

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 10 (1964)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE CONSTRUCTION DE LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE FONDÉE SUR LA NOTION DE RÉFLEXION
Autor: Delessert, André
Kapitel: 5. Axiomes de la géométrie euclidienne à plus de deux dimensions
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-39412>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 04.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Dans $\Sigma(2, A)$, un faisceau de première classe est l'ensemble des réflexions de L^2 suivant les droites de A^2 contenant un même point de A^2 . Il existe deux familles de faisceaux de seconde classe: les systèmes polaires et les faisceaux singuliers; un faisceau singulier est constitué par les réflexions de L^2 suivant les droites de A^2 passant par un même point de L^2 n'appartenant pas à A^2 .

Tout élément de $\Sigma(2, A)$ appartient à un seul système polaire. On peut en déduire que la proposition 13, qui ne s'appuie que sur cette partie de l'axiome d'Euclide, est encore vraie ici. Il en est de même de son corollaire. Nous avons donc construit un exemple de géométrie satisfaisant les quatre premiers axiomes ainsi que le corollaire de la proposition 13, mais ne vérifiant pas l'axiome d'Euclide. De plus, dans le groupe $GE(2, A)$, chaque réflexion appartient à une infinité de faisceaux de seconde classe, dont un seul système polaire. Cela montre que l'on n'épuise pas toutes les possibilités en énonçant les hypothèses $a)$, $b)$ et $c)$ indiquées au n^o 2.1.

5. Axiomes de la géométrie euclidienne à plus de deux dimensions

5.1. Désignons par $(K_i)_{i \in J}$ la famille des corps réels contenant la racine carrée de chacun de leurs éléments positifs, J étant un ensemble convenable d'indices. Pour chaque entier naturel n $GE(n, K_i)$ désigne le groupe des isométries de l'espace K_i^n muni de la métrique euclidienne ordinaire. C'est un R -groupe engendré par l'ensemble $\Sigma(n, K_i)$ des réflexions par rapport aux hyperplans dans K_i^n . Les axiomes considérés jusqu'ici concernent les groupes $GE(2, K_i)$. Nous nous proposons de formuler un système d'axiomes caractérisant les groupes $GE(n, K_i)$, $i \in J$ et $n > 2$. Toutefois, pour utiliser les résultats obtenus pour $n = 2$ et pour éviter des répétitions, nous procéderons par récurrence sur n .

Auparavant, précisons quelques points. Soit (G, Σ) et (G', Σ') deux R -groupes G et G' respectivement engendrés par des parties distinguées Σ et Σ' . Ils seront dits « isomorphes en tant

que R -groupes » lorsqu'il existe un isomorphisme du groupe G sur le groupe G' qui applique Σ sur Σ' . Dans un R -groupe (G, Σ) , nous désignerons comme d'habitude par $\Pi(s)$ le système polaire de la réflexion $s \in \Sigma$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de Π perpendiculaires à s , soit encore l'ensemble des réflexions distinctes de s qui commutent avec elle. L'ensemble $\Pi(s)$ engendre un R -groupe $\pi(s)$ appelé *groupe polaire* de s , dans lequel $\Pi(s)$ est distingué. En tant que R -groupe, $\pi(s)$ est toujours considéré comme étant engendré par $\Pi(s)$.

Posons maintenant nos axiomes. Désignons par (G_2, Σ_2) un R -groupe satisfaisant les sept axiomes $P I$ à $P VII$; n étant un entier naturel susceptible de prendre toutes les valeurs supérieures à 2, considérons la famille de R -groupes (G_n, Σ_n) satisfaisant les axiomes suivants:

AXIOME $E_n I$. (G_n, Σ_n) est un RI -groupe.

AXIOME $E_n II$. Dans Σ_n , l'intersection de deux systèmes polaires contient une réflexion s dont le groupe polaire est isomorphe, en tant que R -groupe, à un groupe (G_{n-1}, Σ_{n-1}) .

Pour l'instant, il faut considérer l'expression $(G_{n'}, \Sigma_{n'})$ comme une désignation générique. Nous montrerons que, pour chaque valeur de n' , il y a identité de l'ensemble des R -groupes $(G_{n'}, \Sigma_{n'})$ avec celui des R -groupes $GE(n', K_i)$, avec $i \in J$.

La récurrence portera sur n' , que nous appellerons l'*échelon*. Notons à ce propos qu'elle se présentera sous deux formes: la récurrence « locale » intervenant au cours d'une démonstration isolée; la récurrence « globale » par laquelle on affirme la validité d'une proposition aux échelons inférieurs à n , réservant à plus tard le soin de démontrer qu'elle est aussi vraie à l'échelon n . Une telle hypothèse générale de récurrence sera repérée par une lettre majuscule. Ainsi, pour commencer, nous admettrons qu'à tout échelon n' tel que $2 \leq n' \leq n-1$:

(A) Il existe deux espèces de faisceaux dans $\Sigma_{n'}$. A tout élément a d'un faisceau de première espèce Φ' correspond un élément de Φ' perpendiculaire à a , et un seul. De deux éléments distincts de Φ' , on dit qu'ils *se coupent* ou qu'ils sont *sécants*; ils possèdent exactement deux éléments bissecteurs. Un

faisceau de deuxième espèce Φ'' ne contient pas de paire d'éléments perpendiculaires. Deux éléments de Φ'' sont dits *parallèles*; quand ils sont distincts, ils admettent un élément bissecteur unique.

Tous ces faits sont vrais pour $n' = 2$; dans ce cas, les faisceaux de première (resp. deuxième) espèce coïncident avec ce que nous avons appelé les faisceaux de première (resp. deuxième) classe. Cependant, pour $n' > 2$, il convient de changer de terminologie; on peut montrer que, quel que soit le faisceau Φ dans $\Sigma_{n'}$, on peut trouver un faisceau disjoint de Φ .

L'axiome $E_n II$ affirme, entre autres choses, qu'il existe dans Σ_n une réflexion s dont le groupe polaire $\pi(s)$ est isomorphe, en tant que R -groupe, à un certain groupe (G_{n-1}, Σ_{n-1}) . Il est facile de voir qu'il en est de même pour tout autre élément t de Σ_n . En effet, d'après l'axiome $E_n II$, il existe une réflexion u perpendiculaire à s et t , et dont le groupe polaire est isomorphe, en tant que R -groupe, à un certain groupe (G_{n-1}, Σ_{n-1}) qui satisfait l'axiome de bisection, en vertu de (A). Il existe donc dans Σ_n un élément bissecteur m de s et t . L'application $X \rightarrow mXm$ détermine visiblement un isomorphisme de $\pi(s)$ sur $\pi(t)$, au sens des R -groupes.

On déduit d'abord de là que dans (G_n, Σ_n) l'axiome de bisection est satisfait. De plus, quand la réflexion s parcourt Σ_n , le groupe polaire $\pi(s)$ reste constamment isomorphe, en tant que R -groupe, au même groupe (G_{n-1}, Σ_{n-1}) . Il en résulte, en particulier, que dès que l'on choisit un exemplaire bien déterminé dans la famille des groupes (G_n, Σ_n) , on fixe en même temps toute une chaîne de groupes $(G_{n'}, \Sigma_{n'})$, où $2 \leq n' \leq n-1$. Nous pouvons alors considérer que chacun des symboles $(G_{n'}, \Sigma_{n'})$, où $2 \leq n' \leq n$, désigne désormais un R -groupe bien déterminé. D'autre part, nous pouvons remplacer l'axiome $E_n II$ par les deux axiomes suivants:

AXIOME $E_n' II$. *Lorsque s parcourt Σ_n , le groupe polaire $\pi(s)$ reste constamment isomorphe, en tant que R -groupe, au groupe (G_{n-1}, Σ_{n-1}) .*

AXIOME $E_n' III$. *Dans Σ_n , l'intersection de deux systèmes polaires n' est pas vide.*

Par la suite, nous noterons $G_{n'}$ à la place de $(G_{n'}, \Sigma_{n'})$ lorsqu'aucune confusion n'en résultera. La possibilité de répartir les faisceaux de Σ_n en deux espèces comme on le fait aux échelons inférieurs va résulter de la proposition suivante.

PROPOSITION 28. *Soit a et b deux réflexions distinctes perpendiculaires à un même élément u de Σ_n . Toute réflexion incidente avec a et b est aussi perpendiculaire à u .*

Montrons d'abord que u n'appartient pas à $\Phi(a, b)$. Désignons par $\Phi(a, b; u)$ le faisceau déterminé par a et b dans le système polaire $\Pi(u)$. C'est aussi l'intersection de $\Phi(a, b)$ et $\Pi(u)$. Si u appartenait à $\Phi(a, b)$, uab serait dans $\Phi(a, b; u)$; par suite, a et b seraient perpendiculaires (lemme prop. 11); comme l'élément uab commute avec a et b , il devrait coïncider avec l'une de ces deux réflexions, contrairement aux hypothèses.

