

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 10 (1964)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** VERALLGEMEINERUNGEN EINIGER FUNKTIONALGLEICHUNGEN  
**Autor:** Gheorghiu, Octavian Em.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-39415>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 13.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# VERALLGEMEINERUNGEN EINIGER FUNKTIONALGLEICHUNGEN

von Octavian Em. GHEORGHIU

(Reçu le 10 novembre 1962)

1. In der 1959 erschienenen Arbeit der Herrn St. GOŁĄB und A. SCHINZEL [1] wird die allgemeine stetige Lösung untersucht u. es werden die messbaren und unmessbaren Lösungen für die Funktionalgleichung

$$f[x + yf(x)] = f(x) \cdot f(y), \quad (1)$$

angeführt.

Eine Verallgemeinerung dieser Funktionalgleichung wäre folgende

$$f[x + yg(x)] = h(x) \cdot k(y) \quad (2)$$

wobei  $x, y, z \in R$  und  $f, g, h, k: R \rightarrow R$  (d.h., dass die Argumente und die Funktionswerte reell sind und die Lösung im Bereiche der reellen eineindeutigen Funktionen gegeben wird.)

Um die Funktionalgleichung (2) in eine Funktionalgleichung von einer einzigen überzuführen, geht man wie folgt vor:

Man nimmt in (2)  $y = 0$  und für  $k(0) = A \neq 0$ , aus dem die Gleichung

$$f(x) = Ah(x), \quad (3)$$

hervorgeht.

Man setzt (3) in (2) u. erhält

$$Ah[x + yg(x)] = h(x) \cdot k(y). \quad (4)$$

Nimmt man in (4)  $x = 0$  u. für  $h(0) = \alpha \neq 0$ ,  $g(0) = a \neq 0$  aus dem die Gleichung

$$Ah(ay) = \alpha k(y), \quad (5)$$

hervorgeht.

Setzt man (5) in (4) erhält man die Gleichung

$$\alpha h[x + yg(x)] = h(x) \cdot h(ay). \quad (6)$$

Man nimmt die Funktionen

$$h(x) = \alpha H(x), \quad g(x) = aG(x), \quad (7)$$

u. führt durch  $z = ay$  eine neue Veränderliche ein. Die Gleichung (6) wird dadurch zu

$$H[x + zG(x)] = H(x) \cdot H(z). \quad (8)$$

Da die Funktion  $h(x)$  im Bereiche  $R$  eineindeutig ist, folgt aus (7), dass auch die Funktion  $H(x)$  eineindeutig ist, und aus (8) folgt nach der symmetrischen Form der linken Seite

$$H[x + zG(x)] = H[z + xG(z)],$$

mithin folgt

$$x + zG(x) = z + xG(z). \quad (9)$$

Für die Funktion  $G(x)$  erhält man den allgemeinen Ausdruck

$$G(x) = 1 + \lambda x, \quad (10)$$

wobei  $\lambda$  eine beliebige reelle Konstante ist.

Zieht man (10) in (8) in Betracht, so erhält man die von H. R. THIELMANN (Siehe J. ACZÉL [2], S. 75) gefundene Funktionalgleichung

$$H(x + z + \lambda xz) = H(x) \cdot H(z), \quad (11)$$

deren allgemeine Lösung nach Herrn J. ACZÉL

$$H(x) = (1 + \lambda x)^m, \quad (12)$$

ist.

Die Funktionalgleichung (2) hat zur allgemeinen Lösung die Funktionen

$$\begin{cases} f(x) = A\alpha(1 + \lambda x)^m \\ g(x) = a(1 + \lambda x) \\ h(x) = \alpha(1 + \lambda x)^m \\ k(x) = A(1 + a\lambda x)^m. \end{cases} \quad (13)$$

wobei  $a, \alpha, A, m$  und  $\lambda$  beliebige reelle Konstanten sind.

Es gibt noch folgende weitere Lösungen:

$$\begin{cases} f(x) \equiv 0, g(x) = \text{beliebig}, h(x) = \text{beliebig}, k(x) \equiv 0 \\ f(x) \equiv 0, g(x) = \text{beliebig}, h(x) \equiv 0, k(x) = \text{beliebig} \\ f(x) = B \cdot C, g(x) = \text{beliebig}, h(x) = B, k(x) = C \\ f(x) = \text{beliebig}, g(x) \equiv 0, h(x) = \text{beliebig}, k(x) = C \\ f(x) = A\alpha e^{mx}, g(x) = C, h(x) = \alpha e^{mx}, k(x) = Ae^{mx} \end{cases}$$

die beliebige Konstanten und nebenbei auch beliebige Funktionen enthalten.

2. In der Literatur sind viele Funktionalgleichungen welche die Sinus-Funktion kennzeichnen, gegeben. In diesem Abschnitt behandeln wir eine Verallgemeinerung der Funktionalgleichung [2, S. 114]

$$f(x+y) \cdot f(x-y) = f^2(x) - f^2(y). \quad (15)$$

Diese Gleichung wurde von D. CARMICHAEL (1909), von H. WILSON (1919), von Herrn L. VIETORIS (1960), von Herrn J. ACZÉL (1961), [2], der eine reichhaltige Bibliographie angibt, von Herrn S. KUREPA (1960) untersucht und von Herrn E. VINCZE (1961) welcher sie im komplexen Bereich untersucht hat [3].

