Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 10 (1964)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE CONSTRUCTION DE LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE FONDÉE SUR LA NOTION DE RÉFLEXION

Autor: Delessert, André

Kapitel: 2. L'axiome d'Euclide

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-39412

réflexion arbitraire. On peut poser: $A = xyz$, où x, y et z sont trois réflexions non incidentes. Comme A est involutif, on a:

$$xyx = zy.xzx\,,$$

ce qui montre que les réflexions xyx et xzx appartiennent au faisceau $\Phi(y, z)$. En vertu du lemme de la proposition 5, $\Phi(y, z)$ est entièrement perpendiculaire à x. Par suite:

$$(yz)^2 = xyz.xyz = A^2 = I\,.$$

Donc y et z sont perpendiculaires et le système polaire $\Phi(y, z)$ de x est de première classe. Prenons un élément quelconque y' dans $\Phi(y, z)$ et posons $z' = y'yz$. D'après ce qui précéde, $A = xy'z'$ et z' est la réflexion perpendiculaire à y' dans $\Phi(y, z)$. D'autre part, A commute avec x; et comme x est arbitrairement choisi dans Σ, A est un élément central de G.

En résumé G ne possède d'élément central distinct de I que lorsque les systèmes polaires sont de première classe, autrement dit quand il n'existe pas de faisceaux de seconde classe dans Σ. Dans ce cas, G ne contient qu'un seul élément de cette espèce. C.Q.F.D.

Corollaire. *Lorsqu'il contient des faisceaux de seconde classe, Σ constitue l'ensemble de tous les éléments involutifs impropres de* G. *Dans le cas contraire, il existe dans* G *un élément involutif impropre n'appartenant pas à Σ, et un seul. Cet élément engendre le centre de* G. *Il peut être mis sous la forme* abc, *où* a, b *et* c *sont trois réflexions deux à deux perpendiculaires.*

2. L'axiome d'Euclide

2.1 Les axiomes précédents ne permettent aucune conclusion quant à l'existence de faisceaux de seconde classe dans Σ, particulièrement de ceux d'entre eux qui ne sont pas des systèmes polaires, et que nous qualifierons de *singuliers*. Remarquons à ce propos que si l'on admet l'existence de faisceaux singuliers dans Σ, toute réflexion appartient à deux d'entre eux, au moins. En effet, prenons un faisceau singulier Φ_s, un élément a dans Φ_s et une réflexion quelconque t. Si u est un élément bissecteur de a et t, $\Phi_s' = u\Phi_s u$ est un faisceau singulier contenant t. Soit alors m une réflexion perpendiculaire à t; elle n'est pas dans Φ_s' en vertu de la proposition 8. Le faisceau $\Phi_s'' = m\Phi_s' m$ est singulier et il contient t. De plus il est distinct de Φ_s', car sans cela Φ_s' serait le système polaire de m (lemme prop. 5), contrairement à l'hypothèse faite sur Φ_s.

Parmi les hypothèses les plus simples que l'on puisse poser au sujet de l'existence de faisceaux singuliers dans Σ, il convient de signaler les trois suivantes:

a) il n'existe pas de faisceau de seconde classe dans Σ

b) toute réflexion appartient à un faisceau de seconde classe et un seul

c) toute réflexion appartient à deux faisceaux singuliers exactement.

L'hypothèse *a*) est vérifiée dans le cas de la géométrie elliptique plane continue. Le groupe fondamental G_1 de cette géométrie est engendré par des éléments involutifs, mais ce n'est pas un R-groupe. En revanche, le R-groupe G naturellement associé à G_1 satisfait les quatre premiers axiomes ainsi que l'hypothèse *a*). Il est isomorphe au R-groupe des isométries de l'espace euclidien R^3 laissant fixe un point de cet espace. Nous dirons d'un groupe vérifiant les quatre premiers axiomes et l'hypothèse *a*) qu'il est de *type elliptique plan.* L'hypothèse *c*) caractérise les géométries de *type hyperbolique plan.* Nous ne nous attarderons pas aux hypothèses *a*) et *c*); nous allons admettre l'hypothèse *b*) et montrer que, jointe aux quatre premiers axiomes, elle fixe assez étroitement la structure algébrique de G.

Axiome P V. (Axiome d'Euclide). *Toute réflexion appartient à un faisceau de seconde classe, et à un seul.*

On peut aussi énoncer cet axiome en disant que Σ contient des faisceaux de seconde classe et que deux faisceaux de seconde classe distincts sont disjoints: il résulte de l'axiome de bissection que les faisceaux de seconde classe de Σ déterminent une partition de Σ. Nous qualifierons de *parallèles* deux réflexions distinctes ou non appartenant à un même faisceau de seconde classe. Le parallélisme est une relation d'équivalence dans Σ. En vertu de la proposition 3, cette relation est compatible avec les transformations induites dans Σ par les automorphismes intérieurs de G.

Il découle immédiatement de l'axiome P V que tout faisceau de seconde classe est un système polaire, et réciproquement. De plus, tout faisceau de seconde classe est déterminé par un seul de ses éléments et nous désignerons parfois par $\Phi_2(s)$ le faisceau de seconde classe contenant la réflexion s.

Les systèmes polaires attachés à deux réflexions parallèles a et b sont confondus. En effet, a et b appartiennent à un même système polaire $\Pi(s)$, où $s \in \Sigma$. La réflexion s appartient aux systèmes polaires $\Pi(a)$ et $\Pi(b)$ qui, n'étant pas disjoints, sont confondus. Il s'ensuit que l'ensemble des bases du système polaire $\Pi(s)$ est $\Phi_2(s)$.

2.2. Considérons le R-groupe $g(\Phi_1)$ engendré par les éléments d'un faisceau de première classe Φ_1. Il résulte de la proposition 2 que l'ensemble des éléments propres de $g(\Phi_1)$ constitue un sous-groupe abélien d'indice 2 dans $g(\Phi_1)$. Nous désignerons ce groupe par $\rho(\Phi_1)$ et nous l'appellerons *groupe des rotations autour de* Φ_1. De même, à toute réflexion s on peut associer le R-groupe $g(\Pi(s))$ engendré par les éléments du système polaire $\Pi(s)$. Les éléments propres de $g(\Pi(s))$ forment un sous-groupe abélien d'indice 2 dans $g(\Pi(s))$. Nous noterons ce groupe $\tau(s)$ et nous l'appellerons *groupe des translations de direction s*. L'élément neutre I de G est à la fois une rotation et une translation que nous qualifierons de *banales*. Nous pouvons affirmer qu'il n'existe pas de translation involutive non banale. En revanche, le groupe des rotations autour du faisceau de première classe Φ_1 contient une rotation involutive non banale (prop. 7) et une seule (prop. 9 et lemme prop. 11). Nous appellerons cette rotation le *demi-tour* autour de Φ_1. On voit ainsi apparaître une correspondance biunivoque entre l'ensemble des demi-tours et celui des faisceaux de première classe.

PROPOSITION 13. *Le produit de deux demi-tours est une translation. Réciproquement, il est possible de considérer toute translation comme le produit de deux demi-tours dont l'un peut être librement choisi à l'avance.*

Soit D et D' les demi-tours relatifs à deux faisceaux de première classe Φ_1 et Φ'_1. Quand $D = D'$, le produit DD' est la translation banale I. Quand $D \neq D'$, désignons par s la réflexion commune à Φ_1 et Φ'_1. Prenons les éléments u et v perpendiculaires à s dans Φ_1 et Φ'_1 respectivement. On peut écrire:

$$DD' = us.sv = uv,$$

qui est une translation de direction s.

Réciproquement, soit T une translation de direction a, avec $a \in \Sigma$, et soit un demi-tour D autour d'un faisceau de première classe Φ_1. Soit b et c les éléments de Φ_1 respectivement parallèle et perpendiculaire à a. Il existe dans le système polaire $\Pi(b)$ deux éléments d' et d'' tels que:

$$T = cd' = d''c.$$

Il est clair que D égale bc et cb. Les éléments bd' et $d''b$ sont deux demi-tours D' et D'', respectivement. De plus:

$$T = cb.bd' = DD', \qquad T = d''b.bc = D''D. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

COROLLAIRE. *Le produit de trois demi-tours est un demi-tour.*

Soulignons le fait que si D et D' sont les demi-tours opérant autour des faisceaux de première classe distincts Φ_1 et Φ'_1, DD' est une translation dont la direction est donnée par l'élément s commun à Φ_1 et Φ'_1, ou par toute autre réflexion parallèle à s.

PROPOSITION 14. *Dans G, l'ensemble des translations constitue un sous-groupe distingué abélien $\mathcal{T}$.*

Soit T_1 et T_2 deux translations. Donnons-nous un demi-tour D. En vertu de la proposition 13, il existe deux demi-tours D_1 et D_2 tels que:

$$T_1 = D_1 D, \qquad T_2 = D_2 D.$$

D'où:

$$T_1 T_2^{-1} = (D_1 D)(D_2 D)^{-1} = D_1 D.DD_2 = D_1 D_2 ,$$

ce qui montre que l'ensemble $\mathscr{T}$ des translations est un sous-groupe de G. De plus, comme:

$$DT_1 D = D(D_1 D)D = DD_1 = T_1^{-1} ,$$

l'automorphisme intérieur de G associé à un demi-tour D envoie toute translation sur son inverse. Il en découle que T est abélien, car:

$$T_2 T_1 T_2^{-1} = D_2 D(D_1 D)DD_2 = D_2 DD_1 D_2 = D_1 D = T_1 .$$

Enfin le fait que $\mathscr{T}$ est distingué dans G résulte de la conservation du parallélisme par les automorphismes intérieurs de G.

C.Q.F.D.

Proposition 15. *Le groupe $\mathscr{T}$ des translations est isomorphe au produit $\tau(\mathrm{a}) \times \tau(\mathrm{a})$, où* a *est une réflexion quelconque.*

Quelles que soient les réflexions a et b, les groupes $\tau(a)$ et $\tau(b)$ sont isomorphes. En effet, si a et b sont distinctes, prenons un élément bissecteur u de a et b; l'application $T \to uTu$ définit un isomorphisme entre $\tau(a)$ et $\tau(b)$. Dès lors, il nous suffit d'établir que $\mathscr{T}$ est isomorphe au produit direct $\tau(r) \times \tau(s)$, où r et s sont deux réflexions sécantes.

Considérons l'ensemble $\tau(r).\tau(s)$ des produits de la forme $T_r T_s$, où $T_r \in \tau(r)$ et $T_s \in \tau(s)$. Comme $\mathscr{T}$ est abélien, $\tau(r).\tau(s)$ est un sous-groupe de $\mathscr{T}$. Les réflexions r et s étant sécantes, l'intersection de $\tau(r)$ et $\tau(s)$ se réduit à l'élément neutre et $\tau(r).\tau(s)$ est isomorphe au produit direct $\tau(r) \times \tau(s)$.

Il reste à montrer que $\mathscr{T} = \tau(r).\,\tau(s)$. Prenons une translation quelconque; elle peut se mettre sous la forme DD'', où D est le demi-tour autour de $\Phi(r, s)$ et D'' est le demi-tour autour d'un faisceau de première classe convenable Φ_1. Prenons dans Φ_1 l'élément s' parallèle à s et soit D' le demi-tour autour de $\Phi(r, s')$. On peut écrire: $DD'' = DD'.D'D''$, où $DD' \in \tau(r)$ et $D'D'' \in \tau(s)$.

C.Q.F.D.

Etant données deux réflexions sécantes r et s, nous appellerons *isomorphisme canonique* de $\mathcal{T}$ sur $\tau(r) \times \tau(s)$ l'application $T \to (T_r; T_s)$ dans laquelle $T = T_r T_s$, $T_r \in \tau(r)$ et $T_s \in \tau(s)$.

2.3. On dit qu'un groupe Γ est le *produit semi-direct* de deux sous-groupes Γ_1 et Γ_2 pris dans cet ordre lorsque tout élément X de Γ possède exactement deux décompositions

$$X = X_1 X_2 = X_2 X'_1 ,$$

où X_1 et X'_1 sont dans Γ_1 et X_2 est dans Γ_2. Cela entraîne, en particulier, que Γ_1 est distingué dans Γ et que Γ/Γ_1 est isomorphe à Γ_2. La définition précédente nous permet d'énoncer un théorème important sur la structure algébrique de G.