Comme u n'appartient pas à $\Phi(a, b)$ et qu'il est perpendiculaire à a et b , on peut affirmer que tout élément de $\Phi(a, b)$ est perpendiculaire à u (lemme prop. 5). C.Q.F.D.

COROLLAIRE. *Tout faisceau de Σ_n coïncide avec un faisceau pris dans un certain système polaire.*

Par suite, toutes les propriétés que nous avons énoncées au sujet des faisceaux dans $\Sigma_{n'}$, où n' varie de 2 à $n-1$, sont vraies dans Σ_n , et nous pouvons faire usage des désignations qui les concernent. Par ailleurs, l'espèce d'un faisceau est invariante vis-à-vis des automorphismes intérieurs de G_n .

5.2. Nous qualifierons de *close* toute partie de l'ensemble Σ engendrant un *RI*-groupe (G, Σ) qui est fermée pour la relation d'incidence. La partie vide de Σ et les parties de Σ réduites à un seul élément sont considérées comme closes. Les parties closes C de Σ qui comportent plus d'un élément sont caractérisées par le fait suivant: si a et b sont deux éléments distincts de C , alors $\Phi(a, b)$ est contenu dans C . Ainsi Σ est close, par exemple. L'intersection d'une famille de parties closes de Σ est close. La *clôture* $C(F)$ d'une partie F de Σ est l'intersection des parties closes de Σ qui contiennent F . En particulier, nous désignerons

par $C(a_1, a_2, \dots, a_r)$ la clôture d'un ensemble fini d'éléments a_1, a_2, \dots, a_r de Σ . La proposition 28 peut s'énoncer en disant que, dans Σ_n , tout système polaire est clos.

Nous allons admettre le fait suivant

(B) Quel que soit s dans $\Sigma_{n'}$, la clôture de $\Pi(s) \cup \{s\}$ est confondue avec $\Sigma_{n'}$, où $2 \leq n' \leq n-1$.

Le fait est manifestement vrai pour $n' = 2$. Dans ce cas, en effet, $\Pi(s)$ est un faisceau de deuxième classe. La clôture de $\Pi(s) \cup \{s\}$ contient évidemment tous les faisceaux de première classe auxquels appartient s , et par suite tous les éléments de Σ_2 qui coupent s . Comme tout élément de Σ_2 appartient à un faisceau déterminé par deux éléments de Σ_2 coupant s , $\Pi(s) \cup \{s\}$ est confondu avec Σ_2 .

PROPOSITION 29. *L'intersection des systèmes polaires $\Pi(a)$ et $\Pi(b)$ de deux éléments sécants a et b de Σ_n est un système polaire dans $\Pi(a)$ et dans $\Pi(b)$.*

Comme a et b se coupent, il existe dans $\Phi(a, b)$ un élément c perpendiculaire à a . En vertu de la proposition 28, tout élément perpendiculaire à a et b l'est aussi à a et c , et réciproquement. L'ensemble des éléments de Σ_n perpendiculaires à a et c est manifestement un système polaire dans $\Pi(a)$. Il en est évidemment de même dans $\Pi(b)$. C.Q.F.D.

PROPOSITION 30. *La condition nécessaire et suffisante pour que deux éléments de Σ_n soient parallèles est que leurs systèmes polaires coïncident.*

Procédons par récurrence. Admettons que la proposition est vraie aux échelons inférieurs à n . Nous savons qu'elle l'est à l'échelon 2.

Soit a et b deux éléments parallèles de Σ_n . Il existe une réflexion s perpendiculaire à a et b . Dans $\Pi(s)$, a et b sont parallèles, et l'hypothèse de récurrence que nous venons d'énoncer permet d'affirmer que tout élément de $\Pi(s)$ perpendiculaire à a l'est aussi à b . Donc l'ensemble des réflexions perpendiculaires

à a et b contient s ainsi que le système polaire de s dans $\Pi(a)$. Or il résulte de la proposition 28 que l'intersection des systèmes polaires de a et b est close. On peut alors déduire de l'hypothèse de récurrence (B) que cette intersection se confond avec $\Pi(a)$. Par raison de symétrie $\Pi(a)$ et $\Pi(b)$ coïncident.

Réciproquement, deux réflexions a et b dont les systèmes polaires coïncident sont parallèles, en vertu de la proposition 29.

C.Q.F.D.

PROPOSITION 31. *Soit a et s deux réflexions non perpendiculaires dans Σ_n . La clôture de $\Pi(s) \cup \{a\}$ est Σ_n .*

Montrons d'abord que la clôture de $\Pi(s) \cup \{s\}$ est Σ_n . Prenons dans Σ_n un élément quelconque u , que l'on peut supposer distinct de s , sans restriction. Il existe dans $\Pi(s)$ un élément v perpendiculaire à u . Soit m un élément bissecteur de s et v ; il appartient à la clôture de $\Pi(s) \cup \{s\}$. D'autre part, la réflexion mum est distincte de m , car m , qui n'est pas perpendiculaire à v , est distinct de u . De plus, mum est perpendiculaire à $s = mvm$. Comme u appartient au faisceau $\Phi(m, mum)$, il est contenu dans la clôture de $\Pi(s) \cup \{s\}$.

Soit maintenant une réflexion a non perpendiculaire à s . Lorsque a est parallèle à s , les systèmes polaires de a et s coïncident et il résulte de ce qui précède que la clôture de $\Pi(s) \cup \{a\}$ est Σ_n . Lorsque a coupe s , il existe dans $\Phi(a, s)$ un élément b perpendiculaire à s et distinct de a , par hypothèse. Le faisceau $\Phi(a, b)$, qui contient s , est lui-même contenu dans la clôture de $\Pi(s) \cup \{a\}$. Il en résulte immédiatement que la clôture de $\Pi(s) \cup \{a\}$ contient celle de $\Pi(s) \cup \{s\}$ et que, par suite, elle se confond avec Σ_n .

C.Q.F.D.

Avant de passer aux propositions suivantes, formulons une remarque. Dans Σ_2 , il existe des couples de réflexions perpendiculaires. Admettons que l'on puisse trouver $n-1$ réflexions deux à deux perpendiculaires dans Σ_{n-1} . Soit s un élément quelconque de Σ_n . Il existe dans $\Pi(s)$ $n-1$ réflexions perpendiculaires deux à deux. Nous pouvons donc affirmer qu'il est possible de trouver n réflexions deux à deux perpendiculaires dans Σ_n , l'une d'elles étant d'ailleurs arbitrairement choisie. Nous pouvons compléter ce résultat.

PROPOSITION 32. *Dans Σ_n , l'intersection des systèmes polaires de $(n-1)$ réflexions perpendiculaires deux à deux est un faisceau de deuxième espèce.*

L'affirmation est banale à l'échelon 2. Elle est vraie à l'échelon 3, où elle découle de la proposition 29. Admettons donc qu'elle a été démontrée à l'échelon $n-1$. Désignons par a_1, a_2, \dots, a_{n-1} $n-1$ éléments de Σ_n perpendiculaires deux à deux. L'intersection A_j de $\Pi(a_j)$ et $\Pi(a_{n-1})$, où $j = 1, 2, \dots, n-2$, est un système polaire dans $\Pi(a_{n-1})$ en vertu de la proposition 29. L'intersection des systèmes polaires $\Pi(a_i)$, où $i = 1, 2, \dots, n-1$, se confond avec celle des ensembles A_j , où $j = 1, 2, \dots, n-2$. Or cette dernière est un faisceau de deuxième espèce Φ'' dans $\Pi(a_{n-1})$ en vertu de l'hypothèse de récurrence. La conclusion découle du fait que Φ'' est aussi un faisceau de deuxième espèce dans Σ_n . C.Q.F.D.

COROLLAIRE. *La condition nécessaire et suffisante pour que deux réflexions soient parallèles dans Σ_n est que leurs systèmes polaires aient en commun $n-1$ éléments perpendiculaires deux à deux.*

PROPOSITION 33. *Dans Σ_n , l'intersection d'un faisceau de première espèce et d'un système polaire n'est pas vide.*

La proposition est vraie à l'échelon 2. Admettons qu'elle a été démontrée à l'échelon $n-1$, où $n > 2$ comme jusqu'ici. Soit Φ' un faisceau de première espèce et s un élément quelconque de Σ_n . Nous voulons prouver que l'intersection de Φ' et $\Pi(s)$ n'est pas vide. Remarquons d'abord que l'ensemble des réflexions perpendiculaires à chaque élément de Φ' est l'intersection des systèmes polaires de deux éléments distincts de Φ' . Or cette intersection n'est pas vide (prop. 29).

Lorsque Φ' est entièrement perpendiculaire à s , il n'y a rien à démontrer. Dans le cas contraire, il existe une réflexion u perpendiculaire à tous les éléments de Φ' et coupant s (prop. 30). L'intersection de $\Pi(s)$ et $\Pi(u)$ est un système polaire dans $\Pi(u)$. Comme Φ' est contenu dans $\Pi(u)$, l'hypothèse de récurrence permet d'affirmer que l'intersection de Φ' , $\Pi(s)$ et $\Pi(u)$ n'est pas vide, d'où la conclusion. C.Q.F.D.

