Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 10 (1964)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE CONSTRUCTION DE LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE FONDÉE SUR LA NOTION DE RÉFLEXION

Autor: Delessert, André

Anhang: Appendice Bref rappel des définitions des notions utilisées

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-39412

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] AHRENS, J., Begründung der absoluten Geometrie des Raumes aus dem Spiegelungsbegriff. Math.Z, 71.
[2] ARTIN, E., Geometric Algebra. Interscience Publishers, Inc., New-York, 1957.
[3] BACHMANN, F., Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff. Springer-Verlag, Berlin, 1959.
[4] BIBERBACH, L., Theorie der geometrischen Konstruktionen. Verlag Birkhäuser, Basel, 1952.
[5] BOURBAKI, N., Théorie des ensembles, chapitre 4. Hermann, Paris, 1958.
[6] —— Algèbre, chapitre IV. Hermann, Paris, 1950.
[7] —— Algèbre, chapitre VI. Hermann, Paris, 1952.
[8] CHOQUET, G., Sur l'enseignement de la géométrie élémentaire. Dans « L'enseignement des mathématiques ». Ed. Delachaux & Niestlé, Neuchâtel et Paris, 1955.
[9] COXETER, H. S. M. & MOSER, W. O. J., Generators and Relations for Discrete Groups. Springer-Verlag, Berlin, 1957.
[10] DELESSERT, A., Géométrie plane. Ed. Spès, Lausanne, 1960.
[11] DIEUDONNÉ, J., Sur les groupes classiques. Hermann, Paris, 1948.
[12] HILBERT, D., Grundlagen der Geometrie. Stuttgart, 1956.
[13] KERÉKJÁRTÓ, B., Les fondements de la géométrie, tome I. Budapest, 1955.
[14] KLEIN, F., Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Math. Ann. XLIII (1893).
[15] LEBESGUE, H., Leçons sur les constructions géométriques. Ed. Gauthier-Villars, Paris, 1950.
[16] LINGENBERG, R., Über Gruppen mit einem invarianten System involutischer Erzeugender, in dem der allgemeine Satz von der drei Spiegelungen gilt, I, II. Math. Ann. Bd. 137, 1959.
[17] MONTGOMERY, D. & ZIPPIN, L., Topological Transformation Groups. Interscience Publishers, Inc., New York, 1955.
[18] SPERNER, E., Ein gruppentheorischer Beweis des Satzes von Desargues in der absoluten Axiomatik. Arch. Math. 5 (1954).
[19] +++ Structures algébriques et structures topologiques. Monographies de l'enseignement mathématique, n° 7. Genève-Paris, 1958.

Appendice

BREF RAPPEL DES DÉFINITIONS DES NOTIONS UTILISÉES

Les notices qui suivent ont pour but de rappeler quelques faits mathématiques utilisés plus haut. Certains d'entre eux pourraient être énoncés sous une forme beaucoup plus générale. Les hypothèses restrictives où nous nous plaçons et qui sont satisfaites dans le texte précédent permettent d'éviter des développements qui n'auraient pas leur place ici. Pour des exposés plus circonstanciés, on peut se reporter, par exemple, à [19], puis au traité de N. Bourbaki.

1) *Groupe*

Un groupe G est un ensemble non vide dans lequel il existe une loi de composition interne faisant correspondre à tout couple ordonné (a, b) d'éléments de G un élément de G appelé *produit* de a et b, noté ab, moyennant les conditions suivantes:

a) Cette loi de composition est *associative*:

$$a(bc) = (ab)c, \qquad \forall a, b, c \in G,$$

b) Il existe dans G un *élément neutre* bilatère e relativement à la loi de composition considérée:

$$ea = ae = a, \qquad \forall a \in G,$$

c) Tout élément a de G possède un *inverse* bilatère dans G pour la loi de composition considérée, élément noté a^{-1}:

$$\forall a \in G, \quad \exists a^{-1} \in G: aa^{-1} = a^{-1}a = e.$$

On montre facilement que, dans le groupe G, il n'existe qu'un seul élément neutre et que tout élément n'y possède qu'un seul inverse. Cela implique que, quels que soient a et b dans G, les équations $ax = b$ et $xa = b$ possèdent chacune une solution bien déterminée en x dans G.