Theorème 1. *Le sous-groupe* G_0 *des éléments propres de* G *est le produit semi-direct du groupe* $\mathcal{T}$ *des translations et du groupe* $\rho(\Phi_1)$ *des rotations autour d'un faisceau de première classe* Φ_1.

Prenons un faisceau de première classe Φ_1 et un élément quelconque A dans G_0. Si A est une translation non banale, désignons par a l'élément de Φ_1 perpendiculaire à la direction de A. Si A est une rotation autour d'un faisceau de première classe Φ'_1, désignons par a un élément commun à Φ_1 et Φ'_1. Dans tous les cas, il existe une réflexion b telle que $A = ab$. Soit b' l'élément de Φ_1 parallèle à b. On peut écrire:

$$A = ab = ab'.b'b = (a.bb'.a)\,ab' .$$

Il est clair que $T_1 = bb'$ et $T_2 = abb'a$ sont des translations et que $R = ab'$ est une rotation autour de Φ_1. D'où:

$$A = RT_1 = T_2 R .$$

Ces deux décompositions sont univoquement déterminées par le choix de A et de Φ_1, car l'intersection de $\mathcal{T}$ et de $\rho(\Phi_1)$ se réduit à l'élément neutre I. C.Q.F.D.

Corollaire. *Tout élément impropre de* G *peut être considéré comme le produit d'une réflexion et d'une translation.*

En effet, soit X un élément impropre de G, Φ_1 un faisceau de première classe et a un élément de Φ_1. L'élément aX est propre.

On peut donc le mettre sous la forme RT, où R est une rotation autour de Φ_1 et T une translation. On peut poser $R = ab$ où b est dans Φ_1. D'où $X = bT$. On peut encore écrire $X = T'b$, où T' est la translation bTb.

La réflexion b est entièrement déterminée par le choix de X et de Φ_1, comme on le voit sans peine. Signalons enfin que, quel que soit l'élément impropre X, on peut trouver une réflexion s et une translation U de direction s telles que $X = sU = Us$.

2.4. Nous allons examiner quelques faits relatifs aux automorphismes intérieurs de G. Pour simplifier, nous appellerons *transformation* par l'élément A de G l'automorphisme intérieur de G défini par $X \to A^{-1}XA$.

Proposition 16. *Pour que la transformation par un élément* A *de* G *envoie toute réflexion sur une réflexion parallèle, il faut et il suffit que* A *soit un demi-tour ou une translation.*

Soit D le demi-tour autour d'un faisceau de première classe Φ_1. Prenons une réflexion quelconque s. Soit a et b les éléments de Φ_1 respectivement parallèle et perpendiculaire à s. Il est clair que $D = ab$. Par suite, $DaD = a$. Donc la transformation par D laisse a fixe; comme elle conserve le parallélisme, elle envoie s sur une réflexion parallèle à s. Il résulte de la proposition 13 qu'il en est de même pour toute translation.

Passons à la réciproque. Considérons d'abord deux réflexions sécantes non perpendiculaires a et b. L'élément aba coupe b. Par suite, la transformation par une réflexion n'envoie pas chaque élément de Σ sur un élément parallèle. Examinons ensuite le cas d'une rotation R autour d'un faisceau de première classe Φ_1. Il existe dans Φ_1 deux éléments c et d tels que $R = cd$. L'élément

$$c' = R^{-1}cR = dcd,$$

appartient à Φ_1. Pour que c et c' soient parallèles — c'est-à-dire confondus, dans ce cas— il faut que c et d soient confondus ou perpendiculaires; R est alors la rotation banale ou le demi-tour autour de Φ_1. Prenons enfin un élément impropre X de G. En vertu du corollaire du théorème 1, X peut se mettre sous la forme Ts où s est une réflexion et T une translation. La transformation par X est donc le produit de la transformation par T qui envoie toute réflexion sur une réflexion parallèle, et de la transformation par la réflexion s qui ne possède pas cette propriété. Il s'ensuit que la transformation par X ne la possède pas non plus. C.Q.F.D.

Le *groupe de stabilité* d'une partie E de G est le sous-groupe de G formé des éléments X tels que $X^{-1}EX = E$.

Proposition 17. *Le groupe de stabilité d'un faisceau de première classe* Φ_1 *est le sous-groupe* $\mathrm{g}(\Phi_1)$ *de* G *engendré par les éléments de* Φ_1.

Comme Φ_1 n'est pas un système polaire, les seules réflexions appartenant au groupe de stabilité de Φ_1 sont les éléments de Φ_1.

Recherchons maintenant les éléments propres du groupe étudié. Ils peuvent se mettre sous la forme rs, où r, $s \in \Sigma$. Il résulte de ce qui précède que si r est dans Φ_1, il en est de même de s. Plaçons-nous dans le cas où r n'appartient pas à Φ_1. Il existe un faisceau Φ contenant r et s. Soit v la seule réflexion appartenant à la fois à Φ et à Φ_1. On peut poser $rs = uv$, où $u = rsv \in \Phi$. Il est clair que u appartient au groupe de stabilité de Φ_1. Par conséquent u est dans Φ_1, et $u = v$. Donc rs est l'élément neutre I de G.

Il reste à considérer les éléments du groupe de stabilité de Φ_1 qui sont de dimension 2 dans G. Un tel élément peut toujours se mettre sous la forme axy, où a est arbitrairement choisi dans Φ_1 et où x et y sont des réflexions distinctes convenables. Il est clair que xy appartient au groupe de stabilité de Φ_1. Il résulte alors de ce qui précède que x et y sont dans Φ_1 et qu'il n'existe pas d'élément de dimension 2 dans le groupe étudié.

En résumé, le groupe de stabilité de Φ_1 est le R-groupe de dimension 1 engendré par Φ_1. C.Q.F.D.

Corollaire 1. *Le groupe* G *est le produit semi-direct du groupe des translations et du groupe de stabilité d'un faisceau de première classe.*

Cela découle immédiatement de ce qui précède et des considérations accompagnant le corollaire du théorème 1.

COROLLAIRE 2. *Lorsqu'une réflexion commute avec un demi-tour* D *elle appartient au faisceau de première classe associé à* D, *et réciproquement.*

En effet, comme le demi-tour D détermine univoquement le faisceau Φ_1 autour duquel il opère, toute réflexion commutant avec D appartient au groupe de stabilité de Φ_1, et réciproquement.

COROLLAIRE 3. *Soit trois faisceaux de première classe sans élément commun. L'ensemble des éléments de* G *qui déterminent une transformation laissant invariant chacun de ces faisceaux se réduit à* $\{I\}$.

En effet, soit Φ_1 et Φ_1' deux de ces faisceaux. Ils n'ont en commun qu'une seule réflexion a. Tout élément propre du groupe de stabilité de Φ_1 peut se mettre sous la forme ab, où $b \in \Phi_1$. Cet élément ab ne peut appartenir au groupe de stabilité de Φ_1' que si $b = a$. Soit Φ''_1 le troisième faisceau considéré. Il ne contient pas a. L'intersection des groupes de stabilité des faisceaux Φ_1, Φ_1' et Φ_1'' se réduit donc à $\{I\}$.

Deux éléments A et B de G sont dits *congrus*, ce que l'on note $A \sim B$, quand il existe un élément propre X dans G tel que la transformation par X envoie A sur B. On définit ainsi une relation d'équivalence dans G. L'ensemble Σ consitue une classe d'équivalence vis-à-vis de cette relation. Les éléments de G congrus à une rotation sont des rotations; les éléments congrus à une translation sont des translations. Il résulte immédiatement de la définition que $AB \sim BA$ dès que l'un au moins des éléments A et B est propre.

Soit a, b et c trois réflexions quelconques. On peut écrire $ab \sim c(ba)c$, car $cbac = ca(ab)ac$. Donnons-nous une rotation R et un faisceau de première classe Φ_1. Le groupe $\rho(\Phi_1)$ des rotations autour de Φ_1 contient une rotation R' congrue à R. C'est évident quand R est banale; ça l'est aussi quand R est dans $\rho(\Phi_1)$. Sinon soit Φ le faisceau de première classe autour duquel opère R, avec $\Phi \neq \Phi_1$, et soit s l'élément commun à Φ et Φ_1. Considérons les réflexions a et b perpendiculaires à s dans Φ et Φ_1 respectivement, et soit m l'élément bissecteur de a et b. Le demi-tour sm transforme a en b et s en lui-même. Il transforme donc Φ en Φ_1 et R en une rotation congrue R_1 opérant autour de Φ_1. Nous verrons que R_1 est entièrement déterminée par R et Φ_1.

Proposition 18. *La condition nécessaire et suffisante pour que deux rotations* R_1 *et* R_2 *soient congrues est qu'il existe une translation* T *telle que* $\mathrm{R}_2 = \mathrm{TR}_1$.

Soit R_1 et R_2 deux rotations congrues. Quand l'une d'elles est banale, il en est de même de l'autre et la proposition est vraie dans ce cas. Dès maintenant, plaçons-nous dans le cas où R_1 et R_2 ne sont pas banales. Par hypothèse, il existe dans G_0 un élément A tel que:

$$R_2 = A^{-1} R_1 A .$$

Désignons par Φ le faisceau de première classe autour duquel opère R_1. En vertu du théorème 1, il existe une rotation R autour de Φ et une translation T_1 telles que $A = RT_1$. D'où:

$$R_2 = T^{-1} R^{-1} R_1 R T_1 = T^{-1} R_1 T_1 ,$$

car le groupe des rotations autour de Φ est abélien. On peut alors trouver une translation T_2 telle que $R_1 T_1 = T_2 R_1$. En introduisant la translation $T = T_1^{-1} T_2$, on obtient $R_2 = TR_1$.

Réciproquement, soit R_1 une rotation non banale autour d'un faisceau de première classe Φ et soit une translation T que l'on peut aussi supposer non banale, sans restriction. Soit a l'élément de Φ perpendiculaire à la direction de T. Il existe dans Σ un élément b parallèle à a et dans Φ un élément c tels que $T = ba$ et $R_1 = ac$. Considérons alors la rotation $R_2 = TR_1 = bc$. Nous devons montrer que R_1 et R_2 sont congrues. Comme R_1 n'est pas banale, b et c se coupent. Prenons les éléments r et s perpendiculaires à c dans Φ et $\Phi(b, c)$ respectivement. La translation T n'étant pas banale, r et s sont distincts; soit u leur élément bissecteur. Il est clair que $u\Phi u = \Phi(b, c)$, car u est perpendiculaire à c. Par suite, la transformation par le demi-tour $D = uc$ envoie tout élément de Φ sur un élément parallèle de $\Phi(b, c)$, et en particulier a sur b et c sur lui-même. Il en découle que:

$$DR_1 D = DacD = DaD.DcD = bc = R_2 . \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Corollaire 1. *Quels que soient les faisceaux de première classe* Φ *et* Φ', *il existe au moins une réflexion* u *telle que* $\Phi' = \mathrm{u}\Phi\mathrm{u}$.

Corollaire 2. *Tout élément congru à une rotation* R *peut être obtenu en transformant* R *par une translation convenable.*

Corollaire 3. *La condition nécessaire et suffisante pour que deux rotations* R_1 *et* R_2 *soient congrues est qu'il existe une translation* T′ *telle que* $\mathrm{R}_2 = \mathrm{R}_1\mathrm{T}'$.

Cela résulte de la proposition 18 et du fait que deux éléments de G sont congrus en même temps que leurs inverses.

Corollaire 4. *Quels que soient la rotation* R *et le faisceau de première classe* Φ, *il existe une rotation congrue à* R *opérant autour de* Φ, *et une seule.*

C'est une conséquence de la proposition 18 et du théorème 1. En particulier, on peut affirmer que deux rotations congrues opérant autour d'un même faisceau de première classe sont confondues.