COROLLAIRE. *Lorsqu'un faisceau de première espèce n'est pas entièrement perpendiculaire à une réflexion s , il contient un élément perpendiculaire à s et un seul.*

PROPOSITION 34. *Le normalisateur $N(s)$ d'une réflexion s de Σ_n dans G_n est le R-groupe engendré par s et le système polaire $\Pi(s)$.*

L'ensemble des éléments de $N(s)$ de dimension 0 dans G_n est $\Pi(s) \cup \{s\}$. Prenons dans $N(s)$ un élément ab de dimension 1 dans G_n , avec $a, b \in \Sigma_n$. Lorsque s appartient au faisceau $\Phi(a, b)$, on peut écrire $ab = s.sab$; comme ab commute avec s , la réflexion sab est dans $\Pi(s)$. Considérons alors le cas où s n'appartient pas à $\Phi(a, b)$. Comme ab commute avec s , la réflexion sas est dans $\Phi(a, b)$, car $sas.ab = sbs \in \Sigma_n$; d'autre part, elle est incidente avec a et s . Si sas était distinct de a , s serait dans $\Phi(a, b)$ contrairement à l'hypothèse. Par suite, a est perpendiculaire à s , et b aussi.

Procédons par récurrence sur la dimension dans G_n des éléments de $N(s)$. Soit X un élément de $N(s)$ de dimension n' supérieure à 1 dans G_n , et admettons que l'on a prouvé que tout élément de $N(s)$ de dimension positive n'' inférieure à n' dans G_n peut être mis sous la forme d'un produit de $n''+1$ éléments de $\Pi(s) \cup \{s\}$. Ecrivons X sous la forme $abcY$, où $a, b, c \in \Sigma_n$ et où Y est un élément de dimension $n'-3$ dans G_n . Les réflexions a, b et c ne sont pas parallèles dans leur ensemble. On peut même admettre que a et b se coupent, car dans le cas contraire on remplacerait abc par $ac.cbc$. Le faisceau de première espèce $\Phi(a, b)$ contient au moins un élément d perpendiculaire à s (prop. 33). On peut alors poser $X = d.dab.c.Y = dZ$, où Z est un élément de $N(s)$ de dimension $n'-1$ dans G_n . En vertu de l'hypothèse de récurrence, Z peut être obtenu en formant le produit de n' éléments de $\Pi(s) \cup \{s\}$. Donc X peut être considéré comme le produit de $n'+1$ éléments de $\Pi(s) \cup \{s\}$. C.Q.D.F.

COROLLAIRE 1. *Tout élément de $N(s)$ de dimension r dans G_n peut se mettre sous la forme d'un produit de $r+1$ éléments de $\Pi(s) \cup \{s\}$.*

Cela revient à dire que la dimension d'un élément de $N(s)$ est la même dans le R -groupe G_n et dans le R -groupe $N(s)$. A priori, si (G, Σ) et (G', Σ') sont deux R -groupes tels que Σ' soit contenu dans Σ , la dimension d'un élément X de G' calculée dans G peut être inférieure à sa dimension dans G' .

La réflexion s n'appartient pas au groupe polaire $\pi(s)$, car les éléments de $\pi(s)$ commutent avec chaque réflexion parallèle à s , ce qui n'est pas le cas de s . Donc $\pi(s)$ est un sous-groupe d'indice 2 dans $N(s)$.

COROLLAIRE 2. *Tout élément d'un groupe polaire $\pi(s)$ a même dimension dans $\pi(s)$ et dans G_n .*

5.3. Dans $G_{n'}$, où $2 \leq n' \leq n$, nous appellerons *conversion* tout élément égal au produit de n' réflexions perpendiculaires deux à deux. Un tel élément est évidemment involutif. A l'échelon 2, les conversions se confondent avec les demi-tours. D'autre part, nous appellerons *translation* le produit de deux éléments parallèles de $\Sigma_{n'}$.

Nous admettrons que les faits suivants ont été établis pour tous les échelons n' allant de 2 à $n-1$:

- (C) $G_{n'}$ ne contient pas d'élément involutif de dimension n' .
- (D) Dans $G_{n'}$, l'ensemble des conversions se confond avec celui des éléments involutifs de dimension $n'-1$.
- (E) L'ensemble des éléments de $(G_{n'}, \Sigma_{n'})$ qui transforment chaque élément de $\Sigma_{n'}$ en un élément parallèle est formé des conversions et des translations de $G_{n'}$.

Tous ces faits ont été vérifiés dans G_2 . Il résulte immédiatement de l'hypothèse (D), de la proposition 34 et de son corollaire 1 qu'à l'échelon n toute conversion est de dimension $n-1$.

PROPOSITION 35. *Le R -groupe G_n est de dimension n .*

Nous savons que G_2 est de dimension 2. Admettons qu'il est prouvé que G_{n-1} est de dimension $n-1$.

Prenons une réflexion s dans Σ_n . En vertu de l'hypothèse de récurrence, il existe dans le groupe polaire $\pi(s)$ un élément A de

dimension $n-1$. L'élément sA est manifestement de dimension n dans le normalisateur $N(s)$ de s . Il résulte du corollaire 1 de la proposition 34 que la dimension de sA est aussi n dans G_n . Par suite, G_n est de dimension n au moins. D'autre part, nous observons que tout élément de dimension n dans $N(s)$ est contenu dans la classe $s.\pi(s)$.

Soit X un élément quelconque de G_n . Plaçons-nous dans le cas où il existe une réflexion u telle que $v = X^{-1}uX$ coupe u . Désignons par m l'un des éléments bissecteurs de u et v , et par a l'élément de $\Phi(u, v)$ perpendiculaire à v . On peut poser $X = mY$, où Y appartient au normalisateur $N(v)$ de v . Si Y est de dimension inférieure à n , X est de dimension n , au plus. Si Y est de dimension n , il peut se mettre sous la forme $Y = vaZ$, où Z est de dimension $n-2$ dans $\pi(v)$. Comme les réflexions m, v et a sont incidentes, l'élément $X = mva$. Z est de dimension $n-1$.

Il reste à considérer le cas où la transformation de G_n associée à X envoie toute réflexion sur une réflexion parallèle. Prenons une réflexion c et soit $d = X^{-1}cX$. Lorsque c et d sont confondus, X est dans le normalisateur de c et sa dimension n'excède pas n . Lorsque c et d sont distincts, désignons par e leur élément bissecteur et posons $X = eU$, où U est dans le normalisateur de d . Les systèmes polaires de c, d et e coïncident. Par suite, les restrictions au système polaire $\Pi(d)$ des automorphismes intérieurs de G_n associés à X et à U sont identiques. Il résulte de l'hypothèse générale de récurrence (E) que U est de l'une des formes V ou dV , où V est une conversion ou une translation dans $\pi(d)$. A cause de l'hypothèse (D), la dimension de U ne dépasse pas $n-1$, et celle de X ne dépasse pas n .

De tout cela il résulte que G_n est de dimension n . C.Q.F.D.

Pour tout échelon n' allant de 2 à n , nous appellerons *gerbe associée à la conversion S* et nous noterons $\Gamma(S)$ l'ensemble des éléments de $\Sigma_{n'}$ qui commutent avec S . Un tel ensemble contient plus d'un élément car si $S = a_1a_2 \dots a_{n'}$, où les a_i sont des réflexions perpendiculaires deux à deux, $\Gamma(S)$ contient $a_1, a_2, \dots, a_{n'}$. A l'échelon 2, la gerbe $\Gamma(S)$ est le faisceau de première classe autour duquel opère le demi-tour S (coroll. 2, prop. 17).

PROPOSITION 36. *Dans Σ_n , une gerbe ne contient pas d'éléments parallèles distincts.*

Soit $\Gamma(S)$ la gerbe associée à une conversion S de G_n , et soit a un élément de $\Gamma(S)$. S appartient au normalisateur de a . Comme il n'existe pas d'élément involutif de dimension $n-1$ dans le groupe polaire $\pi(a)$ (hypothèse (C)), S est de la forme $S = aS'$, où S' est une conversion dans $\pi(a)$ (hypothèse (D)).

Prenons une réflexion a' parallèle à a , mais distincte de a . Comme S' commute avec a' :

$$Sa'S = aS'.a'.S'a = aa'a \neq a'$$

Par suite, a' n'appartient pas à $\Gamma(S)$.

C.Q.F.D.