Soit A et B deux parties non vides d'un groupe G; on note AB l'ensemble des éléments de G de la forme ab, où $a \in A$ et $b \in B$. Lorsque $c \in G$, on convient de mettre cA et Ac pour $\{c\}A$ et $A\{c\}$, respectivement. On écrit A^2 au lieu de AA et plus généralement A^n au lieu de AA^{n-1}, n étant un entier naturel plus grand que 1. On note A^{-1} l'ensemble des inverses des éléments de A.

Une partie g d'un groupe G est un *sous-groupe* de G lorsqu'elle est un groupe vis-à-vis de la restriction à g de la loi de composition interne existant dans G. La condition nécessaire et suffisante pour que la partie non vide g de G soit un sous-groupe de G est donnée par $gg^{-1} = g$.

Un groupe composé d'un nombre fini n d'éléments est dit d'*ordre fini* n; un groupe est dit d'*ordre infini* lorsqu'il comporte une infinité d'éléments. Prenons un élément a dans un groupe G d'élément neutre e; l'ensemble des puissances de a, c'est-à-dire $a^0 = e, a^k, a^{-k} = (a^{-1})^k$, où $k = 1, 2, 3, \ldots$, constitue un sous-groupe g_a de G. Par définition, l'*ordre* de a est l'ordre du groupe g_a. En particulier, a est dit *involutif* quand il est d'ordre 2.

A titre d'exemple, appelons *permutation* d'un ensemble non vide E toute application biunivoque de E sur lui-même; le produit ab de deux permutations a et b de E est la permutation de E obtenue en composant b et a, dans l'ordre. L'ensemble des permutations de E constitue un groupe pour la loi de composition indiquée. Lorsque E est un ensemble fini de n éléments, le groupe des permutations de E est le *groupe symétrique de degré* n; il est d'ordre $\Gamma(n+1) = 1.2.3 \ldots \ldots n$.

Une application f d'un groupe G dans (sur) un groupe G' est un *homomorphisme* de G dans (sur) G' lorsque $f(ab) = f(a)f(b)$, quels que soient a et b dans G. Le *noyau* de l'homomorphisme f est l'ensemble $f^{-1}(e')$ des éléments de G envoyés sur l'élément neutre e' de G'. L'image $f(G)$ est un sous-groupe de G'. Lorsque le noyau de f se réduit à l'élément neutre de G et que $f(G) = G'$, f est un *isomorphisme* de G sur G'. Un homomorphisme de G dans lui-même est un *endomorphisme* de G. Un isomorphisme de G sur lui-même est un *automorphisme* de G. Si f et g sont deux automorphismes de G, fg est aussi un automorphisme de G. Muni de cette loi de composition, l'ensemble des automorphismes de G constitue un groupe dont l'élément neutre est l'automorphisme identique — ou banal — de G.

Soit a un élément du groupe G. L'application:

$$\alpha: \; x \to a^{-1}xa \,, \;\; \forall x \in G \,, \tag{1}$$

est un automorphisme de G appelé *automorphisme intérieur* de G associé à a. Une partie P de G *commute* avec a lorsque $\alpha(P) = P$. En particulier, un élément b de G commute avec a lorsque $ab = ba$. Le *normalisateur* de a dans G est le sous-groupe formé des éléments de G commutant avec a. Une partie de G est *distinguée* quand elle commute avec chaque élément de G. Deux parties de G sont dites *conjuguées* lorsqu'il existe un automorphisme intérieur de G envoyant l'une sur l'autre. L'application qui, à tout élément a de G associe l'automorphisme intérieur de G défini par (1) est un homomorphisme φ de G dans le groupe des automorphismes de G. Le noyau de φ est le *centre* de G. Lorsque le centre de G est confondu avec G, G est dit *commutatif* ou *abélien*. D'une façon générale, on peut affirmer que le noyau d'un homomorphisme de G dans un groupe quelconque est un sous-groupe distingué de G.

Soit H un sous-groupe d'un groupe G. Deux éléments a et b de G sont dits *congrus* (*à gauche*) *relativement à* H lorsque $aH = bH$, et l'on note alors $a \equiv b \pmod{H}$. On détermine ainsi dans G une relation d'équivalence compatible avec la multiplication à gauche dans G; autrement dit, $a \equiv b \pmod{H}$ implique $ca \equiv cb$ $\pmod{H}$, $\forall c \in G$. Les classes d'équivalence introduites par cette relation dans G sont les *classes (à gauche) de G relativement à* H. Elles constituent un ensemble noté G/H et appelé *espace homogène* (*à gauche*) attaché au sous-groupe H de G. Lorsque G/H est un ensemble fini, le nombre de ses éléments est l'*indice* de H dans G; on dit que H est d'indice infini dans G quand G/H comporte une infinité d'éléments. L'*application canonique* de G sur G/H est celle qui, à tout élément a de G, associe la classe (à gauche) de G relativement à H contenant a, que l'on peut noter aH.