Proposition 19. *Soit* a, a′, b *et* b′ *quatre réflexions telles que* a *coupe* b *et que* a *et* a′ *soient parallèles. Si* b *et* b′ *sont parallèles*, ab *et* a′b′ *sont congrus. Réciproquement, si* ab *et* a′b′ *sont congrus*, b *et* b' *sont parallèles.*

Prenons d'abord le cas où a et b sont deux réflexions sécantes et où a′ et b' sont deux réflexions respectivement parallèles à a et b. Les éléments ab, $a'b$ et $a'b'$ sont des rotations, tandis que aa' et bb' sont des translations. En vertu de la proposition 18, ab est congru à $a'b$, car $ab = aa'.a'b$. En vertu du corollaire 3 de la proposition 18, $a'b$ est congru à $a'b'$, car $a'b = a'b'.b'b$. Par suite $ab \sim a'b'$.

Réciproquement, considérons quatre réflexions a, b, a' et b' telles que a coupe b, que a et a' soient parallèles et que $ab \sim a'b'$. Les rotations ab et $a'b'$ ne sont pas banales. Prenons dans $\Phi(a', b')$ l'élément b'' parallèle à b. Il résulte de la première partie de la démonstration que ab et $a'b''$ sont congrus. Mais en vertu du corollaire 4 de la proposition 18, $a'b' = a'b''$. Par conséquent b'' est confondu avec b', et b' est parallèle à b. C.Q.F.D.

Proposition 20. *Soit* A, B *et* C *trois éléments propres de* G. *Si* A *et* B *sont congrus et si* AC *est une rotation non banale,* AC *et* BC *sont congrus.*

Il résulte des hypothèses que lorsque A est une translation, B en est une également et que C est une rotation non banale.

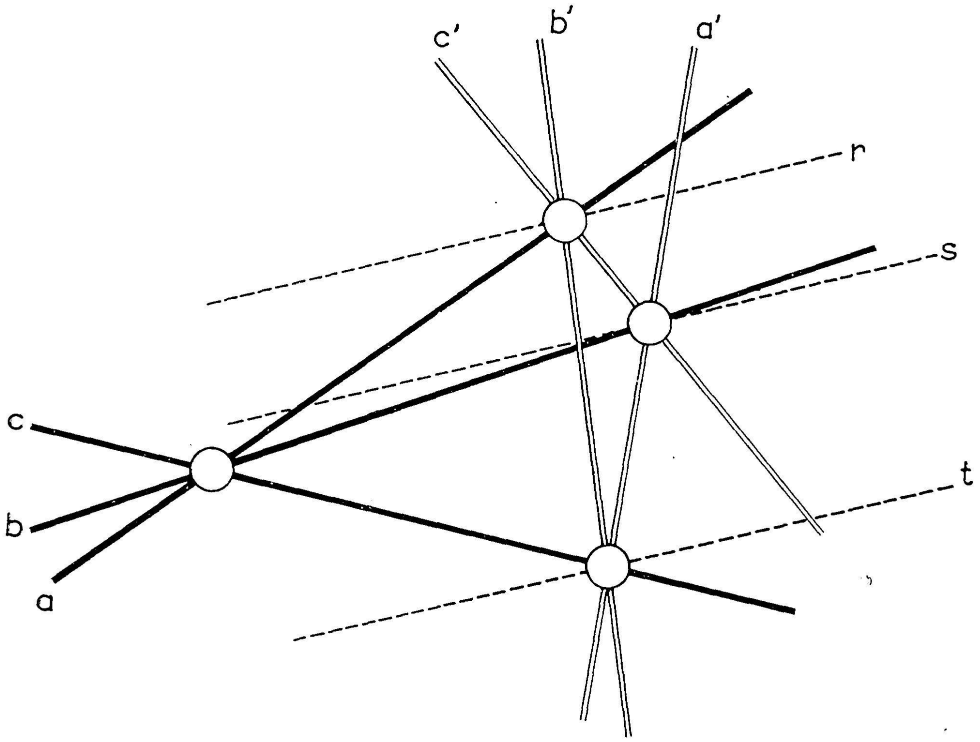

Fig. 4.

Dans ce cas, la conclusion découle immédiatement de la proposition 18. Plaçons-nous donc dans le cas où A est une rotation non banale autour d'un faisceau de première classe Φ. En vertu du théorème 1 et de la proposition 18, il existe trois translations T, T' et T'' ainsi qu'une rotation R autour de Φ telles que:

$$B = TA\,; \quad C = T'R\,; \quad AC = AT'R = T''AR\,;$$
$$BC = TAT'R = TT''AR\,.$$

Il résulte du fait que AC n'est pas une rotation banale qu'il en est de même de AR et, par suite, de BC. En vertu de la proposition 18, AC et BC sont congrues à AR, donc congrues entre elles. C.Q.F.D.

2.5. Il nous faut encore établir deux propositions dont les conséquences algébriques se révèlent importantes. La première a trait à une propriété élémentaire des angles du quadrilatère inscriptible. La deuxième est connue sous le nom de « théorème de Pappus ».

Considérons quatre faisceaux de première classe tels que trois quelconques d'entre eux n'aient pas d'élément commun. Les intersections de ces faisceaux pris par paires déterminent six réflexions distinctes qui sont les *côtés* d'un *quadrangle complet.* Désignons par a, b et c les trois côtés appartenant à l'un des quatre faisceaux. Soit a' l'élément commun aux deux faisceaux ne contenant pas a. Nous dirons que a et a' sont *opposés.* Introduisons de même les côtés b' et c' respectivement opposés à b et c. Nous désignerons le quadrangle complet considéré par $(a, a'; b, b'; c, c')$.

Proposition 21. *Dans un quadrangle complet donné, on considère toutes les congruences de la forme* ab $\sim$ b'a' *où* a, b, a' *et* b' *sont quatre côtés distincts du quadrangle complet,* a' *et* b' *étant respectivement opposés à* a *et* b. *La validité de l'une de ces congruences entraîne celle de toutes les autres.*

Soit a, b et c trois côtés incidents du quadrangle complet et soit a', b' et c' les côtés respectivement opposés. On peut écrire les incidences suivantes: $\iota(a, b, c)$, $\iota(b', a, c')$, $\iota(c', b, a')$ et $\iota(a', c, b')$. Introduisons les réflexions:

$$r = b'ac' \qquad s = c'ba' \qquad t = a'cb'$$

Elles sont incidentes, car:

$$rst = b'.abc.b' .$$

Remarquons que t coupe b' car sinon a et c' seraient confondus, ce qui est impossible dans un quadrangle complet. Comme a, b et a' ne sont pas incidents, t est distinct de rst.

Admettons maintenant que ab et $b'a'$ soient congrus. Alors:

$$b'.rst.b'c = ab \sim b'a' . \tag{1}$$

Comme $b'a'.cb' = b't$ est une rotation non banale, la proposition 20 permet de déduire de (1) que $b'rst$ est congru à $b't$. Il découle alors de la proposition 19 que rst est parallèle à t. Puisque rst et t sont distincts, r, s et t sont parallèles. On tire de là:

$$ac' = ar.rc' = a.rb'.a \sim b'r \sim b't = b'.a'c.b' \sim ca' .$$

On peut établir de la sorte toutes les congruences annoncées.

C.Q.F.D.

On remarque que la démonstration précédente revient essentiellement à établir un fait bien connu concernant l'image du cercle circonscrit au triangle de base dans une transformation isogonale.

Soit r et s deux réflexions distinctes. Soit un cycle de six faisceaux de première classe distincts, différents de $\Phi(r, s)$, numérotés de 1 à 6, et tels que les faisceaux portant un numéro impair contiennent r, les autres contenant s. Introduisons les réflexions a, b, c, a', b' et c' représentant les intersections respectives des faisceaux 1 et 2, 2 et 3, 3 et 4, 4 et 5, 5 et 6, 6 et 1; elles constituent un *hexagone inscrit dans la paire* (r, s) dont elles sont les *côtés*; a', b' et c' sont les côtés respectivement *opposés* à a, b et c (voir fig. 5).

PROPOSITION 22. (Théorème de Pappus). *Lorsque, dans un hexagone inscrit dans une paire de réflexions, deux paires de côtés opposés sont formées d'éléments parallèles, il en est de même de la troisième paire.*

Reprenons les éléments de la figure 5. Il existe dans le faisceau 3 un élément a_1 tel que:

$$ra_1 \sim as . \tag{2}$$

Comme a coupe r, a_1 coupe s en vertu de la proposition 19. Appelons b_1 l'intersection du faisceau 1 et de $\Phi(a_1, s)$. Lorsque

a_1 est différent de b, on voit apparaître le quadrangle complet $(r, s; a, a_1; b, b_1)$; à cause de (2):

$$bs \sim rb_1 \quad (3) \qquad\qquad ar \sim sa_1 \quad (4)$$

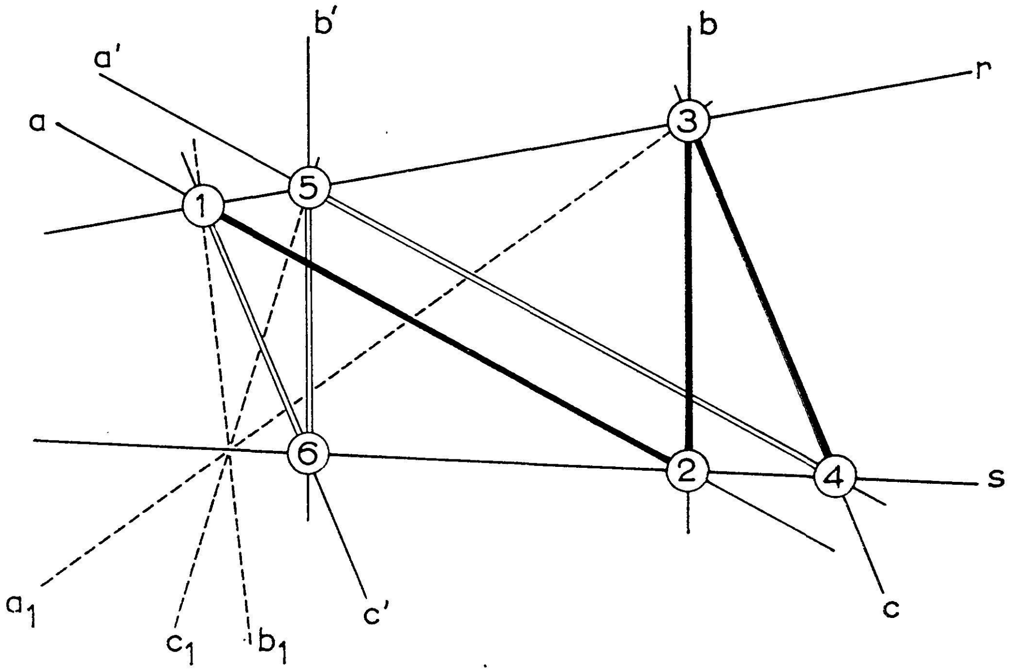

Fig. 5.

Lorsque a_1 se confond avec b, b_1 se confond avec a. En faisant usage de la proposition 20, on tire de (2):

$$bs = a_1\, s \sim a.sa_1.a \sim ra_1.a_1\, a = ra = rb_1\,,$$

puis:

$$ar = b_1\, r \sim sb = sa_1\,,$$

ce qui redonne encore (3) et (4).

Admettons maintenant que a et a' sont parallèles. On déduit alors de (4) et (2) que:

$$a'\, r \sim ar \sim sa_1 \quad (5) \qquad\qquad a'\, s \sim as \sim ra_1 \quad (6)$$

Désignons par c_1 l'intersection du faisceau 5 et de $\Phi(a_1, s)$. Lorsque a_1 est différent de c, on considère le quadrangle complet $(r, s; a', a_1; c, c_1)$, et (5) permet d'écrire:

$$rc \sim c_1\, s\,. \qquad (7)$$

Quand a_1 se confond avec c, c_1 se confond avec a'. Dans ce cas, la relation (7) se déduit immédiatement de (6).

Introduisons alors l'hypothèse selon laquelle b et b' sont parallèles. On tire de (3):

$$b' s \sim bs \sim rb_1 . \tag{8}$$

Lorsque b_1 est distinct de c', on voit apparaître le quadrangle complet $(r, s; b', b_1; c', c_1)$. La relation (8) entraîne alors:

$$rc' \sim c_1 s . \tag{9}$$

Lorsque b_1 est confondu avec c', c_1 se confond avec b' et la relation (9) se déduit immédiatement de (8). Comparons alors les relations (7) et (9); la proposition 19 permet d'affirmer que c et c' sont parallèles. C.Q.F.D.