Die Funktionalgleichung kennzeichnet im reellen Bereich die trigonometrische, hyperbolische u. die duale Sinusfunktion in gleichem Mass und stellt folglich eine Synthese aller Funktionalgleichungen dar, welche jede für sich die drei Sinusfunktionen kennzeichnen.

Die Matrixen Funktionalgleichung

$$\begin{bmatrix} A(x+y) & B(x+y) \\ \lambda B(x+y) & A(x+y) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A(x-y) & B(x-y) \\ \lambda B(x-y) & A(x-y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(x) & B(x) \\ \lambda B(x) & A(x) \end{bmatrix}^2 - \begin{bmatrix} A(y) & B(y) \\ \lambda B(y) & A(y) \end{bmatrix}^2, \quad (16)$$

gibt in einem für  $\lambda = -1; 0; +1$  alle drei Typen wieder.

Sie ist gleichwertig mit dem System

$$\begin{cases} A(x+y)A(x-y) + \lambda B(x+y)B(x-y) = A^2(x) + \lambda B^2(x) - A^2(y) - \lambda B^2(y), \\ A(x+y)B(x-y) + B(x+y)A(x-y) = 2A(x)B(x) - 2A(y)B(y), \end{cases} \quad (17)$$

wobei  $A(x)$  und  $B(x)$  reelle messbare Funktionen von einer Veränderlichen sind.

Die allgemeine Lösung für der Fall  $\lambda = -1$ , erhält man, in dem (17) durch Einführung der komplexen Funktion mit einer reellen Veränderlichen

$$L(x) = A(x) + iB(x), \quad i^2 = -1, \quad (18)$$

aus eine einzige Gleichung reduziert wird.

Daraus folgt die Funktionalgleichung

$$L(x+y) \cdot L(x-y) = L^2(x) - L^2(y), \quad (19)$$

und die allgemeine Lösung für  $A(x)$  und  $B(x)$  ist

$$\begin{cases} A(x) = ax & \begin{cases} A(x) = a \sin \alpha x \operatorname{ch} \beta x - b \cos \alpha x \operatorname{sh} \beta x \\ B(x) = bx & \begin{cases} B(x) = a \cos \alpha x \operatorname{sh} \beta x + b \sin \alpha x \operatorname{ch} \beta x \end{cases} \end{cases} \\ \begin{cases} A(x) = a \operatorname{sh} \alpha x \cos \beta x - b \operatorname{ch} \alpha x \sin \beta x \\ B(x) = a \operatorname{ch} \alpha x \sin \beta x + b \operatorname{sh} \alpha x \cos \beta x, \end{cases} \end{cases} \quad (20)$$

wobei  $a, b, \alpha, \beta$  beliebige reelle Konstante sind.

Die allgemeine Lösung im Falle  $\lambda = 0$  wird durch Einführung der Dual-Funktion von einer Veränderlichen

$$M(x) = A(x) + \varepsilon B(x), \quad \varepsilon^2 = 0, \quad (21)$$

aus gefunden.

Dann folgt für  $M(x)$  die Gleichung (15) und die allgemeine messbare Lösung für  $A(x)$  u.  $B(x)$  ist

$$\begin{cases} A(x) = ax & \begin{cases} A(x) = a \sin \alpha x \\ B(x) = bx & \begin{cases} B(x) = b \sin \alpha x + a\beta x \cos \alpha x \end{cases} \end{cases} \\ \begin{cases} A(x) = a \operatorname{sh} \alpha x \\ B(x) = b \operatorname{sh} \alpha x + a\beta x \operatorname{ch} \alpha x, \end{cases} \end{cases} \quad (22)$$

wobei  $a, b, \alpha, \beta$  beliebige reelle Konstanten sind.

Geht man ähnlich für den Fall  $\lambda = +1$  vor, so erhält man die allgemeine messbare Lösung

$$\begin{aligned} \begin{cases} A(x) = ax \\ B(x) = bx \end{cases} & \begin{cases} A(x) = a \sin \alpha x + b \sin \beta x \\ B(x) = a \sin \alpha x - b \sin \beta x \end{cases} \\ & \begin{cases} A(x) = a \operatorname{sh} \alpha x + b \operatorname{sh} \beta x \\ B(x) = a \operatorname{sh} \alpha x - b \operatorname{sh} \beta x, \end{cases} \end{aligned} \quad (23)$$

wobei  $a, b, \alpha, \beta$  beliebige reelle Konstanten sind.

Die Matrixen-Gleichung (16) kann auch verallgemeinert werden. Dies wird jedoch der Inhalt einer anderen Arbeit sein.

#### BIBLIOGRAPHIE

- GOŁAB, St. und SCHINZEL, A., *Publ. Math. Debrecen*, t. 6, (1959), S. 113-125.  
[2] ACZÉL, J., *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen*, Basel, Stuttgart-Berlin, 1961.  
[3] VINCZE, E., *Matematikai Lapok*, XII, évfolyam, (1961), S. 18-31.

Str. Traian Lalescu 1,  
Timisoara 3  
Roumanie