COROLLAIRE. *Toute conversion S de G_n peut se mettre sous la forme $S = aS'$, où a est un élément arbitrairement choisi dans la gerbe $\Gamma(S)$, et où S' est une conversion dans $\pi(a)$.*

PROPOSITION 37. *Toute gerbe de Σ_n est close.*

Prenons deux éléments distincts a et b dans la gerbe $\Gamma(S)$ associée à une conversion S . En vertu de la proposition 36, le faisceau $\Phi(a, b)$ est de première espèce; il contient donc un élément bien déterminé c perpendiculaire à a . Comme la transformation par S conserve l'incidence et la perpendicularité dans Σ_n , et comme S commute avec a et b , S commute aussi avec c . Donc c est dans $\Gamma(S)$. En vertu du corollaire de la proposition 36, on pose $S = aS'$, où S' est une conversion dans $\pi(a)$. S' commute avec c et sa dimension dans G_n est $n-2$. On peut donc mettre S' sous la forme $S' = cS''$, où S'' est dans le groupe polaire associé à c dans le système polaire $\Pi(a)$. S'' est un produit de réflexions perpendiculaires à la fois à a et à c , et par suite perpendiculaires à tous les éléments du faisceau $\Phi(a, c)$. Ainsi S'' commute avec chaque élément de $\Phi(a, c)$. Il en est de même d'ailleurs de ac , car a et c sont perpendiculaires. Il s'ensuit que $S = acS''$ commute avec chaque élément du faisceau $\Phi(a, c)$. Donc $\Phi(a, b)$, qui est confondu avec $\Phi(a, c)$, est contenu dans $\Gamma(S)$.

C.Q.F.D.

PROPOSITION 38. *Quelles que soient la gerbe Γ et la réflexion a dans Σ_n , Γ contient un élément parallèle à a et un seul.*

La proposition est vraie à l'échelon 2. Admettons qu'elle a été établie à l'échelon $n-1$.

Prenons deux éléments distincts u et v dans la gerbe Γ . Le faisceau de première classe $\Phi(u, v)$ est contenu dans Γ et il contient une réflexion s perpendiculaire à la réflexion donnée a . Désignons par S la conversion à laquelle est attachée Γ . On peut poser $S = sS'$, où S' est une conversion dans le groupe polaire $\pi(s)$. L'intersection du système polaire $\Pi(s)$ et de la gerbe Γ est l'ensemble des éléments de $\Pi(s)$ qui commutent avec S' . C'est donc une gerbe Γ_s dans $\Pi(s)$. En vertu de l'hypothèse de récurrence, Γ_s contient un élément a' parallèle à a . Ce qui démontre l'existence dans Γ d'une réflexion parallèle à a . L'unicité de cette réflexion découle de la proposition 36. C.Q.F.D.

COROLLAIRE 1. *L'intersection d'une gerbe et d'un système polaire de Σ_n est une gerbe dans le système polaire.*

En effet, comme on l'a vu en cours de démonstration, l'intersection d'une gerbe Γ et du système polaire d'un élément s de Γ est une gerbe dans $\Pi(s)$. Or il résulte des propositions 30 et 38 que tout système polaire peut être déterminé par un élément convenablement choisi dans Γ .

COROLLAIRE 2. *Une gerbe ne contient pas d'autre gerbe qu'elle-même.*

En effet, soit Γ_1 et Γ_2 deux gerbes telles que $\Gamma_2 \subset \Gamma_1$. S'il existait dans Γ_1 un élément a non contenu dans Γ_2 , on pourrait trouver dans Γ_2 une réflexion a' parallèle à a et distincte de a , ce qui contredirait la proposition 38.

COROLLAIRE 3. *L'application $S \rightarrow \Gamma(S)$ définit une correspondance biunivoque entre l'ensemble des conversions et celui des gerbes dans G_n .*

Il suffit de montrer que deux conversions S_1 et S_2 déterminant la même gerbe Γ sont confondues. Le fait est vrai à l'échelon 2;

admettons donc qu'il l'est aussi à l'échelon $n-1$. Prenons un élément a dans Γ . On peut écrire $S_1 = aS'_1$ et $S_2 = aS'_2$, où S'_1 et S'_2 sont des conversions dans $\pi(a)$. L'intersection de Γ et du système polaire $\Pi(a)$ est une gerbe associée à la fois à S'_1 et à S'_2 dans $\Pi(a)$. En vertu de l'hypothèse de récurrence $S'_1 = S'_2$ et, par suite, $S_1 = S_2$.

PROPOSITION 39. *Soit a_1, a_2, \dots, a_n n réflexions perpendiculaires deux à deux dans Σ_n et soit S la conversion $a_1 a_2 \dots a_n$. Tout élément de la gerbe $\Gamma(S)$ peut se mettre sous la forme d'un produit d'éléments pris dans les faisceaux $\Phi(a_i, a_{i+1})$, avec $i = 1, 2, \dots, n-1$.*

La proposition est banale dans Σ_2 . Admettons qu'elle a été démontrée pour toutes les dimensions inférieures à n . Prenons dans $\Gamma(S)$ un élément x que nous pouvons supposer différent de a_1 , sans restriction. Soit b l'élément perpendiculaire à a_1 dans le faisceau de première espèce $\Phi(a_1, x)$; b appartient à la gerbe $\Gamma(S) \cap \Pi(a_1)$ de $\Pi(a_1)$. Si b est confondu avec a_2 , posons $y = a_2$. Sinon soit y l'un des éléments bissecteurs de b et a_2 . La réflexion y appartient à $\Gamma(S) \cap \Pi(a_1)$. En vertu de l'hypothèse de récurrence, elle peut être mise sous la forme d'un produit d'éléments pris dans les faisceaux $\Phi(a_i, a_{i+1})$, où $i = 2, 3, \dots, n-1$. Posons alors: $z = yxy$; cet élément appartient au faisceau:

$$y\Phi(a_1, x)y = y\Phi(a_1, b)y = \Phi(a_1, a_2).$$

La proposition résulte du fait que $x = yzy$. C.Q.F.D.

5.4. Soit $\Gamma(S)$ la gerbe associée à une conversion S de G_n et soit a une réflexion quelconque. On voit facilement que aSa est une conversion et que la gerbe qui lui est attachée n'est autre que $a\Gamma(S)a$. Nous nous proposons d'examiner les transformations ainsi définies dans l'ensemble des gerbes de Σ_n . Mais auparavant établissons quelques lemmes.

LEMME 1. *L'intersection de deux gerbes n'est pas vide.*

Il en est ainsi pour la dimension 2. Admettons que le fait est prouvé pour la dimension $n-1$. Soit Γ et Γ' deux gerbes dans

Σ_n . Prenons une réflexion s . Les intersections respectives de Γ et Γ' avec le système polaire $\Pi(s)$ sont des gerbes dans $\Pi(s)$. Leur intersection n'est pas vide, par hypothèse. Il en est donc de même de celle de Γ et Γ' . C.Q.F.D.

LEMME 2. *Soit Γ et Γ' les gerbes attachées dans Σ_n à deux conversions distinctes S et S' . Dans l'intersection de Γ et Γ' , il existe $n-1$ réflexions perpendiculaires deux à deux: a_1, a_2, \dots, a_{n-1} . De plus, on peut écrire:*

$$S = a_1 a_2 \dots a_{n-1} \cdot b; \quad S' = a_1 a_2 \dots a_{n-1} \cdot b',$$

où b et b' sont deux réflexions parallèles distinctes, perpendiculaires à tous les a_i et situées dans Γ et Γ' , respectivement.

Tout cela est banal dans le cas de la dimension 2, où il convient toutefois de remarquer que la condition de perpendicularité des a_i disparaît. Admettons que le lemme est établi pour la dimension $n-1$. En vertu du lemme 1, prenons un élément a_1 dans $\Gamma \cap \Gamma'$. On peut écrire $S = a_1 S_1$ et $S' = a_1 S'_1$, où S_1 et S'_1 sont deux conversions distinctes dans le groupe polaire $\pi(a_1)$. Les ensembles $\Gamma \cap \Pi(a_1)$ et $\Gamma' \cap \Pi(a_1)$ sont les gerbes respectivement associées à S_1 et S'_1 dans $\Pi(a_1)$. En vertu de l'hypothèse de récurrence, on peut trouver dans $\Gamma \cap \Gamma' \cap \Pi(a_1)$ $n-2$ éléments a_2, a_3, \dots, a_{n-1} perpendiculaires deux à deux quand $n > 3$. De plus, on peut écrire:

$$S_1 = a_2 a_3 \dots a_{n-1} \cdot b; \quad S'_1 = a_2 a_3 \dots a_{n-1} \cdot b',$$

où b et b' sont deux réflexions parallèles distinctes, perpendiculaires à tous les $a_i, i = 1, 2, \dots, n-1$, et situées dans $\Gamma \cap \Pi(a_1)$ et $\Gamma' \cap \Pi(a_1)$, respectivement. La conclusion en découle immédiatement. C.Q.F.D.

PROPOSITION 40. *Soit Γ et Γ' deux gerbes distinctes dans Σ_n . Il existe une réflexion u et une seule par laquelle Γ est transformée en Γ' .*

Désignons par S et S' les conversions auxquelles sont attachées Γ et Γ' , et reprenons les éléments figurant dans l'énoncé du lemme 2. Il résulte en particulier de ce lemme que b et b' ont

un élément bissecteur unique u qui est parallèle à b et b' ; u est donc perpendiculaire à chaque élément a_i . Par suite, $S' = uSu$ et $\Gamma' = u\Gamma u$.

