Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 10 (1964)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE CONSTRUCTION DE LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE FONDÉE SUR LA NOTION DE RÉFLEXION

Autor: Delessert, André

Kapitel: 1. Les quatre premiers axiomes de la géométrie plane

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-39412

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 04.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

1. Les quatre premiers axiomes de la géométrie plane

1.1 On dit qu'une partie Σ d'un groupe G *engendre* G (au sens étroit) lorsque tout élément de G peut s'écrire d'une manière au moins sous forme du produit d'un nombre fini d'éléments de Σ. On peut ainsi remplacer chaque élément de G par un mot dont les lettres sont des éléments de Σ. Comme G est un groupe, chacun de ses éléments peut être représenté par plusieurs mots différents. On appelle *relations de structure* de G relativement à Σ l'ensemble des égalités par lesquelles on donne les mots représentant l'élément neutre I de G. Le groupe G est déterminé quand on se donne l'ensemble Σ et les relations de structure de G relativement à Σ.

Considérons un groupe G, d'élément neutre I, possédant les propriétés suivantes:

1) G est engendré par un ensemble Σ formé d'éléments involutifs de G. Nous désignerons les éléments de Σ par des lettres minuscules: a, b, ...
2) Les relations de structure de G relativement à Σ expriment toutes I par des mots d'un nombre pair de lettres.

Nous appellerons *réflexions* les éléments de Σ et nous dirons que G est un « groupe engendré par des réflexions » ou plus simplement un *R-groupe*. Nous utiliserons la notation (G, Σ) pour préciser que G est un R-groupe engendré par l'ensemble de réflexions Σ.

Les relations de structure du R-groupe G relativement à Σ peuvent prendre deux formes:

$$a)\ x^2 = I \qquad x \in \Sigma\,,$$

$$b)\ a_1 a_2 \dots a_{2n} = I\,;\ n > 1 \qquad \begin{array}{l} a_i \in \Sigma\,;\ i = 1, 2, \dots, 2n\,, \\ a_j \neq a_{j+1}\,;\ j = 1, 2, \dots, 2n-1\,. \end{array}$$

A titre d'exemple, on peut se donner arbitrairement un ensemble Σ non vide et se borner aux relations de structure de la forme a). On obtient ainsi le *R-groupe libre* engendré par Σ.

En vertu de la propriété 2), les longueurs des mots représentant un même élément du R-groupe (G, Σ) ont toutes la même parité. On appellera *propres* les éléments de G représentables par des produits d'un nombre pair de réflexions et *impropres* les autres. Les éléments propres de (G, Σ) forment un sous-groupe (distingué) G_0 d'indice 2 dans G, que nous appellerons la *composante propre* de (G, Σ). On obtient tous les éléments impropres de (G, Σ) en prenant la classe aG_0, où a est un élément arbitrairement choisi dans Σ.

Considérons un groupe H d'élément neutre I, engendré par un ensemble non vide E d'éléments involutifs. Introduisons le groupe multiplicatif C d'ordre 2, formé des éléments $+1$ et -1. Soit E' l'ensemble des couples $(a, -1)$, avec a $\in E$. Considérons la loi de formation suivante:

$$(a_1, -1)(a_2, -1)\dots(a_n, -1) = (a_1 a_2 \dots a_n, (-1)^n); \quad a_i \in E .$$

Les éléments ainsi construits constituent manifestement un R-groupe H', d'élément neutre $(I, +1)$, engendré par E'. Lorsque H est lui-même un R-groupe engendré par E, H' est isomorphe à H. Dans le cas contraire, H' est isomorphe au produit direct de H et C; H est isomorphe à la composante propre de (H', E'). Nous dirons que (H', E') est le *R-groupe naturellement associé à H.*

Dans le même ordre d'idées, bornons-nous à signaler un fait intéressant: *quel que soit le groupe* g, *il existe au moins un R-groupe (*G, Σ*) dont la composante propre est isomorphe à* g.

A tout élément T d'un R-groupe (G, Σ) on peut associer un automorphisme intérieur de G défini par:

$$X \to T^{-1} X T .$$

Cet automorphisme est banal lorsque T appartient au centre de G. Il est involutif chaque fois que l'on prend pour T un élément non central de Σ; on dit dans ce cas que l'on a affaire à un *automorphisme intérieur spécial* de G. Tout automorphisme intérieur de G peut être considéré comme le produit d'un nombre fini d'automorphismes intérieurs spéciaux de G. Une partie de G

est dite *distinguée* quand elle est stable pour les automorphismes intérieurs de G. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'elle soit stable pour les automorphismes intérieurs spéciaux de G.