A tout élément s de G on peut attacher une permutation s_1 de G/H en posant:

$$s_1 : xH \to sxH \,, \ \forall x \in G \,.$$

L'application $s \to s_1$ est un homomorphisme γ de G dans le groupe des permutations de G/H. L'image $\gamma(G)$ est un groupe transitif de permutations de G/H; autrement dit, pour tout couple d'éléments de G/H, on peut trouver dans $\gamma(G)$ une permutation envoyant le premier sur le deuxième. On traduit cela en disant que G *agit transitivement* dans G/H. Les groupes G et $\gamma(G)$ sont isomorphes lorsque l'intersection des conjugués de H dans G se réduit à l'élément neutre de G ou, ce qui revient au même, quand H ne contient aucun sous-groupe distingué de G autre que celui qui se réduit à l'élément neutre. On dit alors que G *agit effectivement* dans G/H.

Les définitions précédentes, qui conduisent à la notion d'espace homogène à gauche, peuvent être reprises « à droite »: H étant un sous-groupe de G, il suffit de considérer comme équivalents deux éléments a et b de G tels que $Ha = Hb$. Toutefois lorsque H est un sous-groupe distingué de G les équivalences à gauche et à droite relativement à H coïncident dans G. On peut alors, d'une manière unique, introduire dans G/H une loi de composition telle que l'application canonique de G sur G/H soit un homomorphisme. Muni de cette loi, G/H est alors un groupe, le *groupe quotient* de G par le sous-groupe distingué H.

Par exemple, l'ensemble Z des nombres entiers rationnels muni de l'addition ordinaire est un groupe abélien; n étant un nombre entier rationnel positif ou nul, l'ensemble des multiples entiers de n constitue un sous-groupe Z_n de Z, évidemment distingué; le groupe quotient Z/Z_n est isomorphe à Z quand n est nul et il est d'ordre fini n quand n est positif.

Considérons n ensembles non vides $G_1, G_2, \dots, G_n$; leur *produit* est, par définition, l'ensemble des systèmes $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ où $a_i \in G_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Lorsque les G_i sont des groupes, on peut munir ce produit de la loi de composition suivante:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)(b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_n b_n)$$
$$\text{avec } a_i, b_i \in G_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

On obtient ainsi un groupe appelé *produit direct* de $G_1, G_2, \dots, G_n$ et noté $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$. Pour tout indice i, désignons par e_i l'élément neutre de G_i; k étant un indice fixé, l'ensemble des éléments $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ de $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ pour lesquels $a_i = e_i$ quel que soit $i \neq k$ est un sous-groupe distingué de $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$, isomorphe à G_k. On assimile souvent ce sous-groupe à G_k. Alors le groupe quotient de $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ par G_k est isomorphe au produit direct des groupes G_i pour lesquels $i \neq k$.

2) *Anneau. Corps*

Un *anneau A est un ensemble satisfaisant les conditions suivantes*:

a) Il est muni d'une première loi de composition interne pour laquelle il constitue un groupe abélien. On convient généralement de noter cette loi additivement:

$$(a\,,b) \to a+b\,, \quad a\,,b\,,a+b \in A\,,$$

et d'en désigner l'élément neutre par o.

b) Il est muni d'une deuxième loi de composition interne associative, commutative ou non. Cette loi est généralement notée multiplicativement: $(a, b) \to ab$, a, b, $ab \in A$.

c) La multiplication est distributive à gauche et à droite par rapport à l'addition:

$$\left.\begin{array}{l} a(b+c) = ab+ac \\ (b+c)a = ba+ca \end{array}\right. \quad \forall a\,,b\,,c \in A\,.$$

Cela implique, en particulier, que $ao = oa = o$, $\forall a \in A$. L'anneau A est dit *commutatif* lorsque la multiplication y est commutative: $ab = ba$, $\forall\ a, b \in A$. A est un *anneau d'intégrité* lorsqu'il est un anneau commutatif et que les conditions $a \neq o$, $b \neq o$, a, $b \in A$ impliquent $ab \neq o$. Dans un anneau A, un élément différent de o est appelé *élément unité* lorsqu'il est neutre à gauche et à droite vis-à-vis de la multiplication dans A. Lorsqu'un tel élément existe dans A, il est unique et on le désigne par 1.