Établissons l'unicité de l'élément considéré. Prenons un élément a dans $\Gamma \cap \Gamma'$. Il est distinct de b qui n'est pas dans Γ' . Comme a commute avec S et S' , il commute avec $SS' = bb'$. Si bab était différent de a , les réflexions b et b' seraient des éléments bissecteurs distincts de a et bab : ce serait absurde car b et b' sont parallèles. Par suite, a est perpendiculaire à b . Il commute donc avec $a_1 a_2 \dots a_{n-1}$. Réciproquement, toute réflexion perpendiculaire à b qui commute avec $a_1 a_2 \dots a_{n-1}$ appartient à $\Gamma \cap \Gamma'$. On peut donc affirmer que $\Gamma \cap \Gamma'$ est la gerbe déterminée dans $\Pi(b)$ par $\Gamma \cap \Pi(b)$, et aussi par $\Gamma' \cap \Pi(b)$. Cet ensemble contient les éléments a_i . Il en résulte que toute réflexion perpendiculaire à chacun des éléments de $\Gamma \cap \Gamma'$ est parallèle à b (coroll. prop. 32). La gerbe Γ en contient une seule, qui est b ; Γ' en contient également une seule, b' .

Soit v une réflexion par laquelle Γ est transformée en Γ' . La transformation par v laisse $\Gamma \cap \Gamma'$ invariant dans son ensemble. Elle envoie donc une réflexion perpendiculaire à tous les éléments de $\Gamma \cap \Gamma'$ sur une réflexion ayant la même propriété. Par conséquent, elle applique b sur b' . Il s'ensuit que v coïncide avec l'élément bissecteur u de b et b' . C.Q.F.D.

Convenons d'appeler *élément médiateur* de deux gerbes distinctes Γ et Γ' la réflexion u telle que $\Gamma' = u\Gamma u$.

COROLLAIRE 1. *L'intersection de deux gerbes distinctes Γ et Γ' est une gerbe dans le système polaire attaché à l'élément médiateur de Γ et Γ' .*

COROLLAIRE 2. *Le produit de deux conversions est une translation. Réciproquement, toute translation peut être considérée comme le produit de deux conversions dont l'une est choisie librement.*

Lorsque les conversions S et S' sont distinctes, nous avons vu en démontrant la proposition précédente que SS' est une translation. Lorsque $S = S'$, le produit SS' est la translation banale I .

Réciproquement, soit une translation $T = cc'$, où c et c' sont deux réflexions parallèles, et soit S une conversion arbitraire. Prenons dans la gerbe $\Gamma(S)$ l'élément b parallèle à c . On peut alors écrire: $S = a_1 a_2 \dots a_{n-1} . b$, où les a_i sont $n-1$ éléments perpendiculaires deux à deux dans $\Gamma(S) \cap \Pi(b)$ (coroll. prop. 36). Posons $b' = bcc'$ et $b'' = cc'b$; les réflexions b' et b'' sont parallèles à b . Les éléments $S' = a_1 a_2 \dots a_{n-1} . b'$ et $S'' = a_1 a_2 \dots a_{n-1} . b''$ sont manifestement des conversions. Et l'on peut écrire:

$$T = cc' = SS' = S'' S. \quad \text{C.Q.F.D.}$$

PROPOSITION 41. *La dimension d'un élément involutif X de G_n n'excède pas $n-1$; cette valeur n'est atteinte que lorsque X est une conversion.*

Si X laisse invariantes toutes les gerbes de Σ_n , prenons deux gerbes distinctes Γ_1 et Γ_2 . Il résulte de la proposition 40 que X commute avec l'élément médiateur de Γ_1 et Γ_2 . Si X transforme une gerbe Γ en une autre gerbe Γ' , il commute avec l'élément médiateur de Γ et Γ' . Dans tous les cas, il existe dans Σ_n une réflexion a qui commute avec X . Quand X est dans le groupe polaire $\pi(a)$, sa dimension ne dépasse pas $n-2$ (hypothèse de récurrence (C), n° 5.3). Quand X n'est pas dans $\pi(a)$, il est de la forme $X = aY$, où Y appartient à $\pi(a)$. On peut affirmer que Y est un élément involutif de $\pi(a)$ dont la dimension égale $n-2$ au plus, cette valeur n'étant atteinte que lorsque Y est une conversion dans $\pi(a)$ (hypothèse de récurrence (D)). Par suite, la dimension de X ne dépasse pas $n-1$ et n'atteint cette valeur que lorsque X est une conversion dans G_n . C.Q.F.D.

PROPOSITION 42. *Soit r gerbes et $n-r$ systèmes polaires dans Σ_n , où $1 \leq r \leq n$. L'intersection de ces n ensembles n'est pas vide.*

La proposition est vraie, pour la dimension 2. Admettons qu'elle est établie pour la dimension $n-1$. Dans Σ_n , soit C_i , où $i = 1, 2, \dots, n$, les n ensembles considérés que l'on peut supposer distincts, sans restriction; nous admettrons que C_1 est une gerbe. Lorsque C_n est le système polaire $\Pi(s)$ d'une réflexion s , considérons les ensembles $C'_k = C_k \cap C_n$, où $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Chacun d'eux est une gerbe ou un système polaire dans $\Pi(s)$, C'_1 étant d'ailleurs une gerbe. Il résulte de l'hypothèse de récurrence que l'intersection des C'_k n'est pas vide. Or cette intersection coïncide avec celle des ensembles C_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

Lorsque C_n est une gerbe, soit u l'élément médiateur de C_1 et C_n . D'après le corollaire 1 de la proposition 40, $C_1 \cap \Pi(u)$ et $C_n \cap \Pi(u)$ sont confondus avec $C_1 \cap C_n$, qui est une gerbe dans $\Pi(u)$. Les ensembles $C''_k = C_k \cap \Pi(u)$, où $k = 1, 2, \dots, n-1$, sont des gerbes et des systèmes polaires dans $\Pi(u)$, le premier d'entre eux étant une gerbe. En vertu de l'hypothèse de récurrence, l'intersection de ces ensembles — qui coïncide avec celle des ensembles C_i , $i = 1, 2, \dots, n$ — n'est pas vide. C.Q.F.D.

COROLLAIRE. *Quand $n = 3$, l'intersection de deux faisceaux d'une même gerbe n'est pas vide.*

En effet, soit Φ et Φ' deux faisceaux contenus dans une même gerbe Γ de Σ_3 . Comme Φ est de première espèce, il peut être déterminé par deux éléments perpendiculaires de Γ . Il existe dans Σ_3 une réflexion s perpendiculaire à tous les éléments de Φ (prop. 32), et Φ est l'intersection de Γ et $\Pi(s)$. De même, il existe une réflexion s' telle que Φ' soit l'intersection de Γ et $\Pi(s')$. L'intersection de Φ et Φ' se confond avec celle de Γ , $\Pi(s)$ et $\Pi(s')$, qui n'est pas vide. C.Q.F.D.

D'après la proposition 42, l'intersection de n gerbes de Σ_n n'est pas vide. Il arrive que cette intersection se réduise à un seul élément. Pour le voir, prenons n réflexions a_i , $i = 1, 2, \dots, n-1, n$, perpendiculaires deux à deux, ainsi que $n-1$ réflexions a'_j , $j = 1, 2, \dots, n-1$, telles que pour toute valeur de l'indice j , a_j et a'_j soient parallèles et distinctes. Considérons la conversion $S = a'_1 a'_2 \dots a'_{n-1} a_n$ et soit Γ la gerbe associée à S . Construisons les gerbes $\Gamma_j = a_j \Gamma a_j$, $j = 1, 2, \dots, n-1$. L'ensemble $\Gamma \cap \Gamma_j$ est confondu avec $\Gamma \cap \Pi(a_j)$. Par suite, l'intersection des gerbes $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{n-1}$ se confond avec celle de Γ et des systèmes polaires $\Pi(a_j)$, $j = 1, 2, \dots, n-1$. Il résulte des propositions 32 et 38 que cette dernière intersection se réduit à un élément unique, qui n'est autre que a_n . Il découle de l'axiome de bisection que tout élément s de Σ_n peut être déterminé par l'intersection de n gerbes bien choisies dans Σ_n . D'autre part, si

l'on prend dans Σ_n une réflexion a'_n parallèle à a_n et distincte d'elle, une gerbe Γ_n contenant a'_n ne contient pas a_n . Par conséquent, il est possible de trouver dans Σ_n $n+1$ gerbes disjointes dans leur ensemble.

PROPOSITION 43. *Le normalisateur $N(S)$ d'une conversion S de G_n est confondu avec le R -groupe engendré par la gerbe $\Gamma(S)$ et avec le groupe de stabilité de $\Gamma(S)$. En tant que R -groupe engendré par $\Gamma(S)$, sa dimension égale $n-1$.*

Désignons par $g(S)$ le R -groupe engendré par la gerbe $\Gamma(S)$ et par $\gamma(S)$ le groupe de stabilité de $\Gamma(S)$ dans G_n . On voit immédiatement que $g(S)$ est contenu dans $N(S)$, car il est engendré par une partie de $N(S)$, soit $\Gamma(S)$. D'autre part, $N(S)$ est contenu dans $\gamma(S)$. Prenons en effet un élément X quelconque dans $N(S)$ et une réflexion a quelconque dans $\Gamma(S)$. Comme $\Gamma(S)$ est contenue dans $N(S)$, $X^{-1}aX$ est une réflexion commutant avec S , tout comme XaX^{-1} . Donc $X^{-1}.\Gamma(S).X = \Gamma(S)$ et X appartient à $\gamma(S)$.

