε', ε_1, ε'_1, ε_2, ε'_2, ε_3, ε'_3 tendent vers zéro avec $|h|+|k|+|h'|+|k'|$ et où

$$|\eta| \leqslant |h|\,|(h\theta+h')\varepsilon+(k\theta+k')\varepsilon' - h\theta\varepsilon_1 - k\theta\varepsilon'_1| + |k|\,|(h\theta+h')\varepsilon_2 + (k\theta+k')\varepsilon'_2 - h\varepsilon_3 - k\varepsilon'_\varepsilon| \leqslant 2(|h| + |k|)(|h| + |h'| + |k| + |k'|)(|\varepsilon|+|\varepsilon'|+|\varepsilon_1|+|\varepsilon'_1|+|\varepsilon_2|+|\varepsilon'_2|+|\varepsilon_3|+|\varepsilon'_3|) = r(r+r')\lambda$$

où $r = |h|+|k|$, $r' = |h'|+|k'|$ et où $\lambda \to 0$ quand $r + r' \to 0$.

On peut donc écrire

$$\Delta'\Delta f - d'df = \eta = r(r+r')\mu$$

où $|\mu| < \lambda$, donc $\mu \to 0$ avec $r+r'$.

Mais de même en permutant h, k avec h', k' on a

$$\Delta'\Delta f - d'df = r'(r+r')\mu' \quad \text{où} \quad \mu' \to 0 \quad \text{avec} \quad r + r'.$$

Or $r(r+r') = rr'\left(1+\dfrac{r}{r'}\right)$ et $r'(r+r') = rr'\left(1+\dfrac{r'}{r}\right)$. L'un des rapports $\dfrac{r}{r'}$, $\dfrac{r'}{r}$ est $\leqslant 1$, on peut donc écrire:

$$\left|\frac{\Delta'\Delta f - d'df}{rr'}\right| \leqslant 2(|\mu| + |\mu'|).$$

D'où finalement

$$\Delta'\Delta f = d'df + \nu rr' \tag{39}$$

où $\lim v = 0$ *quand* $r + r' \to 0$, *et où* r *est une distance entre* (a, b) *et* (a+h, b+k), r′ *une distance entre* (a, b) *et* (a+h′, b+k′). De même qu'à la page 188, on peut prendre $r = \sqrt{h^2+k^2}$ ou $r = max$ ($|h|$ et $|k|$), aussi bien que $r = |h|+|k|$. Et de même pour r' exprimé en fonction de h' et k'. On notera l'analogie de la formule (39), avec la formule de Stolz pour le premier ordre:

$$\Delta f - df = \alpha r \quad \text{où} \quad \lim_{r \to 0} \alpha = 0 .$$

Si dans (39) on suppose $h' = h$, $k' = k$, on aura

$$\Delta^2 f - d^2 f = \rho r^2 \quad \text{avec} \quad \lim_{r \to 0} \rho = 0 . \tag{40}$$

En écrivant:

$$h = r \cos \varphi , \quad k = r \sin \varphi ,$$

on aura:

$$\cos^2 \varphi \, f''_{a^2} + 2 \sin \varphi \cos \varphi f''_{ab} + \sin^2 \varphi f''_{b^2} = \lim_{r \to 0} \frac{\Delta^2 f}{r^2} \tag{41}$$

où

$$\Delta^2 f = f(a+2h , b+2k) - 2f(a+h , b+k) + f(a , b)$$

et

$$r^2 = h^2 + k^2 .$$

En particulier pour $k = 0$, pour $h = 0$ et pour $k = h$, on obtient:

$$f''_{a^2} = \lim_{h \to o} \frac{f(a+2h , b) - 2f(a+h , b) + f(a , b)}{h^2} \tag{42}$$

$$f''_{b^2} = \lim_{k \to o} \frac{f(a , b+2k) - 2f(a , b+k) + f(a , b)}{k^2} \tag{43}$$

$$f''_{ab} = \lim_{h \to o} \frac{f(a+2h , b+2h) - 2f(a+h , b+h) + f(a , b)}{h^2} . \tag{44}$$