Un *corps* K est un anneau tel que l'ensemble K^* des éléments de K différents de o constitue un groupe vis-à-vis de la multiplication existant dans K. Un corps non commutatif est dit *gauche.* Dans le groupe abélien additif sous-jacent au corps K, l'élément 1 engendre un groupe isomorphe à un groupe Z/Z_n. L'entier rationnel positif ou nul n est la *caractéristique* du corps K. Ainsi un corps est de caractéristique nulle quand l'élément unité y est d'ordre infini relativement à l'addition. Lorsque la caractéristique est finie, elle est un nombre premier. A titre d'exemples, l'ensemble des nombres rationnels constitue un corps Q, celui des nombres réels constitue un corps R, relativement à l'addition et la multiplication ordinaires. Ces deux corps sont commutatifs et de caractéristique nulle.

Deux corps K et K' sont dits *isomorphes* lorsqu'il existe une application f de K sur K' telle que $f(a+b) = f(a)+f(b)$ et

$f(ab) = f(a)f(b)$, $\forall a, b \in K$; l'application f, qui est bijective, est un *isomorphisme* de K sur K'.

Un *sous-corps* L d'un corps K est une partie de K constituant un corps vis-à-vis de l'addition et de la multiplication existant dans K; on dit encore que K est une *extension* de L. L'intersection de tous les sous-corps de K est un corps appelé *corps premier* de K. Le corps premier d'un corps de caractéristique nulle est isomorphe au corps Q des nombres rationnels.

Soit L un sous-corps d'un corps K et soit E une partie de K. L'intersection des sous-corps de K contenant L et E est un sous-corps de K désigné par $L(E)$: c'est l'extension de L obtenue en *adjoignant* E à L. Une extension de L est de *type fini* lorsqu'il est possible de l'obtenir en adjoignant à L un ensemble fini. Elle est de *type infini* dans le cas contraire.

Une *valuation* (réelle) d'un corps K est une application $x \to |x|$ de K dans l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls satisfaisant les conditions suivantes:

a) $|x| = 0 \in R \Leftrightarrow x = 0 \in K$,

b) $|xy| = |x|\,|y|$, $\forall x, y \in K$,

c) $|x+y| \leq \max(|x|, |y|)$, $\forall x, y \in K$.

On voit immédiatement que $|1| = 1$. La valuation considérée est dite *banale* lorsque $|x| = 1$ pour tout élément x de K différent de o.

3) *Espace vectoriel*

Un *espace vectoriel* V sur un corps commutatif K est un ensemble satisfaisant les conditions suivantes:

a) V est muni d'une loi de composition interne pour laquelle il constitue un groupe abélien; nous le noterons additivement et nous désignerons son élément neutre par O.

b) Il existe une application du produit de K et V dans V: $(a, X) \to aX$, telle que:

1^0 $a(X+Y) = aX + aY$,

2^0 $(a+b)X = aX + bX$,

3^0 $a(bX) = (ab)X$,

4^0 $1X = X$, $\forall a, b \in K, \forall X, Y \in V$.

Les éléments de V sont appelés *vecteurs*; ceux de K sont les *scalaires*. On voit immédiatement que $oX = aO = O$, $\forall X \in V$, $\forall a \in K$; réciproquement, $aX = O$, $a \in K$, $X \in V$ impliquent $a = o$, ou $X = O$.

Deux espaces vectoriels V et V' considérés respectivement sur deux corps commutatifs K et K' sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme f du groupe additif sous-jacent à V sur celui de V' et un isomorphisme g du corps K sur K' tels que:

$$f(aX) = g(a) f(X), \qquad \forall a \in K, \ \forall X \in V.$$

Lorsque K et K' coïncident, on peut prendre pour g l'automorphisme identique de K. Un isomorphisme de V sur lui-même est un *automorphisme*. L'ensemble des automorphismes de V constitue un sous-groupe du groupe des permutations de l'ensemble V. En particulier, à tout élément a différent de o dans K on peut associer un automorphisme de V appelé *homothétie* de rapport a et défini par $X \to aX$.

r vecteurs $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de V sont dits *linéairement indépendants* lorsque toute relation $a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots + a_r X_r = O$, avec $a_i \in K$, $i = 1, 2, \ldots, r$, implique $a_1 = a_2 = \ldots = a_r = o$. S'il existe un entier naturel n tel que l'on puisse trouver n vecteurs linéairement indépendants $E_1, E_2, \ldots, E_n$ dans V, mais que l'on ne puisse pas y trouver $(n+1)$ vecteurs linéairement indépendants, V est dit de *dimension* finie n sur K. Tout élément de V peut alors s'exprimer d'une manière unique sous forme d'une combinaison linéaire des vecteurs $E_1, E_2, \ldots, E_n$ à coefficients dans K. Les n vecteurs E_i constituent une *base* de V.