Les démonstrations des propositions 21 et 22 peuvent être considérées comme classiques (voir par exemple [3], pp. 17-19).

2.6. Nous nous disposons à construire une famille de transformations agissant dans le groupe $\mathcal{T}$ des translations: les homothéties. Nous montrerons que ces homothéties constituent un corps K et que $\mathcal{T}$ peut être regardé comme un espace vectoriel sur K. Pour notre construction, nous nous appuierons sur les propriétés de la projection dans une direction donnée, que nous allons définir maintenant.

Soit u et v deux réflexions quelconques et soit d une réflexion coupant v. Nous appellerons *projection de* Π(u) *dans* Π(v) *suivant la direction* d l'application P définie ainsi: soit $x \in \Pi(u)$; l'élément p parallèle à d dans $\Phi(u, x)$ coupe v; soit x' l'élément de $\Pi(v)$ contenu dans $\Phi(v, p)$; alors $P(x) = x'$. Lorsque d coupe également u, la projection P est bijective et nous la qualifierons de *régulière*. En revanche, quand d est parallèle à u, la projection P envoie tout élément de $\Pi(u)$ sur l'élément de $\Pi(v)$ incident avec u et v; P est alors dite *singulière*. Nous n'aurons pas d'autres projections à considérer par la suite que les deux espèces que nous venons de décrire.

Proposition 23 (Théorème de Thalès). *Soit* u *et* v *deux réflexions quelconques. Soit* P *une projection régulière de* Π(u) *sur* Π(v). *L'application:*

$$zy \to P(z)\,P(y) \qquad \forall y\,,\, z \in \Pi(u)\,,$$

est un isomorphisme de τ(u) *sur* τ(v).

Commençons par deux remarques. Choisissons une réflexion p dans $\Pi(u)$. Toute translation prise dans $\tau(u)$ peut se mettre sous la forme xp, où $x \in \Pi(u)$. Il suffira de démontrer que l'application:

$$P' : xp \to P(x)\,P(p) \qquad \forall x \in \Pi(u)\,,$$

est un isomorphisme de $\tau(u)$ sur $\tau(v)$. En effet, dans ce cas, si y et z sont deux éléments de $\Pi(u)$ tels que $xp = zy$, l'application P' envoie $xp = pyzp$ sur $P(p)P(y)P(z)P(p) = P(z)P(y)$.

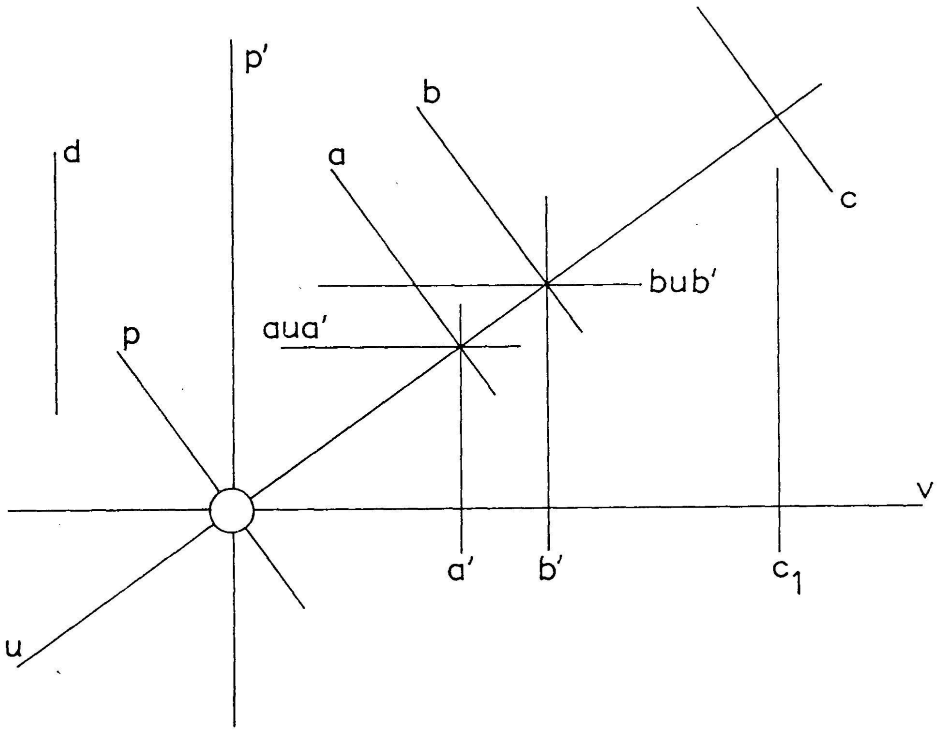

Fig. 6.

Prenons ensuite la réflexion t perpendiculaire à la direction d de P dans $\Phi(u, p)$ et la réflexion t' perpendiculaire à d dans $\Phi(p', v)$, où $p' = P(p)$. La projection P est le produit de trois projections régulières de direction d: la première de $\Pi(u)$ sur $\Pi(t)$, la deuxième de $\Pi(t)$ sur $\Pi(t')$ et qui est d'ailleurs l'application identique de $\Pi(t)$ sur lui-même, et la troisième de $\Pi(t')$ sur $\Pi(v)$. On voit par là que la proposition sera démontrée dès que l'on aura établi sa validité dans le cas particulier suivant: les réflexions u et v se coupent; la projection de $\Pi(u)$ sur $\Pi(v)$ se fait suivant une direction perpendiculaire à v et p est l'élément de $\Phi(u, v)$ perpendiculaire à u.

La projection P étant régulière, l'application P' est bijective. Elle envoie l'élément neutre de $\tau(u)$ sur celui de $\tau(v)$. Prenons deux éléments a et b dans $\Pi(u)$ et posons $c = bpa$. On a évidemment:

$$cp = bp.ap\,.$$

Soit alors a', b' et p' les images de a, b et p par P, et posons $c_1 = b'p'a'$. Comme la direction de P est perpendiculaire à v, quelle que soit x dans $\Pi(u)$, les réflexions x, u et $P(x)$ sont incidentes. Pour prouver que P' est un isomorphisme, il suffit de montrer que c_1 est l'image de c par P, autrement dit que c, u et c_1 sont incidentes. Or on peut écrire:

$$cuc_1 = apb.u.b'p'a'\,.$$

Le lemme de la proposition 11 permet d'affirmer que la réflexion bub' est perpendiculaire à p'. Elle commute donc avec p' et a'. Par suite:

$$cuc_1 = ap.p'a'.bub'\,.$$

Mais on peut remplacer p par upu et pup' par v. D'où:

$$cuc_1 = auva'.bub' = aua'.v.bub'\,,$$

si l'on tient compte du fait que a' est perpendiculaire à v. Comme aua' et bub' sont des réflexions parallèles à v, cuc_1 est une réflexion. C.Q.F.D.

Il est clair que la proposition précédente doit être mise en relation avec le « petit » théorème de Thalès, celui qui exprime la conservation du rapport des segments collinéaires commensurables dans la projection parallèle.

2.7. Nous avons déjà rencontré un isomorphisme « naturel » P'_0 entre $\tau(u)$ et $\tau(v)$ dans le cas où u et v sont distincts; on peut l'obtenir en posant:

$$P'_0 : T \to mTm \qquad \forall T \in \tau(u)\,,$$

où m est un élément bissecteur de u et v. Il est facile de voir que P'_0 coïncide avec l'isomorphisme associé à la projection de $\Pi(u)$

sur $\Pi(v)$ suivant la direction perpendiculaire à m. Quand u et v se coupent, il existe un second isomorphisme naturel de $\tau(u)$ sur $\tau(v)$; il est associé à la projection de $\Pi(u)$ sur $\Pi(v)$ suivant la direction m. On l'obtient aussi en considérant l'application qui à T fait correspondre l'inverse de P_0' (T).

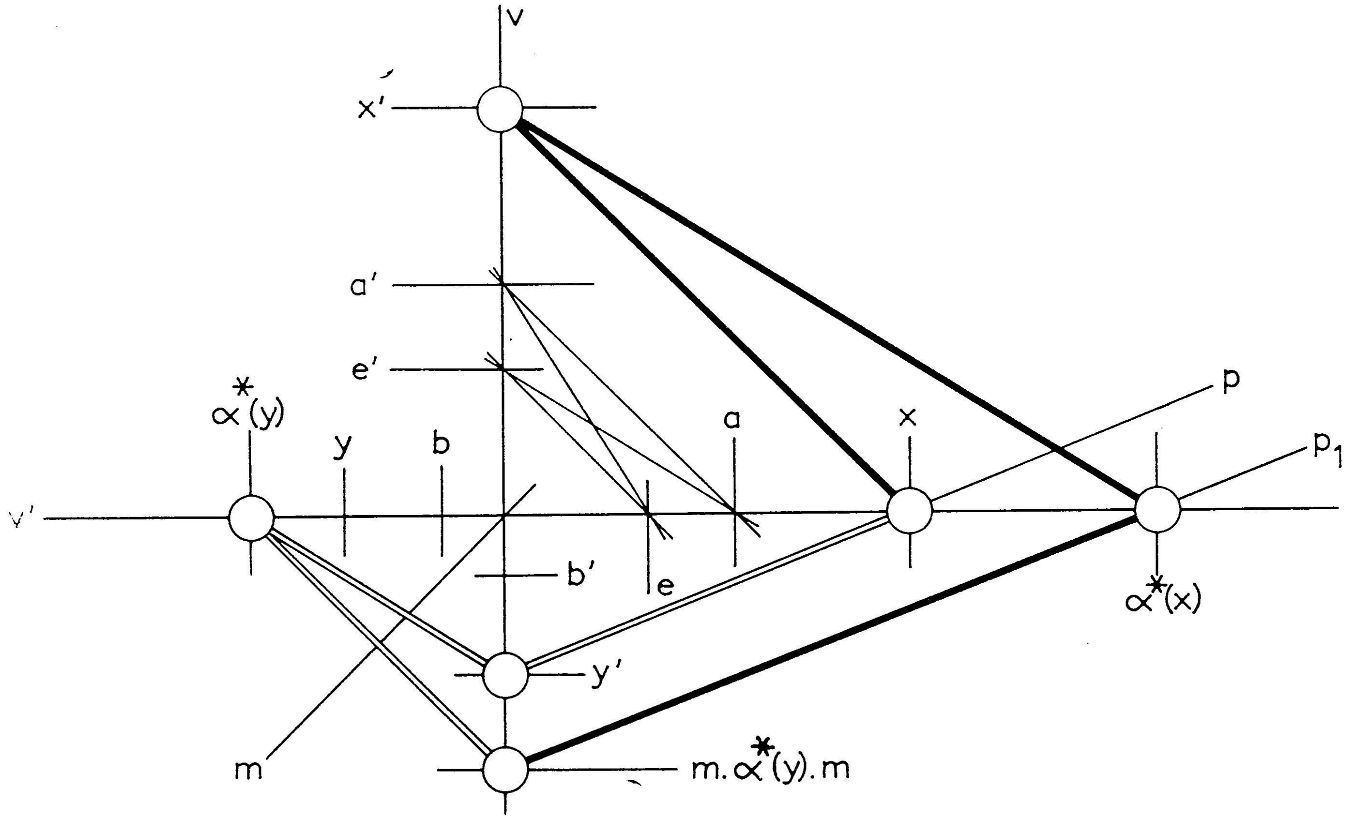

Fig. 7.

Il résulte de ce qui précède que, lorsqu'on compose l'isomorphisme naturel P_0' avec l'inverse d'un des isomorphismes considérés sous 2.6, on obtient un automorphisme de $\tau(u)$. Nous allons étudier la famille d'automorphismes ainsi déterminée. Pour plus de commodité, nous substituerons à u et v des réflexions perpendiculaires v' et v. Nous verrons que cette restriction n'est pas essentielle; elle permet toutefois d'adopter des notations plus simples. D'autre part, nous ne nous servirons pas directement des isomorphismes P' considérés plus haut, mais des projections P qui servent à les construire.