Montrons que $\gamma(S)$ est contenu dans $g(S)$. Procédons par récurrence. Le fait est vrai dans G_2 (prop. 17); admettons qu'il l'est pour la dimension $n-1$. Prenons alors un élément Y dans $\gamma(S)$ et une réflexion b dans la gerbe $\Gamma(S)$. L'élément $c = Y^{-1}bY$ est dans $\Gamma(S)$. Lorsque b et c sont confondus, Y laisse invariante la gerbe $\Gamma(S) \cap \Pi(c)$ dans $\Pi(c)$. Des deux éléments Y et cY , l'un appartient au groupe polaire $\pi(c)$. Il résulte de l'hypothèse de récurrence que cet élément est le produit d'un certain nombre de réflexions prises dans $\Gamma(S) \cap \Pi(c)$. Par suite, Y est bien dans $g(S)$. Lorsque b et c sont distincts, prenons un élément bissecteur u de b et c . Comme u est dans $\Gamma(S)$, $Z = uY$ est dans $\gamma(S)$ et il commute avec c . On montre comme précédemment que Z et, par suite, $Y = uZ$ appartiennent à $g(S)$.

Montrons maintenant que, comme R -groupe engendré par $\Gamma(S)$, $N(S)$ est de dimension $n-1$. L'affirmation est vraie dans G_2 . Admettons qu'on l'a prouvée pour la dimension $n-1$. Le R -groupe $N(S)$ est au moins de dimension $n-1$, car il contient la conversion S qui est de dimension $n-1$ dans G_n . Prenons alors dans $N(S)$ un élément $A = a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1}$, où les a_i sont dans $\Gamma(S)$. Montrons

que A peut se mettre sous forme d'un produit de moins de $n+1$ éléments pris dans $\Gamma(S)$. C'est évidemment le cas lorsque $a_2 = a_3$. Sinon prenons un élément b_2 perpendiculaire à a_1 dans le faisceau de première espèce $\Phi(a_2, a_3)$, et posons $a'_3 = b_2 a_2 a_3$. On a alors $A = a_1 b_2 a'_3 a_4 \dots a_n a_{n+1}$. Admettons que l'on ait mis A sous la forme :

$$A = a_1 b_2 b_3 \dots b_{k-1} a'_k a_{k+1} \dots a_n a_{n+1},$$

où les b_i ($i = 1, 2, \dots, k-1$) sont dans $\Gamma(S) \cap \Pi(a_1)$, et $a'_k \in \Gamma(S)$. Lorsque $a'_k = a_{k+1}$, la démonstration est achevée. Dans le cas contraire, on prend un élément b_k perpendiculaire à a_1 dans le faisceau de première espèce $\Phi(a'_k, a_{k+1})$; on pose $a'_{k+1} = b_k a'_k a_{k+1}$. Il résulte de là que l'on peut écrire :

$$A = a_1 b_2 b_3 \dots b_n e = b_2 b_3 \dots b_n a_1 e,$$

où les b_i sont des éléments de $\Gamma(S) \cap \Pi(a_1)$, et e est dans $\Gamma(S)$. Lorsque $a_1 = e$, la démonstration est achevée. Dans le cas contraire, on prend l'élément d_n perpendiculaire à a_1 dans le faisceau de première espèce $\Phi(a_1, e)$. Dans $\Pi(a_1)$, la gerbe $\Gamma(S) \cap \Pi(a_1)$ engendre un R -groupe de dimension $n-2$, en vertu de l'hypothèse de récurrence. Comme les réflexions b_i ainsi que d_n appartiennent à $\Gamma(S) \cap \Pi(a_1)$, on peut trouver $n-2$ éléments d_2, d_3, \dots, d_{n-1} dans ce même ensemble, tels que $b_2 b_3 \dots b_n = d_2 d_3 \dots d_{n-1} d_n$. D'où :

$$A = d_2 d_3 \dots d_{n-1} \cdot d_n a_1 e.$$

Comme $d_n a_1 e$ est dans $\Gamma(S)$, A est de dimension $n-2$ au plus. Il en résulte que le R -groupe $N(S)$ engendré par $\Gamma(S)$ ne contient pas d'élément de dimension supérieure à $n-1$. Par suite, il est de dimension $n-1$. C.Q.F.D.

COROLLAIRE. *Quand $n = 3$, le normalisateur d'une conversion est un groupe de type elliptique plan.*

Cela résulte de ce qui précède, du corollaire de la proposition 42 et de la définition donnée au n° 2.1.

Il est clair qu'à tout élément X de G_n on peut associer une transformation de l'ensemble des gerbes définie par $\Gamma \rightarrow X^{-1} \Gamma X$.

Pour simplifier, nous dirons que X laisse fixe la gerbe Γ lorsque $X^{-1}\Gamma X = \Gamma$. Montrons que le groupe des transformations ainsi définies est isomorphe à G_n . Pour cela, nous établirons un fait un peu plus précis.

PROPOSITION 44. *Le seul élément de G_n laissant fixes $n+1$ gerbes disjointes dans leur ensemble est l'élément neutre I .*

Le fait est vrai dans G_2 en vertu du corollaire 3 de la proposition 17. Admettons qu'il est établi pour la dimension $n-1$. Soit $\Gamma_i, i=1, 2, \dots, n, n+1, n+1$ gerbes de Σ_n disjointes dans leur ensemble. Désignons par u l'élément médiateur de Γ_n et Γ_{n+1} . Posons $\Gamma'_i = \Gamma_i \cap \Pi(u), i=1, 2, \dots, n+1$. Il est clair que $\Gamma'_n = \Gamma'_{n+1} = \Gamma_n \cap \Gamma_{n+1}$. Par suite, l'intersection des gerbes $\Gamma_i, i=1, 2, \dots, n, n+1$, est confondue avec celle des gerbes $\Gamma'_j, j=1, 2, \dots, n$, dans $\Pi(u)$, qui est donc vide.

Soit A un élément de G_n laissant fixes les $n+1$ gerbes $\Gamma_i, i=1, 2, \dots, n, n+1$. On voit que A commute avec la réflexion u et qu'il laisse fixes les gerbes $\Gamma'_j, j=1, 2, \dots, n$, dans $\Pi(u)$. Lorsque A est dans le groupe polaire $\pi(u)$, il est confondu avec I , en vertu de l'hypothèse de récurrence. Si A n'était pas dans $\pi(u)$, l'élément uA y serait; or uA laisse fixes les gerbes Γ'_j , dans $\Pi(u)$; par suite A serait confondu avec u , ce qui est exclu car la transformation par u envoie Γ_n sur Γ_{n+1} . La seule possibilité reste donc $A = I$. C.Q.F.D.

COROLLAIRE. *Soit n gerbes de Σ_n dont l'intersection se réduit à un seul élément a . Les seuls éléments de G_n laissant fixes ces n gerbes sont I et a .*

En effet, soit $\Gamma_i, i=1, 2, \dots, n$, les n gerbes considérées. Tout élément de G_n laissant fixes ces n gerbes appartient au normalisateur $N(a)$ de a . Comme les ensembles $\Gamma'_i = \Gamma_i \cap \Pi(a)$ sont n gerbes disjointes dans leur ensemble, dans $\Pi(a)$, le seul élément de $\pi(a)$ laissant fixe chacune des Γ'_i est I . Il en résulte que les seuls éléments de G_n laissant fixes les gerbes $\Gamma_i, i=1, 2, \dots, n$, sont I et a .

5.5. Nous allons parvenir à un théorème concernant la structure du groupe G_n . Mais auparavant, nous allons considérer les

translations de G_n . Lorsque $T = ba$, où a et b sont deux réflexions parallèles, nous convenons de dire que T est une translation de front a . Les translations de front a constituent dans G_n un sous-groupe abélien: ce sous-groupe coïncide avec celui des éléments propres du R -groupe engendré par le faisceau de deuxième espèce contenant a . Lorsque a parcourt Σ_n , le groupe des translations de front a parcourt une famille de sous-groupes conjugués dans G_n , tous isomorphes à l'un d'entre eux que nous désignerons par τ . Il va de soi que deux translations de même front ou de fronts perpendiculaires commutent.

PROPOSITION 45. *L'ensemble \mathcal{T}_n des translations de G_n constitue un sous-groupe distingué, abélien, isomorphe à τ^n .*

Bien que la démonstration de ces faits soit essentiellement analogue à celle des propositions 14 et 15, nous la retraçons brièvement ici. Soit T' et T'' deux translations quelconques prises dans G_n . Choisissons une conversion S ; il existe deux conversions bien déterminées S' et S'' telles que $T' = S'S$ et $T'' = S''S$ (coroll. 2, prop. 40). Par suite:

$$T' T''^{-1} = S' S'',$$

qui est une translation. Donc l'ensemble \mathcal{T}_n des translations de G_n est un sous-groupe de G_n . Comme les automorphismes intérieurs de G_n induisent dans Σ_n des transformations conservant le parallélisme, \mathcal{T}_n est distingué dans G_n .