A titre d'exemple, considérons un corps commutatif K; l'ensemble K^n obtenu en faisant le produit de n exemplaires de l'ensemble K peut être muni naturellement d'une structure d'espace vectoriel sur K; il suffit de poser:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n),$$
$$c(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (ca_1, ca_2, \ldots, ca_n);$$
$$a_i, b_i, c \in K; \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

C'est un espace vectoriel de dimension n sur K que l'on désigne encore par K^n. On peut en former une base en prenant, par exemple, les n vecteurs $E_i = (\delta_{1i}, \delta_{2i}, \dots, \delta_{ni})$, $i = 1, 2, \dots, n$, où δ_{rs} est le symbole de Kronecker, désignant 1 quand $r = s$ et o quand $r \neq s$. Tout espace vectoriel de dimension n sur K est isomorphe à K^n.

Soit L un sous-corps d'un corps commutatif K. On peut considérer K comme un espace vectoriel sur L. Lorsque K est, en tant qu'espace vectoriel, de dimension finie sur L, on dit que K est une *extension finie* de L. On dit que K est une *extension algébrique* de L si, quel que soit $t \in K$, le corps $L(t)$ obtenu en adjoignant t à L est une extension finie de L. Une extension non algébrique est dite *transcendante*. Par exemple, le corps C des nombres complexes est une extension finie du corps R des nombres réels. Le corps des nombres algébriques est une extension algébrique de type infini du corps Q des nombres rationnels. Le corps R est une extension transcendante de type infini du corps Q. Enfin le corps $R(x)$ des fractions rationnelles à une variable x et à coefficients réels est une extension transcendante de R de type fini.

Soit V un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps commutatif K de caractéristique différente de 2. Une *forme bilinéaire* B sur V est une application du produit de V par lui-même dans K: $(X, Y) \to B(X, Y)$, $X, Y \in V$, $B(X, Y) \in K$, telle que:

$$B(aX_1 + bX_2, Y) = aB(X_1, Y) + bB(X_2, Y),$$
$$B(X, cY_1 + dY_2) = cB(X, Y_1) + dB(X, Y_2),$$
$$\forall a, b, c, d \in K; \ \forall X, X_1, X_2, Y, Y_1, Y_2 \in V.$$

B est dite *symétrique* si $B(X, Y) = B(Y, X)$, $\forall X, Y \in V$. De plus, elle est dite *régulière* si, Y étant fixé dans V, la condition $B(X, Y) = o$, $\forall X \in V$ implique $Y = O$.

Une *forme quadratique* Φ sur V est une application de V dans K telle que:

$$\Phi(aX) = a^2 \Phi(X), \qquad \forall a \in K, \qquad \forall X \in V.$$

et que

$$C(X, Y) = \tfrac{1}{2}\left[\Phi(X+Y) - \Phi(X) - \Phi(Y)\right], \quad X, Y \in V,$$

soit une forme bilinéaire symétrique sur V. La forme quadratique Φ est dite *régulière* lorsque C est régulière. L'ensemble des automorphismes s de V qui laissent Φ invariante, c'est-à-dire tels que:

$$\Phi(s(X), s(Y)) = \Phi(X, Y), \qquad \forall X, Y \in K,$$

constitue un sous-groupe du groupe des automorphismes de V: le *groupe orthogonal* attaché à la forme Φ sur le corps K, que l'on note $O(K, \Phi)$. Dans le cas particulier où K est un sous-corps du corps des nombres complexes, où l'on identifie V avec K^n, et où la forme quadratique Φ est donnée par:

$$\Phi(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \quad X = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad x_i \in K,$$

on convient souvent de remplacer la notation $O(K, \Phi)$ par $O(n, K)$.