Choisissons donc deux réflexions perpendiculaires v' et v, ainsi que l'un de leurs éléments bissecteurs m. D'une façon générale, les éléments pris dans $\Pi(v')$ seront désignés par des lettres minuscules ordinaires, tandis que les éléments de $\Pi(v)$

qui leur correspondent par la projection de direction perpendiculaire à m seront désignés par les mêmes minuscules accentuées.

Soit a et b deux éléments de $\Pi(v')$, a étant distinct de v. La projection de $\Pi(v')$ dans $\Pi(v)$ qui applique a sur $b' = mbm$ sera notée $P(a, b')$. De même, $P(a', b)$ est la projection de $\Pi(v)$ dans $\Pi(v')$ qui envoie $a' = mam$ sur b. Lorsque $b \neq v$, on a:

$$P(a, b') = [P(b', a)]^{-1}.$$

Choisissons une fois pour toutes un élément e différent de v dans $\Pi(v')$. La projection $P(e, e')$ n'est autre que l'application $x \to x' = mxm$ de $\Pi(v')$ sur $\Pi(v)$. D'une façon générale, on peut écrire, pour tout s dans $\Pi(v')$:

$$P(e, s')(v) = v'\,;\ P(e', s)(v') = v,$$
$$P(e', e) \circ P(e, s') = P(e', s) \circ P(e, e').$$

En vertu de cette dernière relation, associons à tout élément s de $\Pi(v')$ une application σ^* de $\Pi(v')$ dans lui-même définie par:

$$\sigma^* = P(e', s) \circ P(e, e') = P(e', e) \circ P(e, s'), \tag{1}$$

appelée *dilatation de* Π(v') *associée à* s. Elle est dite *régulière* lorsqu'elle est biunivoque, c'est-à-dire lorsque $s \neq v$. C'est le cas, en particulier, quand $s = e$, où elle se confond avec l'application identique de $\Pi(v')$ sur lui-même; cette dilatation est notée 1^*. Lorsque $s = v$, la dilatation est *singulière*; elle envoie chaque élément de $\Pi(v')$ sur v. Elle se note 0^*. L'ensemble de toutes les dilatations de $\Pi(v')$ définies par (1) sera désigné par K^*; il dépend du choix de v et de e dans $\Pi(v')$. Si α^* et β^* sont deux éléments de K^*, nous désignons par $\beta^*.\alpha^*$ l'application obtenue en effectuant successivement α^* puis β^*. C'est à cette loi de composition qu'il est fait allusion dans l'énoncé suivant.

Proposition 24. *Le produit des dilatations détermine une structure de groupe abélien dans l'ensemble des éléments réguliers de* K*.

Prenons dans $\Pi(v')$ deux éléments a et b distincts de v, et soit α^* et β^* les dilatations qui leur sont associées dans K^*.

Montrons d'abord que $\beta^*.\alpha^* = \alpha^*.\beta^*$. Prenons dans $\Pi(v')$ un élément quelconque x. Nous pouvons écrire:

$$\beta^*.\alpha^*(x) = P(e', e) \circ P(e, b') \circ P(e', a) \circ P(e, e')(x),$$

$$\alpha^*.\beta^*(x) = P(e', a) \circ P(e, b')(x).$$

en tenant compte des relations (1). Lorsque x est confondu avec v, les seconds membres des égalités ci-dessus sont tous deux égaux à v. Prenons donc $x \neq v$, et posons $y = \beta^*(x)$. Les faisceaux de première classe $\Phi(v', x)$, $\Phi(v, x')$, $\Phi(v', \alpha^*(x)v)$, $\Phi(, m.\alpha^*(y).m)$, $\Phi(v', \alpha^*(y)\,)$ et $\Phi(v, y')$ pris dans cet ordre déterminent un hexagone inscrit dans la paire $('v, v)$, (voir fig. 7). L'intersection du premier et du deuxième faisceau est perpendiculaire à m, comme celle du quatrième et du cinquième. L'intersection du deuxième et du troisième faisceau est parallèle à la direction de $P(e', a)$, comme celle du cinquième et du sixième. Le théorème de Pappus permet donc d'affirmer que les deux côtés restants, soit p et p_1 sur la figure 7, sont aussi parallèles. Nous pouvons donc écrire:

$$P(e, b')[\alpha^*(x)] = P(e, e')[\alpha^*(y)].$$

D'où:

$$\beta^*.\alpha^*(x) = \alpha^*.\beta^*(x) \qquad \forall x \in \Pi(v'). \tag{2}$$

Donc $\beta^*.\alpha^* = \alpha^*.\beta^*$. Remarquons encore qu'en posant $x = e$, on tire de (2) la relation:

$$\beta^*(a) = \alpha^*(b), \tag{3}$$

qui reste vraie lorsque α^* et β^* sont singulières.

Montrons maintenant qu'il existe dans $\Pi(v')$ un élément $c \neq v$ tel que la dilatation γ^* associée à c dans K^* soit confondue avec l'application $\alpha^*.\beta^*$. Prenons en effet $c = \alpha^*(b)$. Soit x un élément quelconque de $\Pi(v')$; désignons par ξ^* la dilatation associée à x dans K^*. En vertu de (3), on peut écrire:

$$\alpha^*.\beta^*(x) = \alpha^*.\xi^*(b) = \xi^*.\alpha^*(b) = \xi^*(c) = \gamma^*(x).$$

Comme cette relation reste vraie quel que soit x dans $\Pi(v')$, $\alpha^*.\beta^*$ est une dilatation régulière prise dans K^*.

Le produit introduit dans K^* est associatif puisqu'il est défini par la composition des dilatations. La dilatation 1^* joue manifestement le rôle d'élément neutre. Enfin l'inverse de la dilatation $\alpha^* = P(e', e) \circ P(e, a')$, où $a \neq v$ dans $\Pi(v')$, est la dilatation $P(a', e) \circ P(e, e')$. Les éléments réguliers de K^* constituent donc un groupe abélien pour le produit considéré. C.Q.F.D.

Remarquons que si l'on se donne un élément quelconque d dans $\Pi(v')$, il existe une dilatation et une seule dans K^* qui envoie e sur d. Cette dilatation est régulière quand d est distinct de v. Par suite, si l'on se donne arbitrairement deux éléments f et g dans $\Pi(v')$, f étant différent de v, il existe dans K^* une dilatation et une seule qui applique f sur g.

2.8. Adoptons les mêmes notations qu'au numéro précédent. Soit S une translation de direction v'. Il existe dans $\Pi(v')$ un élément s bien déterminé tel que $S = sv$. Soit σ^* la dilatation associée à s dans K^*. Nous appellerons *homothétie de* τ(v') *associée à* S l'application σ de $\tau(v')$ dans lui-même définie par:

$$\sigma : \qquad xv \to \left[\sigma^*(x)\right] v \qquad \forall x \in \Pi(v'). \tag{4}$$

Comme σ^* est un produit de projections et que $\sigma^*(v) = v$, la proposition 23 permet d'affirmer que σ est un endomorphisme de $\tau(v')$. Lorsque $S \neq I$, l'homothétie σ est un automorphisme de $\tau(v')$ et elle est dite *régulière.* En particulier, l'homothétie correspondant à la translation $E = ev$ est l'automorphisme identique de $\tau(v')$, que nous désignerons par le symbole 1. Lorsque S est la translation banale, l'homothétie correspondante applique tout élément de $\tau(v')$ sur I; elle est dite *singulière* et elle est notée 0. L'ensemble des homothéties de $\tau(v)'$ définies par (4), où σ^* parcourt K^*, sera désigné par K.

On introduit une loi de composition interne dans K appelée *multiplication* en faisant correspondre à tout élément (α, β) de $K \times K$ l'application de $\tau(v')$ dans lui-même définie par:

$$\beta.\alpha(X) = \beta(\alpha(X)) \qquad \forall X \in \tau(v'). \tag{5}$$

Cela découle de la proposition 24 et de la définition (4). Il résulte également de là que les éléments réguliers de K forment un groupe abélien vis-à-vis de la multiplication, l'élément neutre étant évidemment 1. De plus, quel que soit σ dans K, on peut écrire: $\sigma.0 = 0.\sigma = 0$.

Les homothéties que nous venons de définir étant des endomorphismes de $\tau(v')$, on peut associer à toute paire d'éléments α et β de K un endomorphisme de $\tau(v')$ noté $\alpha+\beta$ et défini par:

$$\alpha+\beta : \qquad X \to \alpha(X)\beta(X) \qquad \forall X \in \tau(v') . \tag{6}$$

Montrons que l'on introduit par là une loi de composition interne dans K. En effet, soit A et B les éléments de $\tau(v')$ auxquels sont associées les homothéties α et β. Il existe dans $\Pi(v')$ deux réflexions a et b telles que $A = av$ et $B = bv$. Prenons dans $\tau(v')$ une translation quelconque $X = xv$, avec $x \in \Pi(v')$; désignons par ξ^* la dilatation associée à x dans K^* et par ξ l'homothétie associée à X dans K. On peut écrire:

$$(\alpha+\beta)(X) = [\alpha^*(x)]v\,[\beta^*(x)]v ,$$

puis, en tenant compte de (3):

$$\begin{aligned}[\alpha^*(x)]v\,[\beta^*(x)]v = [\xi^*(a)]v\,[\xi^*(b)]v = \xi(A)\,\xi(B) = \xi(AB)\\ = [\xi^*(avb)]v .\end{aligned}$$

Posons $c = avb$ et $C = avbv = AB$. Soit γ^* la dilatation associée à c dans K^* et γ l'homothétie associée à C dans K. Il vient:

$$[\xi^*(avb)]v = [\xi^*(c)]v = [\gamma^*(x)]v = \gamma(X) .$$

En bref:

$$(\alpha+\beta)(X) = \gamma(X) .$$

Cette relation étant vraie quel que soit X dans $\tau(v')$, on voit que $\alpha+\beta$ appartient à K. Nous venons de définir une *addition* dans K. Plus précisément, nous voyons que $\alpha+\beta$ est l'élément de K associé à la translation AB; comme il résulte de (1) et de (4) que l'application $S \to \sigma$ de $\tau(v')$ dans K est bijective, on peut affirmer que K est un groupe additif isomorphe à $\tau(v')$.

Montrons que K est un corps relativement aux opérations qui y ont été définies. Pour cela il reste à établir que la multiplication y est distributive par rapport à l'addition. Prenons trois éléments α, β et γ dans K et une translation X dans $\tau(v')$. On peut écrire:

$$[\alpha.(\beta+\gamma)](X) = \alpha[\beta(X)\gamma(X)] = \{\alpha[\beta(X)]\}\{\alpha[\gamma(X)]\} =$$
$$= [(\alpha.\beta)(X)][(\alpha.\gamma)(X)] = (\alpha.\beta+\alpha.\gamma)(X).$$

Donc $\alpha.(\beta+\gamma) = \alpha.\beta+\alpha.\gamma$. Nous pouvons énoncer le théorème suivant:

Théorème 2. *L'ensemble* K *des homothéties de $\tau(v')$ est un corps commutatif.*

Remarquons que le corps K ne dépend pas du choix de v et de e dans $\Pi(v')$, pourvu que $e \neq v$. En effet, si l'on substituait à v et e deux éléments v_1 et e_1 de $\Pi(v')$ tels que $e_1 v_1 = ev$, on pourrait recommencer à partir de v_1 et e_1 la construction d'un corps K_1 comme on l'a fait pour K à partir de v et e. Désignons par w l'élément de $\Pi(v')$ déterminé par $wvw = v_1$. Le passage de la première construction à la deuxième se ferait en remplaçant toute réflexion r apparaissant dans la construction de K par $T^{-1}rT$, où T est la translation vw. Or la transformation $X \to T^{-1}XT$ induit dans $\tau(v')$ l'automorphisme identique. D'où l'on déduit que les corps obtenus K et K_1 sont isomorphes. D'autre part, on vérifie sans peine que le choix de e n'intervient pas essentiellement dans la définition d'une homothétie, celle-ci étant entièrement déterminée par son effet sur une translation différente de I dans $\tau(v')$. On pourrait donc, en conservant v, remplacer e par n'importe quelle réflexion $f \neq v$ dans $\Pi(v')$.