On a d'ailleurs obtenu plus haut, une autre expression

$$f''_{ab} = \lim_{h \to o} \frac{f(a+h, b+h) - f(a, b+h) - f(a+h, b) + f(a, b)}{h^2} .$$

On voit ainsi qu'au moyen de la formule (39) ou des formules (42), (43), (44), on peut calculer d^2f *sans connaître la différentielle première* df.

Unicité. 1°) Restant encore dans le cas où $f(x, y)$ a une différentielle seconde au point (a, b), supposons qu'il existe trois nombres fixes, L, M, N, tels que:

$$\Delta^2 f = L\Delta x^2 + 2M\Delta x\Delta y + N\Delta y^2 + r^2\beta \qquad (45)$$

avec $\lim\limits_{r \to o} \beta = 0$.

Alors en comparant avec (40), on a

$$(L - f''_{a^2})\Delta x^2 + 2(M - f''_{ab})\Delta x\Delta y + (N - f''_{b^2})\Delta y^2 = r^2(\beta - \rho).$$

On pourra encore poser

$$\Delta x = r\cos\varphi, \Delta\ y = r\sin\varphi, \quad \text{d'où}$$

$$(L - f''_{a^2})\cos^2\varphi + 2(M - f''_{ab})\sin\varphi\cos\varphi + (N - f''_{b^2})\sin^2\varphi, = (\beta - \rho).$$

Pour $\sin\varphi$ constamment nul, on voit qu'en faisant tendre r vers zéro, on aura, puisque $\beta - \rho \to 0$ avec r, $L = f''_{a^2}$. De même pour $\cos\varphi$ constamment nul, $N = f''_{b^2}$.

En tenant compte de ces deux relations, il restera pour $\sin^2\varphi = 1$, $M - f''_{ab} = \beta - \rho$, d'où $M = f''_{ab}$.

Ainsi, sous la seule hypothèse que f a une différentielle seconde au point (a, b), la formule (45) n'est valable que pour une seule forme quadratique en Δx, Δy, soit $L\Delta x^2 + \ldots$, à savoir

$$d^2f = f''_{a^2}\Delta x^2 + 2f''_{ab}\Delta x\Delta y + f''_{b^2}\Delta y^2.$$

2°) On peut obtenir, moins simplement, il est vrai, un résultat plus général en partant de la formule ci-dessous, mais en supposant seulement que f a une différentielle première au voisinage (a, b) sans supposer d'avance l'existence d'une différentielle seconde au point (a, b). Ainsi on suppose que:

$$\Delta'\Delta f \equiv$$

$$f(a+h+h', b+k+k') - f(a+h, b+k) - f(a+h', b+k') + f(a, b) =$$
$$Lhh' + Mh'k + Mhk' + Nkk' + vrr', \qquad (46)$$

où $v \to o$ avec $r + r'$.

Ceci étant, on aura en prenant $k' = o$ dans (46),

$$[f(a+h+h', b+k) - f(a+h, b+k)] - [f(a+h', b) - f(a, b)] = Lhh' + Mh'k + \rho r |h'|$$

où, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut prendre η tel que $|\rho| < \varepsilon$ pour $|h| + |h'| + |k| < \eta$.

En particulier prenons $|h'| < \frac{\eta}{2}$, on aura

$$\frac{f(a+h+h', b+k) - f(a+h, b+k)}{h'} - \frac{f(a+h', b) - f(a, b)}{h'} = Lh + Mk + \nu r$$

où $|\nu| < \varepsilon$, pour $r = |h| + |k| < \frac{\eta}{2}$.