On peut trouver n réflexions a_1, a_2, \dots, a_n perpendiculaires deux à deux, telles que $S = a_1 a_2 \dots a_n$. Dans la gerbe $\Gamma(S')$ attachée à la conversion S' considérée plus haut, il existe n éléments bien déterminés b_1, b_2, \dots, b_n , respectivement parallèles aux réflexions a_1, a_2, \dots, a_n , de sorte que $S' = b_1 b_2 \dots b_n$. Si l'on pose $T'_i = b_i a_i$, on voit que T' est le produit de n translations univoquement déterminées T'_i de front a_i , où $i = 1, 2, \dots, n$. De même, la translation T'' peut se mettre, d'une manière et d'une seule, sous la forme $T'' = T''_1 T''_2 \dots T''_n$, où T''_i est une translation de front a_i . Quelles que soient les valeurs de i et j , T'_i et T''_j commutent; alors:

$$T' T'' = T'_1 T''_1 \cdot T'_2 T''_2 \dots T'_n T''_n.$$

Par suite, \mathcal{T}_n est isomorphe au produit direct des n groupes de translations de fronts a_1, a_2, \dots, a_n . Il est donc abélien et isomorphe à τ^n . C.Q.F.D.

COROLLAIRE. Soit a_1, a_2, \dots, a_n n réflexions perpendiculaires deux à deux. Toute translation de G_n peut être représentée par un produit de réflexions parallèles à a_1, a_2, \dots, a_n , respectivement.

THÉORÈME 6. Le groupe G_n est le produit semi-direct du groupe des translations \mathcal{T}_n et du normalisateur dans G_n d'une conversion arbitrairement choisie.

Prenons une conversion S dans G_n et soit a une réflexion quelconque. Dans la gerbe $\Gamma(S)$ associée à S , il existe un élément a' parallèle à a , et un seul. Comme $a = aa'.a' = a'.a'a$, la réflexion a peut se mettre sous la forme d'un produit d'une réflexion bien déterminée a' prise dans $\Gamma(S)$ et d'une translation T qui dépend de l'ordre adopté pour les facteurs a' et T . Il découle de cela et du fait que le groupe \mathcal{T}_n est distingué dans G_n que tout élément X de G_n peut se mettre sous les deux formes suivantes:

$$X = X' T_1 = T_2 X',$$

où X' est dans le normalisateur $N(S)$ de S et où T_1 et T_2 sont des translations. Les éléments X', T_1 et T_2 sont univoquement déterminés par X , car $N(S)$ ne contient aucune translation non banale. En effet, si T est une translation de front b dans $N(S)$, il existe dans $\Gamma(S)$ une réflexion c parallèle à b . La réflexion cT est parallèle à b et elle commute avec S . Par suite $T = I$.

C.Q.F.D.

PROPOSITION 46. Les seuls éléments de G_n qui transforment chaque réflexion en une réflexion parallèle sont les conversions et les translations.

Désignons par E l'ensemble des éléments de G_n possédant la propriété indiquée; il constitue évidemment un sous-groupe de G_n ne contenant aucune réflexion. Prenons une conversion bien déterminée S . Elle commute avec chaque élément u de la gerbe

$\Gamma(S)$ attachée à S . Elle transforme toute réflexion u' parallèle à u en une réflexion parallèle à u , donc à u' . Il résulte de la proposition 38 que S appartient à E . Comme on peut en dire autant de toute conversion de G_n , E contient toutes les conversions et les translations de G_n (coroll. 2, prop. 40). En vertu du théorème 6, tout élément A de E est le produit d'un élément A' de E contenu dans le normalisateur $N(S)$ de S et d'une translation. Pour établir la proposition, il suffit de montrer que A' ne peut être que I ou S .

Prenons un élément a dans $\Gamma(S)$. A' appartient au normalisateur de a dans G_n . Lorsque A' est dans le groupe polaire $\pi(a)$, il laisse fixe chaque élément de la gerbe $\Gamma(S) \cap \Pi(a)$ dans $\Pi(a)$. Donc, dans $\Pi(a)$, A' transforme toute réflexion en une réflexion parallèle. Comme $N(S)$ ne contient pas de translation non banale, il résulte de l'hypothèse générale de récurrence (E) (voir n° 5.3) que A' est soit I , soit la conversion $S' = aS$ dans $\pi(a)$. Or A' ne saurait être confondu avec S' , car $S'S = a$ n'est pas dans E . Dans le cas présent, A' est donc l'élément I . En revanche, lorsque A' est dans $a.\pi(a)$, $aA' = S'$. Par suite $A' = S$. C.Q.F.D.

Avec cette proposition, nous avons achevé de prouver que les faits énoncés dans les hypothèses générales de récurrence sont également vrais pour la dimension n . Ces démonstrations font l'objet du corollaire de la proposition 28 (hyp. (A)), et des propositions 31 (hyp. (B)), 41 (hyp. (C) et (D)) et 46 (hyp. (E)).

5.6. Prenons dans Σ_n n réflexions u_i perpendiculaires deux à deux, $i = 1, 2, \dots, n$. Pour tout indice i différent de 1, prenons un élément bissecteur m_{1i} de u_1 et u_i . Comme u_i coupe u_k lorsque $i \neq k \neq 1$, m_{1i} coupe m_{1k} (prop. 46). Soit m'_{ik} l'élément perpendiculaire à u_1 dans le faisceau $\Phi(m_{1i}, m_{1k})$. Posons $m_{ik} = m_{1i}m'_{ik}m_{1k}$. On voit sans peine que m_{ik} est un élément bissecteur de u_i et u_k . Par la suite, nous pourrions admettre que m_{ij} et m_{ji} , où $i \neq j$, désignent le même élément. Prenons ensuite une réflexion e_1 parallèle à u_1 mais distincte d'elle. Posons $e_i = m_{1i}e_1m_{1i}$ pour tout indice i différent de 1. On peut vérifier que pour toute paire d'indices distincts (j, k) on a $e_k = m_{jk}e_jm_{jk}$. L'ensemble des éléments u_i, m_{ik}, e_i constitue dans Σ_n un repère orthonormal \mathcal{R} . Nous admettrons qu'une définition analogue a été faite à chacun des échelons inférieurs. On voit d'ailleurs que

c'est bien ainsi que nous avons procédé à l'échelon 2. L'intersection du repère orthonormal \mathcal{R} considéré ci-dessus dans Σ_n avec le système polaire $\Pi(u_i)$ détermine dans celui-ci un repère orthonormal \mathcal{R}_i , avec $i = 1, 2, \dots, n$.

Nous savons qu'en fixant le groupe G_n nous déterminons une chaîne de groupes $G_{n'}$, où $n' = 2, 3, \dots, n-1, n$, telle que pour tout n' supérieur à 2, $G_{n'}$ satisfait les axiomes $E_{n'} I$ et $E_{n'} II$. Le groupe G_2 est isomorphe au groupe $GE(2, K)$, où K est un corps réel bien déterminé contenant la racine carrée de chacun de ses éléments positifs. Nous appellerons K le *corps de base*, et nous nous proposons de prouver que G_n est isomorphe à $GE(n, K)$. En vue de cette démonstration, nous allons admettre les hypothèses de récurrence suivantes:

a) Dans G_{n-1} , il existe une correspondance biunivoque entre l'ensemble des gerbes de Σ_{n-1} et K^{n-1} . Cette correspondance est déterminée par le choix d'un repère orthonormal dans Σ_{n-1} .

b) Admettons qu'on s'est donné un repère (u_i, m_{ik}, e_i) dans Σ_{n-1} , avec $i, k = 1, 2, \dots, n-1$ et $i \neq k$. Soit Γ et Γ' deux gerbes quelconques dans Σ_{n-1} ; pour tout indice i , désignons respectivement par x_i et x'_i les éléments de Γ et Γ' parallèles à u_i . Soit $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1})$ et $(\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_{n-1})$ les éléments de K^{n-1} associés à Γ et Γ' relativement au repère considéré. Alors les égalités $x_i = x'_i$ et $\xi_i = \xi'_i$ sont équivalentes.

c) La quantité:

$$d_{n-1}(\Gamma, \Gamma') = \left[\sum_{i=1}^{n-1} (\xi_i - \xi'_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

est invariante par rapport aux transformations induites par les éléments de G_{n-1} dans l'ensemble des gerbes de Σ_{n-1} .