Il apparaît clairement que les définitions (5) et (6) font de $\tau(v')$ un espace vectoriel sur le corps K. Nous désignerons donc dès maintenant K comme le *corps de base*. Par ailleurs, il découle des remarques faites à la fin de 2.7 que si l'on se donne deux translations T et S dans $\tau(v')$, avec $S \neq I$, il existe dans K une homothétie unique α telle que $\alpha(S) = T$. Ainsi $\tau(v')$ est un espace vectoriel de dimension 1 sur K.

Donnons une propriété importante de K.

Proposition 25. *L'élément —1 n'est pas un carré dans le corps de base* K.

Il est évident que $0^2 \neq -1$. Prenons donc dans K un élément non nul δ et montrons que $\delta^2 \neq -1$. Reprenons les éléments de la figure 7 et les définitions qui s'y rapportent. Il existe dans $\Pi(v')$ une réflexion $d \neq v$ telle que δ soit l'homothétie associée à la translation dv. Soit δ^* la dilatation attachée à d dans K^*. Désignons comme d'habitude par d' l'élément mdm et posons:

$$\{r\} = \Phi(v', e) \cap \Phi(v, d'); \quad \{s\} = \Phi(v, e') \cap \Phi(v', d).$$

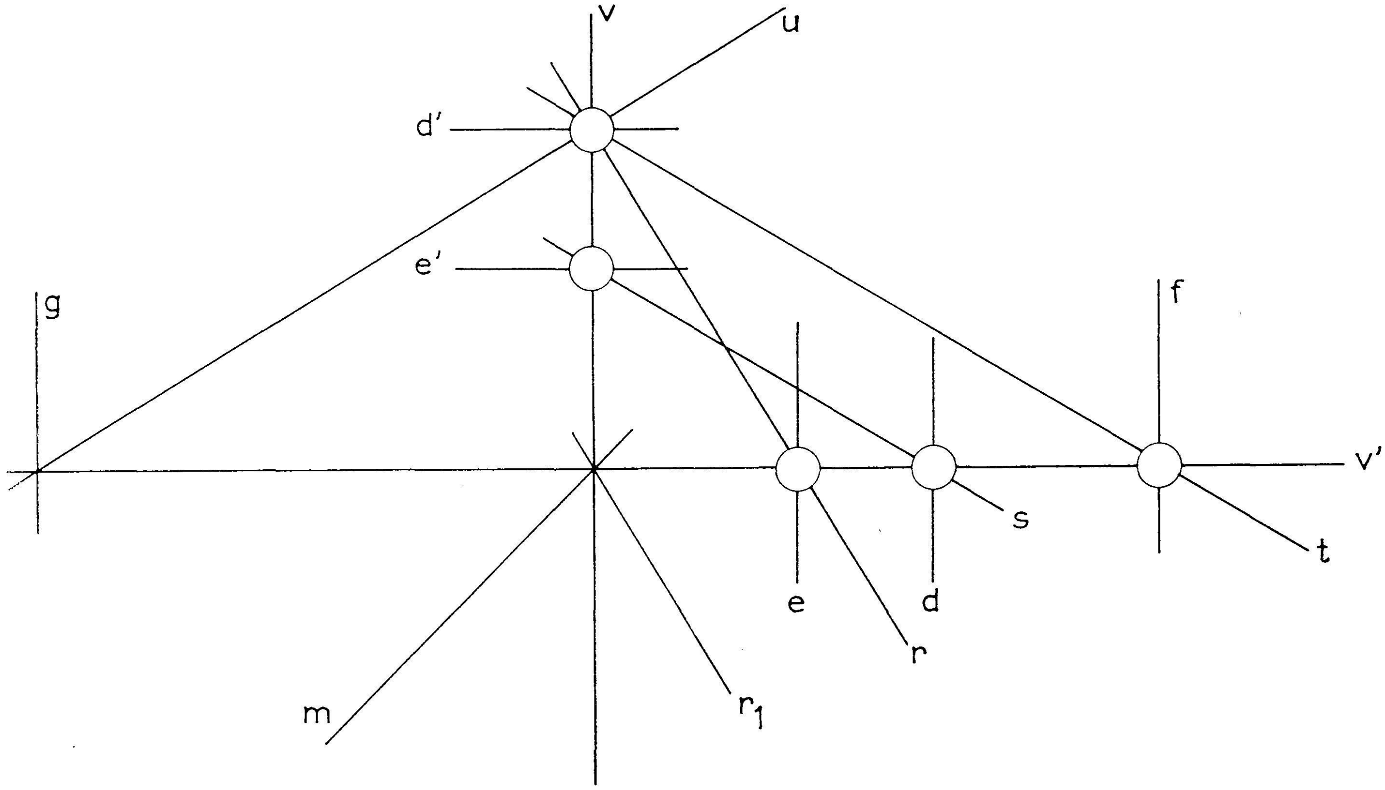

Fig. 8.

On voit immédiatement que $s = mrm$. Désignons par t l'élément de $\Phi(v, d')$ parallèle à s, par r_1 l'élément de $\Phi(v', v)$ parallèle à r et par u l'élément vtv. Il est clair que u est parallèle à $vsv = vmrmv$ qui est lui-même parallèle à vmr_1mv. D'autre part:

$$vmr_1\, mv = vmvmr_1 = vv'\, r_1 .$$

En vertu du lemme de la proposition 11, $vv'r_1$ est perpendiculaire à r_1, donc à r. Par suite u est perpendiculaire à r.

Désignons alors par f l'élément de $\Phi(v', t)$ perpendiculaire à v' et posons $g = vfv$. Par construction:

$$f = (\delta^*)^2\,(e).$$

Donc:

$$\delta^2\,(ev) = fv\,; \qquad (-\delta^2)\,(ev) = vf = gv\,.$$

Supposons par absurde que $-\delta^2 = 1$. Cela entraînerait $g = e$. Comme les faisceaux $\Phi(v', e)$ et $\Phi(v, d')$ sont distincts, r serait confondu avec u, contrairement à ce qui a été montré plus haut.

C.Q.F.D.

Il convient de retenir au passage le procédé permettant de construire une réflexion perpendiculaire à n'importe quel élément de $\Phi(v', e)$ distinct de v' et de e.

2.9. Nous sommes maintenant en mesure d'introduire dans le groupe $\mathcal{T}$ de toutes les translations une structure d'espace vectoriel sur K. Cela se fait en prolongeant à $\mathcal{T}$ les homothéties définies dans un sous-groupe $\tau(v')$ de $\mathcal{T}$.

Reprenons les éléments de la figure 7. Soit α^* une dilatation de $\Pi(v')$ prise dans K^*. L'application:

$$y' \to m\left(\alpha^*(my'm)\right)m\,, \qquad \forall y' \in \Pi(v)\,,$$

peut être considérée comme une dilatation de $\Pi(v)$ obtenue « par réflexion » à partir de celle de $\Pi(v')$; nous la désignerons encore par α^*. Nous allons examiner un procédé permettant de passer de l'une à l'autre de ces dilatations par certaines projections de $\Pi(v')$ dans $\Pi(v)$.

Plaçons-nous dans le cas où α^* est régulière et où $y' \neq v'$. Posons $y = my'm$ et choisissons un élément $x \neq v$ dans $\Pi(v')$. Il existe une dilatation régulière β^* de $\Pi(v')$ prise dans K^* qui applique x sur y. Nous retrouvons exactement la disposition de la figure 7, et si nous posons:

$$\{p\} = \Phi(v', x) \cap \Phi(v, y')$$

$$\text{et} \qquad \{p_1\} = \Phi(v', \alpha^*(x)) \cap m\,\Phi\left(v, \alpha^*(y')\right),$$

nous pouvons affirmer que p et p_1 sont deux réflexions parallèles. Ainsi la projection de $\Pi(v')$ dans $\Pi(v)$ qui applique x sur y' envoie $\alpha^*(x)$ sur $\alpha^*(y')$. Cette affirmation est banale quand α^* est singulière et quand $y' = v'$.

Il est clair qu'on obtient une homothétie de $\tau(v)$ lorsqu'on forme l'application:

$$y'v' \to \alpha^*(y')v' \qquad \forall y' \in \Pi(v)\,.$$

Nous la désignerons encore par α.

Considérons alors une translation T. On peut la décomposer canoniquement en un produit $T_{v'}T_v$, où $T_{v'} \in \tau(v')$ et $T_v \in \tau(v)$. Introduisons l'application:

$$T \rightarrow \alpha(T_{v'})\,\alpha(T_v) \qquad \forall T \in \mathscr{T}.$$

En vertu de la proposition 15, cette application est un endomorphisme de $\mathscr{T}$. Ses restrictions à $\tau(v')$ et $\tau(v)$ se confondent avec ce que nous avons désigné par α. Nous pouvons donc la désigner par la même lettre et dire que c'est une *homothétie de* $\mathscr{T}$.

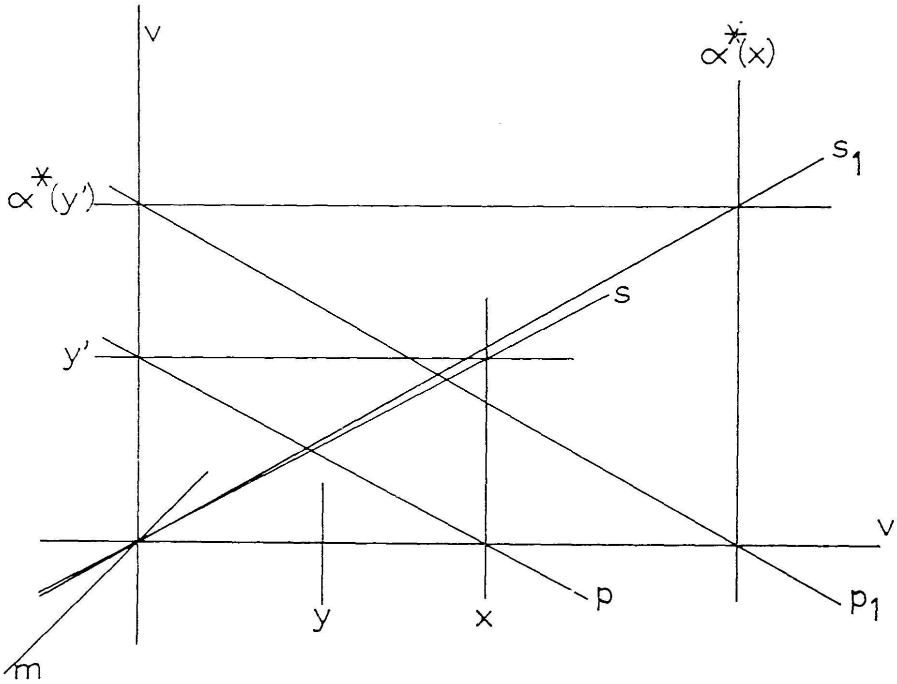

Fig. 9.

C'est un automorphisme de $\mathscr{T}$ et elle est dite *régulière* quand sa restriction à $\tau(v')$ est régulière. Sinon elle est dite *singulière* et elle applique tout élément de $\mathscr{T}$ sur I.

Examinons l'effet d'une homothétie régulière α de $\mathscr{T}$ sur une translation T n'appartenant ni à $\tau(v')$, ni à $\tau(v)$. Si $T = T_{v'}\, T_v$ est la décomposition canonique de T suivant $\tau(v')$ et $\tau(v)$, posons:

$$T_{v'} = y'v', \quad y' \in \Pi(v); \quad T_v = yv, \quad y \in \Pi(v').$$

Alors:

$$\alpha(T) = \alpha^*(y')\,\alpha^*(x)\,v'v.$$

Posons:

$$\{s\} = \Phi(v, v') \cap \Phi(x, y'); \quad \{s_1\} = \Phi(v, v') \cap \Phi(\alpha^*(x), \alpha^*(y')).$$

Les réflexions s et s_1 sont les directions respectives de T et de $\alpha(T)$. Considérons les quadrangles complets $(v', y'; v, x; p, s)$ et $(v', \alpha^*(y'); v, \alpha^*(x); p_1, s_1)$. Dans le premier, $v'v$ et xy' sont congrus et v' est parallèle à y'; il résulte alors des propositions 21 et 19 que:

$$v' s \sim pv' .$$

Dans le second, $v'v$ est congru à $\alpha^*(x)\,\alpha^*(y')$ et $\alpha^*(y')$ est parallèle à v'; par suite:

$$v' s_1 \sim p_1 v' .$$

Mais comme p et p_1 sont parallèles, il résulte de la proposition 19 que $v's$ est congru à $v's_1$, puis que s et s_1 sont parallèles (autrement dit confondus, dans ce cas). Par conséquent, T et $\alpha(T)$ ont la même direction. Cette affirmation est banale quand α est singulière et quand T appartient à $\tau(v')$ ou à $\tau(v)$.