4) *Quelques notions topologiques*

On dit d'un ensemble E qu'il est muni d'une *topologie* ou encore qu'il est un *espace topologique* lorsqu'on y a déterminé une famille $\mathscr{M}$ de parties dites *ouvertes* telle que:

a) La réunion d'une famille quelconque de parties ouvertes de E est un élément de $\mathscr{M}$.

b) L'intersection d'une famille finie de parties ouvertes de E est un élément de $\mathscr{M}$.

Conformément à l'usage, nous admettrons que la réunion d'un ensemble vide de parties de E est la partie vide $\emptyset$ de E; par suite, l'intersection d'un ensemble vide (considéré comme fini) de parties de E est E lui-même. Ainsi, $\mathscr{M}$ contient $\emptyset$ et E. Deux topologies $\mathscr{T}$ et $\mathscr{T}'$ relatives à un même ensemble E sont *identiques* lorsque les familles $\mathscr{M}$ et $\mathscr{M}'$ des parties ouvertes auxquelles elles sont attachées coïncident.

Considérons un ensemble E et une famille quelconque $\mathscr{B}$ de parties de E. Désignons par $\mathscr{M}$ la famille des parties de E qui peuvent être obtenues par réunion d'intersections finies d'éléments de $\mathscr{B}$. Si l'on qualifie d'ouverte toute partie de E appartenant à $\mathscr{M}$, on voit que les conditions a) et b) sont satisfaites.

La topologie ainsi déterminée est dite *engendrée* par $\mathscr{B}$. Il résulte de ces considérations que tout ensemble comportant plus d'un élément peut être muni de plusieurs topologies non identiques. On appelle *base d'une topologie* $\mathscr{T}$ sur un ensemble E toute famille $\mathscr{B}$ de parties de E telle que la topologie engendrée par $\mathscr{B}$ soit identique à $\mathscr{T}$.

Un *espace métrique* E est un ensemble dans lequel il existe une *distance*, c'est-à-dire une application d du produit de E par lui-même dans l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls, telle que:

$$1^0 \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \qquad x, y \in E,$$

$$2^0 \quad d(x, y) = d(y, x), \qquad \forall x, y \in E,$$

$$3^0 \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in E.$$

Soit a un élément de E et r un nombre réel positif; la *boule ouverte* de centre a et de rayon r est l'ensemble des éléments x de E tels que $d(a, x) < r$. La topologie de E admettant pour base l'ensemble des boules ouvertes est la *topologie associée à la distance d.*

Un espace topologique muni d'une topologie $\mathscr{T}$ est dit *métrisable* lorsqu'il est possible d'y introduire une distance d telle que la topologie associée à d soit identique à $\mathscr{T}$.

Soit E un espace métrique muni d'une distance d. Une suite d'éléments de E: $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ *converge* vers un élément y de E si, à tout nombre réel $\varepsilon > 0$, on peut associer un nombre naturel $N(\varepsilon)$ tel que $n > N(\varepsilon)$ implique $d(x_n, y) < \varepsilon$; une telle suite est dite *convergente dans E.* Une suite $x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots$ est dite *suite de Cauchy* si, à tout $\varepsilon > 0$, on peut associer un nombre naturel $M(\varepsilon)$ tel que $n > M(\varepsilon)$ et $p > M(\varepsilon)$ impliquent $d(x_n, x_p) < \varepsilon$. On voit facilement que, dans l'espace métrique E, toute suite convergente est une suite de Cauchy. La réciproque peut n'être pas vraie. L'espace métrique E est dit *complet* lorsque toute suite de Cauchy y est convergente.

Soit G un groupe abélien noté additivement. Une distance d existant dans G est dite *invariante* lorsque, quels que soient x, y et z dans G, $d(x+z, y+z) = d(x, y)$. Un *groupe abélien métrisable* G est un ensemble muni d'une part d'une structure de groupe abélien, et d'autre part d'une structure topologique susceptible d'être définie par une distance invariante relativement à la structure de groupe abélien existant dans G.

A titre d'exemple, considérons le groupe additif R^+ des nombres réels; $|x|$ désignant la valeur absolue ordinaire dans R^+, on introduit une distance invariante dans R^+ en posant: $d(x, y) = |x\text{-}y|$. Cette distance fait de l'ensemble R des nombres réels un espace métrique complet. Relativement à l'addition et à la structure topologique considérée, R^+ est un groupe abélien métrisable complet. Si l'on substituait à R^+ le sous-groupe Q^+ des nombres rationnels muni de la même distance d, on obtiendrait un groupe abélien métrisable non complet.

INDEX TERMINOLOGIQUE