Quand $h' \to o$, les deux premiers termes du premier membre ont chacun une limite, (si η fixe est assez petit) et on a

$$f'_x(a+h, b+k) - f'_x(a, b) = Lh + Mk + \nu r \qquad (47)$$

avec encore $|\nu| < \varepsilon$ pour $r = |h| + |k| < \frac{\eta}{2}$ où η a été choisi convenablement après que ε a été choisi arbitrairement. C'est-à-dire, $\lim\limits_{r \to o} \nu = o$ et par suite: 1°) que f'_x est différentiable au point (a, b) et: 2°) que $L = f''_{a^2}$, $M = f''_{ab}$. De la même manière, on trouverait que f'_y est différentiable au point (a, b) et que $M' = f''_{ba}$, $N = f''_{b^2}$. Donc f *a une différentielle seconde au point* (a, b). Ainsi $f''_{ab} = f''_{ba}$ et

$$Lhh' + M(hk' + h'k) + Nkk' \equiv f''_{a^2} hh' + f''_{ab}(hk' + h'k) + f''_{b^2} hk'.$$

Ainsi, quand on a la formule (46), il suffit de supposer que f est différentiable *au voisinage du point* (a, b) pour être assuré

1°) *que* f *a une différentielle seconde au point* (a, b),

2°) *qu'il n'y a qu'une expression Lhh'* ... vérifiant la formule (46),

3°) que cette *expression est identique à la différentielle seconde* de f au point (a, b).

On notera même qu'on n'a pas eu à se servir de la différentiabilité de f, mais seulement de l'existence au voisinage de (a, b) des deux dérivées partielles $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ de f.

Formule de Taylor :

Supposons que $f(x, y)$ ait une différentielle seconde au point a, b. D'après la formule (39), on a en particulier, en y remplaçant h, k, h', k', par $h, 0, 0, k$,

$$f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+k) + f(a, b) = hk(f''_{ab} + \varepsilon)$$

avec $\lim\limits_{|h|+|k| \to 0} \varepsilon = 0$.

Or on a les formules classiques de Taylor à une variable

$$f(a+h, b) = f(a, b) + hf'_a(a, b) + \frac{h^2}{2}(f''_{a^2}(a, b) + 2\varepsilon_1),$$

$$f(a, b+k) = f(a, b) + kf'_b(a, b) + \frac{k^2}{2}(f''_{b^2}(a, b) + 2\varepsilon_2)$$

avec $\lim\limits_{h \to o} \varepsilon_1 = 0$, $\lim\limits_{k \to o} \varepsilon_2 = 0$. De ces trois relations, on tire

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + hf'_a(a, b) + kf'_b(a, b) + \tfrac{1}{2}[h^2 f''_{a^2}(a, b) +$$
$$2hkf''_{ab}(a, b) + k^2 f''_{b^2}(a, b)] + \varepsilon_1 h^2 + \varepsilon hk + \varepsilon_2 k^2 \qquad (48)$$

où le dernier membre peut se mettre sous la forme $\omega\ (h^2 + k^2)$ où $\omega \to o$ avec $h^2 + k^2$. *(48) est la forme de Taylor* limitée au second ordre, pour deux variables.

Différentielle d'ordre quelconque

Nous dirons qu'une fonction $f(x, y)$ est différentiable à l'ordre n au point (a, b) si :

1°) elle est différentiable au voisinage de ce point jusqu'à l'ordre $n-1$,

2°) si sa différentielle d'ordre $n-1$ est différentiable au point (a, b) pour toutes valeurs fixées des accroissements de x et y.

Nous avons défini plus haut les différentielles du premier et du second ordre. La définition précédente permet donc de définir successivement de façon précise les différentielles d'ordre 3, 4 ...

Ici encore, on retrouve les formes anciennes des différentielles d'ordre n et en particulier la formule symbolique ancienne:

$$d^n f(x\,,\,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f$$

où l'on doit remplacer les puissances de ∂ comme des indices de dérivation.