Ainsi, quelle que soit la réflexion s, le sous-groupe $\tau(s)$ de $\mathcal{T}$ est stable pour l'ensemble des homothéties de $\mathcal{T}$. D'autre part, si l'on se donne deux translations T_1 et T_2, avec $T_1 \neq I$, ainsi que l'image $\alpha(T_1)$ de T_1 par une homothétie α de $\mathcal{T}$, on peut construire $\alpha(T_2)$ par des projections. Donc si l'on se donne une paire ordonnée de translations de même direction, la première n'étant pas banale, il existe une homothétie de $\mathcal{T}$ et une seule qui applique la première translation sur la seconde.

De tout ce qui précède, nous déduisons que l'ensemble des homothéties de $\mathcal{T}$ consitue un corps isomorphe à K, que nous identifierons immédiatement à K. On peut écrire:

$$(\alpha+\beta)(X) = \alpha(X)\beta(X)\,; \qquad 0(X) = I \qquad \forall X \in T,$$
$$(\beta.\alpha)(X) = \beta(\alpha(X))\,; \qquad 1(X) = X$$

où α et β sont deux éléments quelconques de K. Ainsi $\mathcal{T}$ est muni d'une structure d'espace vectoriel de dimension 2 sur K. Nous désignerons cet espace vectoriel par $\mathcal{T}_K$ pour le distinguer du sous-groupe $\mathcal{T}$ de G. Les sous-espaces de dimension 1 de $\mathcal{T}_K$ sont donnés par les sous-groupes $\tau(s)$ de $\mathcal{T}$, où $s \in \Sigma$.

Soit E et F deux translations linéairement indépendantes dans $\mathcal{T}_K$. Toute translation T peut se mettre sous la forme:

$$T = \xi(E)\,\eta(F),$$

où ξ et η sont deux éléments de K univoquement déterminés par T. L'application $T \to (\xi, \eta)$ est un isomorphisme de $\mathcal{T}_K$ sur l'ensemble $K \times K$ muni de sa structure d'espace vectoriel sur K. Nous dirons que (ξ, η) est la paire de *coordonnées* de T relativement à la base (E, F). Le système de coordonnées ainsi introduit dans $\mathcal{T}_K$ est dit *orthonormal* quand E et F sont deux translations congrues de directions perpendiculaires.

Les propriétés des homothéties de $\mathcal{T}$ nous permettent d'affirmer que, lors de la construction des homothéties du groupe $\tau(v')$, le choix d'un élément v perpendiculaire à v' n'avait rien d'essentiel (voir fig. 7); nous aurions pu y remplacer v par n'importe quelle autre réflexion coupant v'.

2.10. Nous disposons d'assez de renseignements sur le groupe G pour en tirer les éléments d'une géométrie plane. Choisissons à nouveau deux réflexions perpendiculaires v' et v, l'un de leurs éléments bissecteurs m, et un élément $e \neq v$ dans $\Pi(v')$. Désignons par g le groupe de stabilité de $\Phi(v, v')$. Soit Φ un faisceau de première classe quelconque. Il existe au moins une réflexion s telle que $\Phi = s\Phi(v, v')s$, (coroll. 1, prop. 18). Le groupe de stabilité de Φ est sgs. L'intersection des sous-groupes sgs de G, où s parcourt Σ, se réduit à $\{I\}$ (coroll. 3, prop. 17). On peut donc définir la géométrie de G relativement à g (voir introduction). L'espace homogène G/g sera appelé le *plan*; ses éléments seront les *points*. Il existe entre le plan, le groupe $\mathcal{T}$, l'espace vectoriel $\mathcal{T}_K$, l'ensemble des demi-tours et celui des faisceaux de première classe des correspondances biunivoques « naturelles » que nous allons mettre en évidence.

Il résulte du corollaire 1 de la proposition 17 que l'on obtient toutes les classes (à gauche) de G suivant g en formant les classes Tg, où T parcourt $\mathcal{T}$. On détermine ainsi des correspondances biunivoques entre le plan, le groupe $\mathcal{T}$ et l'espace vectoriel $\mathcal{T}_K$. La classe Tg est celle qui contient le demi-tour D tel que $T = Dv'v$; elle n'en contient pas d'autre car g ne contient pas de translation non banale. On obtient de la sorte une correspondance parfaite entre les points du plan et les demi-tours. D'autre part, nous avons déjà relevé l'existence d'une correspondance biunivoque naturelle entre les demi-tours et les faisceaux de première classe (voir 2.2). Pour alléger le texte, convenons d'appeler *homologues* les éléments du plan, de $\mathcal{T}$, de $\mathcal{T}_K$, de l'ensemble des demi-tours et de celui des faisceaux de première classe qui se correspondent naturellement.

Posons $E = ev$ et $F = mv'Ev'm = mEm$. Comme v et v' sont perpendiculaires et que E et F sont congrues, le système de coordonnées associé à la base (E, F) de $\mathcal{T}_K$ est orthonormal. Nous appellerons *coordonnées* d'un point P (relativement au système (v', v, m, e)) les coordonnées (ξ, η) de la translation homologue à P, relativement à la base (E, F). Nous désignerons parfois ce point par $P(\xi, \eta)$.

Nous appellerons *droite* homologue à la réflexion s, et nous noterons $\bar{s}$ l'ensemble des points homologues aux faisceaux de première classe contenant s. Si $T_1 g$ est un point de $\bar{s}$, on obtient la droite $\bar{s}$ en formant l'ensemble des points $TT_1 g$, où T parcourt le groupe $\tau(s)$. On peut alors représenter paramétriquement une droite par $(\mu+\pi.\zeta;\ \mu'+\pi'.\zeta)$, où ζ est un élément parcourant K, où μ, π, μ' et π' sont des éléments déterminés de K, et où π et π' ne sont pas nuls en même temps. Convenons d'écrire dorénavant $\alpha\beta$ le produit de deux éléments α et β de K que nous notions jusqu'ici $\alpha.\beta$, aucune ambiguïté n'étant plus à craindre. Il résulte de ce qui précède qu'une droite $\bar{s}$ est l'ensemble des points dont les coordonnées (ξ, η) satisfont une équation de la forme:

$$(\bar{s}) \equiv \alpha\xi+\beta\eta+\gamma = 0\,; \quad \alpha\,,\beta\,,\gamma\in K\,; \quad (\alpha\,,\beta) \neq (0\,,0)\,. \qquad (1)$$

Réciproquement, l'ensemble des points dont les coordonnées (ξ, η) satisfont une équation de la forme (1) est une droite.

Deux droites $\bar{s}$ et $\bar{s}'$ sont dites *sécantes*, *parallèles* ou *perpendiculaires* en même temps que leurs réflexions homologues respectives s et s'. Soit:

$$(\bar{s}') \equiv \alpha'\xi+\beta'\eta+\gamma' = 0\,, \qquad (2)$$

l'équation de $\bar{s}'$. La condition de parallélisme de $\bar{s}$ et $\bar{s}'$ est donnée par:

$$\alpha\beta'-\alpha'\beta = 0\,. \qquad (3)$$

Montrons que la condition de perpendicularité de ces mêmes droites s'exprime par:

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' = 0 . \tag{4}$$

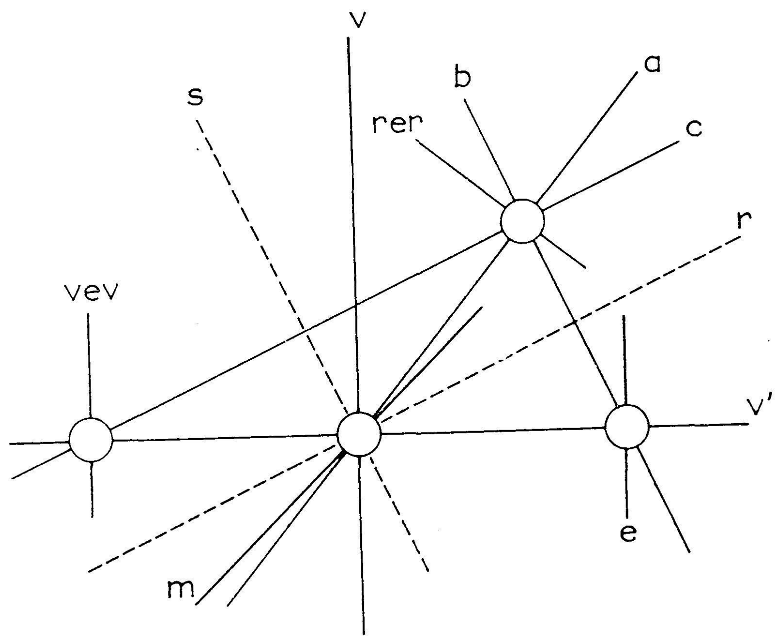

Fig. 10.

C'est le cas manifestement lorsque s et s' sont confondues avec v et v' respectivement, car alors $\beta = \alpha' = 0$. Pour examiner les autres cas, reportons-nous à la figure 8. La réflexion r est arbitrairement choisie parmi les éléments de $\Phi(v', e)$ différents de v' et de e. Elle appartient au faisceau $\Phi(v, d')$, où $d' \neq v'$; donc la droite homologue $\bar{r}$ contient les points de coordonnées (1, 0) et (0, δ), où $\delta \neq 0$. La réflexion u, qui est perpendiculaire à r, appartient aux faisceaux $\Phi(v, d')$ et $\Phi(v', g)$; donc la droite homologue $\bar{u}$ contient les points de coordonnées (0, δ) et $(-\delta^2, 0)$. Les équations respectives de $\bar{r}$ et $\bar{u}$ peuvent s'écrire:

$$(\bar{r}) \equiv \delta\xi + \eta - \delta = 0 ; \quad (\bar{u}) \equiv \xi - \delta\eta + \delta^2 = 0 .$$

Ces équations vérifient la condition (4). Réciproquement, toute droite dont l'équation jointe à celle de $\bar{r}$ satisfait la condition (4) est parallèle à $\bar{u}$; elle est donc perpendiculaire à $\bar{r}$. Comme la perpendicularité des droites $\bar{s}$ et $\bar{s}'$ et la condition (4) restent inaltérées lorsqu'on substitue à $\bar{s}$ et à $\bar{s}'$ des droites respectivement parallèles, (4) est bien la condition nécessaire et suffisante pour que les droites $\bar{s}$ et $\bar{s}'$ soient perpendiculaires.

Nous pouvons apporter une précision nouvelle sur le corps K.

THÉORÈME 3. *Le corps de base est formellement réel et pythagoricien.*

Un corps commutatif est dit formellement réel quand -1 ne peut s'y mettre sous forme d'une somme de carrés. Il est pythagoricien quand la somme des carrés de deux quelconques de ses éléments est un carré. En vertu de la proposition 25, il suffit de montrer que K est pythagoricien, ce qui s'énonce encore ainsi: quel que soit α dans K, $1+\alpha^2$ est un carré dans K.

Reprenons deux réflexions perpendiculaires v' et v, l'un de leurs éléments bissecteurs m et un élément $e \neq v$ dans $\Pi(v')$. Soit a un élément de $\Phi(v, v')$ différent de v'. Soit r et s les éléments bissecteurs de v' et a. Posons:

$$\{b\} = \Phi(v', e) \cap \Phi(a, rer),$$

$$\{c\} = \Phi(v', vev) \cap \Phi(a, rer).$$

Les réflexions b et c sont respectivement perpendiculaires à r et s; elles sont donc perpendiculaires entre elles. Ainsi quel que soit a dans $\Phi(v, v')$, il existe deux réflexions perpendiculaires b et c, incidentes avec a, la première dans $\Phi(v', e)$, la deuxième dans $\Phi(v', vev)$. Quand a et v' sont distincts, il en est de même de b et e.