Ces faits sont vrais à l'échelon 2. Nous allons montrer qu'ils le sont aussi à l'échelon n . Introduisons une fois pour toutes un repère orthonormal \mathcal{R} formé d'éléments u_i, m_{ik} et e_i , avec $i, k = 1, 2, \dots, n$ et $i \neq k$, comme nous l'avons décrit plus haut. L'intersection de \mathcal{R} et $\Pi(u_i)$ détermine dans $\Pi(u_i)$ un repère orthonormal \mathcal{R}_i , pour tout indice i . Prenons une gerbe quelconque Γ dans Σ_n . Dans $\Pi(u_i)$, $\Gamma \cap \Pi(u_i)$ est une gerbe à laquelle on peut attacher un élément de K^{n-1} bien

déterminé (\dots, ξ_j, \dots) relativement à \mathcal{R}_i , avec $1 \leq j \leq n$ et $j \neq i$. Si l'on substitue à Γ une gerbe Γ' ayant avec Γ un élément commun x_k parallèle à u_k , $k \neq i$, l'élément (\dots, ξ'_j, \dots) de K^{n-1} , avec $1 \leq j \leq n$ et $j \neq i$, associé à $\Gamma' \cap \Pi(u_i)$ relativement à \mathcal{R}_i est tel que $\xi_k = \xi'_k$. Si l'on applique ces considérations aux gerbes Γ et $\Gamma' = m_{i'v} \Gamma m_{i'v}$, où $i' \neq i$, on voit que l'élément (\dots, η_j, \dots) de K^{n-1} , avec $1 \leq j \leq n$ et $j \neq i'$, associé à $\Gamma \cap \Pi(u_{i'})$ relativement au repère $\mathcal{R}_{i'}$ est tel que $\xi_j = \eta_j$ pour tout indice j différent de i et de i' . On peut donc attacher à la gerbe Γ un élément $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ de K^n de manière que l'on obtienne l'élément de K^{n-1} associé à $\Gamma \cap \Pi(u_i)$ relativement au repère \mathcal{R}_i en biffant l'élément ξ_i , pour tout indice i . On détermine ainsi une correspondance biunivoque entre l'ensemble des gerbes de Σ_n et K^n , correspondance déterminée par le choix du repère \mathcal{R} . Nous dirons que ξ_i est la i -ième coordonnée de Γ relativement à \mathcal{R} .

Lorsqu'on transforme la gerbe Γ par une réflexion a prise dans $\Pi(u_i)$, on obtient une nouvelle gerbe dont la i -ième coordonnée coïncide avec celle de Γ . Il résulte de l'hypothèse c) faite plus haut que la transformation considérée laisse invariante la quantité:

$$d_n(\Gamma, \Gamma') = \left[\sum_{i=1}^n (\xi_i - \xi'_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

où $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ et $(\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_n)$ sont les coordonnées de deux gerbes quelconques Γ et Γ' , relativement à \mathcal{R} . Or il découle de la proposition 39, du corollaire de la proposition 45 et du théorème 6 que tout élément de G_n peut être considéré comme un produit d'éléments pris dans les systèmes polaires $\Pi(u_i)$, où $i = 1, 2, \dots, n$. Donc d_n est invariante par rapport aux transformations induites dans l'ensemble des gerbes de Σ_n par les éléments de G_n . Comme on le sait d'ailleurs, d_n est une distance dans K^n . D'autre part, il résulte de la proposition 44 que G_n agit effectivement dans l'ensemble des gerbes de Σ_n . En faisant usage de la correspondance biunivoque introduite précédemment entre les gerbes de Σ_n et les éléments de K^n , on peut assimiler G_n à un groupe d'isométries de K^n muni de la distance d_n .

On a pu observer en passant que les hypothèses a), b) et c) sont également satisfaites à l'échelon n .

THÉORÈME 7. *Le groupe G_n est isomorphe à un groupe $GE(n, K)$, où K est un corps réel contenant la racine carrée de chacun de ses éléments positifs.*

Nous appellerons « points » les éléments de K^n . La famille de R -groupes $(GE(n', K), \Sigma(n', K))$ satisfait les axiomes que nous avons posés pour la famille de R -groupes $(G_{n'}, \Sigma_{n'})$, où $n' = 2, 3, \dots, n$. Il en résulte que toutes les propositions que nous avons établies pour G_n conviennent à $GE(n, K)$. Ainsi, à toute gerbe Γ' dans $\Sigma(n, K)$ correspond biunivoquement un point de K^n qui n'est autre que le centre P de la conversion déterminant Γ' . Nous qualifierons Γ' et P d'éléments homologues. Cette correspondance est manifestement compatible avec les transformations induites par les éléments de $GE(n, K)$ dans l'ensemble des gerbes de $\Sigma(n, K)$ et dans K_n .

Nous avons déjà vu que G_n peut être considéré comme un sous-groupe de $GE(n, K)$. Prenons alors une réflexion a' dans $\Sigma(n, K)$. Il existe dans $\Sigma(n, K)$ n gerbes $\Gamma'_1, \Gamma'_2, \dots, \Gamma'_n$ dont l'intersection se réduit à $\{a'\}$. Soit P_i le point homologue de Γ'_i , où $i = 1, 2, \dots, n$. Il résulte du corollaire de la proposition 44 que, mis à part l'élément neutre, a' est le seul élément de $GE(n, K)$ laissant fixes les points P_i . Soit Γ_i la gerbe de Σ_n correspondant au point P_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Tout élément commun aux gerbes Γ_i laisse fixes les points P_i . Or l'intersection de ces gerbes n'est pas vide (prop. 42) et elle ne contient évidemment pas l'élément neutre. Comme G_n est contenu dans $GE(n, K)$, il résulte de ce qui précède que cette intersection se réduit à l'élément a' . Donc $\Sigma(n, K)$ est contenu dans Σ_n et, par suite, G_n est confondu avec $GE(n, K)$. C.Q.F.D.

COROLLAIRE. (G_n, Σ_n) est isomorphe, en tant que R -groupe, à $(GE(n, K), \Sigma(n, K))$.

En effet, le raisonnement précédent prouve que Σ_n et $\Sigma(n, K)$ sont confondus.

Afin de mieux percevoir la précision apportée par ce corollaire au théorème 7, considérons un exemple. Dans $GE(n, K)$, où $n \geq 5$, désignons par $\Sigma'(n, K)$ l'ensemble distingué des éléments involutifs de la forme abc , où a, b et c sont trois éléments de $\Sigma(n, K)$ perpendiculaires deux à deux. Quelle que soit la

réflexion u dans $\Sigma(n, K)$, on peut en trouver quatre autres v, w, x , et y , perpendiculaires à u et perpendiculaires entre elles, de sorte que :

$$u = uv.vxw.wxy.$$

Par suite, $GE(n, K)$ est un R -groupe engendré par $\Sigma'(n, K)$. Mais $(GE(n, K), \Sigma'(n, K))$ ne satisfait pas l'axiome d'incidence. Il suffit de le montrer pour $n = 5$. Rapportons l'espace K^5 à un repère orthonormal et désignons par $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ un point quelconque de K^5 . Considérons les transformations A, B, C et D envoyant $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ respectivement sur $(x_1, x_2, -x_3, -x_4, -x_5)$, $(x_1, x_2, -x_3, -x_4, t-x_5)$, $(x_1, -x_2, x_3, -x_4, -x_5)$ et $(-x_1, -x_2, x_3, -x_4, x_5)$, où t est un élément non nul de K , Il est clair que A, B, C et D sont dans $\Sigma'(5, K)$. D'autre part :

$$CBA : (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \rightarrow (x_1, -x_2, x_3, -x_4, -t-x_5),$$

$$DCA : (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \rightarrow (-x_1, x_2, -x_3, -x_4, x_5),$$

$$DCB : (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \rightarrow (-x_1, x_2, -x_3, -x_4, -t+x_5).$$

Donc CBA et DCA sont dans $\Sigma'(5, K)$. Il n'en est pas de même de DCB , qui n'est pas involutif. Comme A et C sont distincts, on peut affirmer que $(GE(n, K), \Sigma'(n, K))$ n'est pas un RI -groupe ($n \geq 5$). Il ne saurait donc être isomorphe, en tant que R -groupe, à $(GE(n, K), \Sigma(n, K))$.

Nous avons donc montré que les axiomes $E_n I$ et $E_n II$, joints aux axiomes $P I$ à $P VII$ caractérisent les groupes $GE(n, K)$, où K est un corps réel contenant la racine carrée de chacun de ses éléments positifs. Il convient de noter que l'on peut omettre les axiomes $P VI$ et $P VII$ sans changement pour le reste de la construction. Les sept autres axiomes caractérisent les groupes des K -isométries des espaces K^n munis de leur K -métrique euclidienne, où K est un corps formellement réel pythagoricien.

L'examen critique des axiomes $E_n I$ et $E_n II$ se réduit à fort peu de chose pour ce qui concerne la consistance et l'indépendance relative, qui sont manifestes. On pourrait cependant se proposer d'étudier s'il est possible de substituer à l'un ou l'autre de ces axiomes un axiome plus faible. Peut-on, par exemple, renoncer à exiger de G_n qu'il satisfasse l'axiome d'incidence? Ces questions, qui sont probablement assez délicates, ne sont pas abordées ici.