Ce qui distinguera les définitions anciennes des définitions modernes, ce sera encore, pour les différentielles d'ordre n comme pour les différentielles premières, les conditions de différentiabilité et les propriétés des différentielles.

Pour ces dernières, nous renverrons encore aux cours d'analyse les plus récents, [14, 15, 16], qui établissent bien le parallélisme des propriétés des différentielles d'ordre supérieur entre le cas d'une et le cas de plusieurs variables. Il n'est pas utile de citer des exemples où l'ancienne définition de la différentiabilité d'ordre supérieur (réduite à l'hypothèse de l'existence des dérivées partielles correspondantes) ne suffit pas à établir ce parallélisme, puisque déjà ce résultat a été obtenu plus tôt pour la différentielle première dont l'existence est nécessaire pour celle des différentielles successives.

LISTE BIBLIOGRAPHIQUE

LES ANCIENNES DÉFINITIONS

[1] E. Goursat, *Cours d'analyse*, 1e édition, 1902, t. I, p. 25, chez Gauthier-Villars.
[2] Humbert, *Cours d'analyse*, t. I, 1903.
[3] J. Tannery, *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, 2e édition, 1904.
[4] Baire, *Leçons sur les théories générales de l'analyse*, t. I, 1907, p. 71, Chez Gauthier-Villars.
[5] Camille Jordan, *Cours d'analyse de l'Ecole polytechnique*, 3e édition, 1909, t. I, pages 75-77.
[6] De la Vallée-Poussin, *Cours d'analyse*, 2e édition, p. I, 1909.

Publications ayant introduit les définitions modernes

[7] Stolz, *Grundzüge der Differential und Integral Rechnung*, t. I, 1893, p. 133, Leipzig.
[8] J. Pierpont, *Theory of functions of real variables*, t. I, 1905, p. 268, Boston.
[9] W. H. Young, *The fundamental theorems of Differential Calculus*, Cambridge Tracts, 1910.
[10] Fréchet, *Sur la notion de différentielle totale*, Nouv. Annales de Mathématiques, t. 12, 1912. p. 385, 403, 433 et 449.
[11] J. Hadamard, *La notion de différentielle dans l'enseignement*, Scripta Univ. Ab. Bib. Hierssolymitanarum, Jérusalem, 1923.
[12] F. Severi, *Lezione di Analisi*, Volume Primo, 1953.

Quelques traités ayant adopté une définition moderne de la différentiabilité

[13] Ch. J. de la Vallée-Poussin, *Cours d'analyse infinitésimale*, 3e édition, t. I, 1914, p. V. Chez Gauthier-Villars.
[14] G. Valiron, *Cours d'analyse mathématique*, t. I, p. 228, Masson, 1942.
[15] J. A. Favard, *Cours d'analyse de l'École polytechnique*, t. I, 1960, p. 258.
[16] J. Hadamard, *Cours d'analyse de l'École polytechnique*, t. I, 1925, pp. 2 et 4.

Une des applications

[17] Fréchet, *Sur les conditions pour qu'une fonction $P(x, y) + i\,(x, y)$ soit monogène*, Nouvelles annales de mathématiques, 4e série, t. XIX, 1919.

Extension de la notion de différentielle aux espaces abstraits

[18] Fréchet, *Sur la notion de différentielle dans le calcul fonctionnel*, Congrès Soc. Sav., Paris, 1912, p. 45.
[19] Fréchet, *La notion de différentielle dans l'analyse générale*, Annales Ec. Normale Supérieure, t. XLII, 1925.
[20] Fréchet, *Sur la notion de différentielle*, Journal de Mathématiques, XVI, 1937, p. 233-250.
[21] Michal, *Le calcul différentiel dans les espaces de Banach*, Vol. I, 1958, XIV+144 pages, Vol. II, 1964, Gauthier-Villars.

M. Fréchet
2, rue Emile Faguet
Paris XIVe

(Reçu le 1er avril 1963.)