Prenons alors un élément α dans K. Soit $\bar{a}$ la droite d'équation:

$$(\bar{a}) \equiv \xi + \alpha\eta = 0, \tag{5}$$

relativement au système (v', v, m, e). La réflexion homologue a appartient au faisceau $\Phi(v, v')$ et elle est distincte de v'. Soit $\bar{b}$ une droite contenant le point de coordonnées (1,0) et non perpendiculaire à v'. Son équation peut s'écrire:

$$(\bar{b}) \equiv \beta\xi - \eta - \beta = 0, \qquad \beta \in K. \tag{6}$$

Soit $\bar{c}$ la droite perpendiculaire à $\bar{b}$ et contenant le point de coordonnées $(-1, 0)$. Son équation peut s'écrire:

$$(\bar{c}) \equiv \xi + \beta\eta + 1 = 0. \tag{7}$$

En vertu de ce qui précède, il existe dans K un élément β tel que les équations (5), (6) et (7) en ξ et η soient compatibles. Cet élément satisfait la relation:

$$\beta^2 - 2\alpha\beta - 1 = 0 .$$

Ce qui implique que $1+\alpha^2$ est un carré dans K. C.Q.F.D.

Ce théorème implique, en particulier, que la caractéristique du corps K est nulle, autrement dit que le groupe G ne contient pas de translation non banale d'ordre fini. Nous assimilerons le corps premier de K au corps Q des nombres rationnels.

2.11. Reprenons les coordonnées orthonormales introduites dans le plan relativement au système (v', v, m, e). Le plan étant l'espace homogène G/g, où g est le groupe de stabilité de $\Pi(v, v')$, on peut associer à tout élément X de G une transformation $\bar{X}$ du plan donnée par:

$$\bar{X}: \quad Tg \to XTg \qquad \forall T \in \mathscr{T} \tag{1}$$

On définit de la sorte un groupe de transformations isomorphe à G, agissant effectivement et transitivement dans le plan. La transformation $\bar{X}$ peut encore se formuler ainsi:

$$\bar{X} : (\xi , \eta) \to \left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}\, \xi - \varepsilon\, \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2}\, \eta + \gamma \, ; \; \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2}\, \xi + \varepsilon\, \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}\, \eta + \delta\right) \cdot \tag{2}$$

$$\alpha , \beta , \gamma , \delta \in K \, ; \quad (\alpha , \beta) \neq (0 , 0) \, ; \quad \varepsilon = \pm 1 .$$

L'élément ε égale 1 ou -1 suivant que X est un élément propre de G ou non. La condition nécessaire et suffisante pour que X soit une réflexion est donnée par:

$$\varepsilon = -1 \, ; \quad \gamma = \beta\varphi \, ; \quad \delta = -\alpha\varphi , \tag{3}$$

où φ est un élément quelconque de K. Les translations de G sont caractérisées par $\varepsilon = 1$ et $\beta = 0$. Les éléments de g s'obtiennent en posant $\gamma = \delta = 0$.

Réciproquement, soit K' un corps formellement réel et pythagoricien. L'ensemble des transformations de $K' \times K'$ distinctes données par les expressions de la forme (2), où α, β, γ et δ sont dans K', constitue un R-groupe G' engendré par celles de ces transformations qui vérifient (3), avec $\varphi \in K'$. On montre de plus que G' satisfait les cinq axiomes posés jusqu'ici et que K' est le corps de base relatif à G'.

Tous les résultats que nous venons de citer s'obtiennent par des calculs bien connus en géométrie analytique élémentaire, à ceci près que, dans le cas élémentaire, K est généralement le corps des nombres réels. Nous n'avons pas repris ici ces développements classiques que l'on trouvera, par exemple, dans [3],pp. 210-215.

En revanche, nous retiendrons ceci: d'une certaine manière, on peut considérer que les cinq premiers axiomes que nous avons posés caractérisent les corps formellement réels et pythagoriciens.

On peut encore caractériser le groupe G d'une autre manière. A toute paire de points $P_1(\xi_1, \eta_1)$ et $P_2(\xi_2, \eta_2)$ attachons l'élément:

$$D(P_1, P_2) = (\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2, \tag{4}$$

qui est un carré dans K. Il est clair que $D(P_1, P_2) = D(P_2, P_1)$. D'autre part, $D(P_1, P_2)$ est nul lorsque P_1 et P_2 coïncident, et dans ce cas seulement, en vertu de la proposition 25. On vérifie sans peine que, quelle que soit la transformation $\overline{X}$ donnée par (2), on a:

$$D(\overline{X}(P_1), \overline{X}(P_2)) = D(P_1, P_2).$$

On peut montrer que cette propriété caractérise le groupe des transformations $\overline{X}$, qui est isomorphe à G et que nous assimilerons à G dans ce qui suit. Etablissons d'abord un lemme.

Lemme. *Le groupe* G *est constitué par l'ensemble des transformations du plan de la forme:*

$$\begin{cases} \xi' = \mu\xi + \nu\eta + \pi \\ \eta' = \rho\xi + \sigma\eta + \tau \end{cases} \qquad \mu, \nu, \pi, \rho, \sigma, \tau \in K, \tag{5}$$

qui admettent D *comme invariant.*

Désignons par G_1 l'ensemble des transformations considérées. Comme $D(P_1, P_2)$ n'est nul que lorsque P_1 et P_2 coïncident, les substitutions linéaires (5) admettant D comme invariant sont régulières et G_1 est un groupe. De plus G est un sous-groupe de G_1. Nous pouvons donc nous borner à déterminer les coefficients μ, ν, ρ et σ quand π et τ sont nuls. Dans ce cas le point O de coordonnées $(0, 0)$ est fixe; soit alors $P'(\xi', \eta')$ l'image du point $P(\xi, \eta)$. En exprimant que $D(O, P)$ égale $D(O, P')$, on trouve les conditions nécessaires suivantes:

$$\mu^2+\rho^2 = 1\,; \qquad \nu^2+\sigma^2 = 1\,; \qquad \mu\nu+\rho\sigma = 0\,, \qquad (6)$$

qui sont équivalentes à:

$$\mu^2+\rho^2 = 1\,; \qquad \nu = -\varepsilon\rho\,; \qquad \sigma = \varepsilon\mu\,; \qquad \varepsilon = \pm 1$$

On obtient tous les éléments ρ de K tels que $1-\rho^2$ soit un carré de K en posant:

$$\rho = \frac{2\varphi}{1+\varphi^2} \qquad \varphi \in K\,,$$

ar l'équation $\rho\varphi^2 - 2\varphi + \rho = 0$ a des solutions dans K. Par suite, on peut poser:

$$\mu = \pm \frac{1-\varphi^2}{1+\varphi^2}\,.$$

Ainsi la solution générale du système (6) peut s'écrire:

$$\mu = \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\,; \quad \rho = \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}\,; \quad \nu = -\varepsilon\rho\,; \quad \sigma = \varepsilon\mu\,; \quad \varepsilon = \pm 1\,,$$

où α et β sont deux éléments arbitraires de K non nuls simultanément. Il s'ensuit immédiatement que $G_1 = G$. C.Q.F.D.

Remarquons que les conditions (6) sont également suffisantes pour que la transformation (5) appartienne à G, comme le montre notre démonstration.

Proposition 26. *Le groupe G est constitué par l'ensemble des transformations du plan qui admettent D comme invariant.*

Désignons par G' l'ensemble des transformations étendues à tout le plan et admettant D comme invariant. Il est évident que G est contenu dans G'. De plus, chaque élément de G' est une injection du plan dans lui-même.

Soit $P_i(\xi_i, \eta_i)$, avec $i = 1, 2, 3$, trois points quelconques du plan. Posons:

$$D_i = D(P_j, P_k) \qquad i \neq j \neq k \neq i, i = 1, 2, 3.$$

puis:

$$S(P_1, P_2, P_3) = 2(D_1 D_2 + D_2 D_3 + D_3 D_1) - (D_1^2 + D_2^2 + D_3^2). \quad (7)$$

Par des calculs élémentaires, on montre que:

$$S(P_1, P_2, P_3) = 4 \left(\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & 1 \\ \xi_2 & \eta_2 & 1 \\ \xi_3 & \eta_3 & 1 \end{vmatrix} \right)^2 \quad (8)$$

Il résulte de la définition (7) que S est un invariant relativement à G'. Le second membre de (8) est nul quand P_1, P_2 et P_3 appartiennent à une même droite, et dans ce cas seulement. Il s'ensuit que tout élément de G' transforme trois points d'une droite en trois points d'une droite.

Prenons un élément quelconque Z dans G'. Soit A' (α', β') l'image par Z d'un point $A(\alpha, \beta)$. Désignons par T_1 et T_2 les translations envoyant le point $O(0,0)$ sur A et sur A', respectivement. La transformation $Z_1 = T_2{}^{-1} Z T_1$ appartient à G' et elle laisse O fixe. Soit B' (γ', δ') l'image par Z_1 d'un point B (γ, δ) distinct de O. Les éléments $\gamma^2 + \delta^2$ et $\gamma'^2 + \delta'^2$ égalent le carré d'un même élément non nul φ de K. Les transformations:

$$R_1: \quad (\xi, \eta) \to \left(\frac{\gamma}{\varphi} \xi - \frac{\delta}{\varphi} \eta ; \frac{\delta}{\varphi} \xi + \frac{\gamma}{\varphi} \eta \right).$$

$$R_2: \quad (\xi, \eta) \to \left(\frac{\gamma'}{\varphi} \xi - \frac{\delta'}{\varphi} \eta ; \frac{\delta'}{\varphi} \xi + \frac{\gamma'}{\varphi} \eta \right).$$

appartiennent à G, car elles vérifient les relations (6). Elles envoient le point $C(\varphi, 0)$ sur B et B', respectivement. La transformation $Z_2 = R_2^{-1} Z_1 R_1$ appartient à G' et laisse fixes les points O et C. L'image d'un point $M(\mu, 0)$ par Z_2 est un point $M'(\mu', 0)$ tel que:

$$\mu^2 = \mu'^2 ; \quad (\mu - \varphi)^2 = (\mu' - \varphi)^2 .$$

Comme $\varphi \neq 0$, $\mu = \mu'$; ainsi Z_2 laisse fixes tous les points de la droite OC. On en déduit que Z applique une droite sur une droite et, par suite, le plan sur le plan. De plus, comme elle conserve le parallélisme, elle est de la forme (5). Donc G' est confondu avec G. C.Q.F.D.

3. Les deux derniers axiomes de la géométrie euclidienne plane

Il convient d'introduire de nouveaux axiomes afin de parachever la construction de ce que nous avons appelé la géométrie euclidienne plane. Ces axiomes nous permettront d'affirmer que le corps de base K appartient à une certaine famille de corps réels. Alors que les axiomes précédents ont essentiellement un contenu algébrique, les prochains — l'un d'eux, tout au moins — précisent la structure topologique de K.

3.1. Soit un corps L. A et B étant deux parties non vides de L, on désigne par $A+B$ l'ensemble des éléments $a+b$, où $a \in A$ et $b \in B$. De même, on note AB l'ensemble des éléments ab, où $a \in A$ et $b \in B$; l'ensemble $\{-1\}A$ s'écrit $-A$. Rappelons qu'on ordonne le corps L en y déterminant une partie P, appelée *partie positive* de L pour l'ordre considéré, satisfaisant les conditions suivantes:

1) $P \cup (-P) = L$,
2) $P \cap (-P) = \{0\}$,
3) $P + P = P$,
4) $P.P = P$.

Les points (1), (2) et (3) introduisent une structure de groupe abélien ordonné dans le groupe additif sous-jacent à L. Alors si $a, b \in L$, on écrit $a \leq b$ quand b-a appartient à P. On écrit $a < b$ quand, de plus, a et b sont distincts. Comme $a^2 = (-a)^2$ quel que soit a dans L, P contient tous les carrés de L et, en particulier, l'élément unité 1 de L. Il en résulte immédiatement qu'un corps dans lequel (-1) est un carré n'est pas ordonnable. En revanche, il existe un critère important concernant les corps commutatifs ordonnables. C'est le théorème de Artin-Schreier