Considérons un R-groupe (G, Σ). La plus petite partie distinguée Σ' de G contenant Σ s'obtient en formant la réunion des images de Σ par les automorphismes intérieurs de G. Il en résulte que Σ' est formée d'éléments involutifs impropres de (G, Σ). Par suite, G peut être considéré comme un R-groupe engendré par Σ'. Les propriétés de (G, Σ) auxquelles nous nous attacherons surtout concernent en fait (G, Σ'). C'est pourquoi nous substituerons systématiquement l'étude de (G, Σ') à celle de (G, Σ) lorsque $\Sigma \neq \Sigma'$. Nous n'introduisons pas de restriction essentielle en admettant que, par la suite, *nous ne considérerons que des R-groupes engendrés par des ensembles distingués de réflexions.*

Dans un R-groupe (G, Σ), nous appellerons *dimension d'un* élément X différent de l'élément neutre I le plus petit entier rationnel r tel que l'on puisse représenter X par un produit de $r+1$ éléments de Σ. Nous attribuerons à I la dimension -1. La *dimension du R-groupe* (G, Σ) est le maximum de la dimension de X lorsque X parcourt G. Par exemple, le groupe des permutations finies d'un ensemble infini E (chacune d'elles laissant fixes tous les éléments de E sauf un nombre fini d'entre eux) est engendré par les transpositions (permutations effectives portant sur deux éléments) de E; comme tel, c'est un R-groupe de dimension infinie. Les groupes finis d'ordres 1 et 2 peuvent être regardés comme des R-groupes de dimensions respectives -1 et 0; par la suite, nous qualifierons ces R-groupes de « banals ».

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le premier axiome concernant le groupe fondamental G d'une géométrie euclidienne plane.

Axiome P I. *Le groupe* G *est un R-groupe non banal engendré par un ensemble distingué* Σ *de réflexions*

Le R-groupe G n'étant pas banal, nous savons que Σ contient au moins deux éléments distincts.

1.2. Soit un ensemble E et une relation ternaire ι définie dans E. Le fait que trois éléments a, b et c de E, pris dans cet ordre, vérifient la relation ι se note $\iota(a, b, c)$. On dit que ι est une *relation d'incidence* (ternaire) lorsqu'elle satisfait les conditions suivantes:

1) Elle est *symétrique:* $\iota(a, b, c)$ implique $\iota(c, b, a)$ et $\iota(b, a, c)$.
2) Elle est *réflexive:* $\iota(a, a, b)$ quels que soient $a, b \in E$.
3) Elle est *transitive:* quand a et b sont deux éléments distincts de E, $\iota(a, b, c)$ et $\iota(a, b, d)$ impliquent $\iota(a, c, d)$.

Les relations d'incidence se rencontrent en géométrie élémentaire; c'est, par exemple, dans l'ensemble des points du plan, le fait pour trois points d'appartenir à une même droite; ou dans l'ensemble des droites du plan le fait pour trois droites d'avoir un point commun ou une direction commune.

Revenons au R-groupe G. Le fait que le produit de trois réflexions est une réflexion définit une relation ternaire dans Σ. Soit a, b, c, trois éléments de Σ tels que $abc \in \Sigma$. Alors:

$$cba = (abc)^{-1} = abc \in \Sigma ,$$

$$bac = c(cba)c = c(abc)c \in \Sigma ,$$

où l'on fait usage du fait que Σ est une partie distinguée de G. D'autre part, il est évident que aab est dans Σ quelles que soient les réflexions a et b. La relation ternaire considérée est donc symétrique et réflexive. Il n'est pas possible de prouver que la condition de transitivité est aussi satisfaite. C'est l'objet de l'axiome suivant.

Axiome P II (Axiome d'incidence). *Le fait que le produit de trois réflexions est une réflexion définit dans Σ une relation d'incidence.*

Nous appellerons *RI-groupe* tout groupe satisfaisant les axiomes P I et P II. Nous adopterons les notations ci-dessus: si $a, b, c \in \Sigma$, $\iota(a, b, c)$ signifie que $abc \in \Sigma$ et l'on dit que a, b et c sont *incidents*.

La relation d'incidence ι dans Σ est conservée par les transformations induites dans Σ par les automorphismes intérieurs de G. Il suffit évidemment de le vérifier pour les automorphismes intérieurs spéciaux de G. Soit alors a, b, c tels que $\iota(a, b, c)$ et soit s une réflexion quelconque:

$$(sas)(sbs)(scs) = s(abc)s \in \Sigma ,$$

où l'on utilise le fait que Σ est une partie distinguée de G. Par suite $\iota(sas, sbs, scs)$.

Plaçons ici une remarque. On peut considérer une notion d'incidence plus générale. Admettons que, dans un ensemble E, pour tout entier naturel n, on a défini une relation R_n en choisissant dans E^n une partie P_n; on note $R_n(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ lorsque l'élément $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de E^n appartient à P_n, et $\overline{R}_n(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ dans le cas contraire. Nous disons que les relations R_1, R_2, ..., R_n, ... déterminent une *incidence* (générale) dans E quand les conditions suivantes sont satisfaites:

1) $\overline{R}_1(a)$, $\forall\, a \in E$.

2) *Symétrie:* pour tout entier naturel n et si $a_i \in E$, $R_n(a_1$ $a_2, \ldots , a_n)$ implique $R_n(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n})$, où $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ est une permutation quelconque des indices $(1, 2, \ldots, n)$.

3) *Réflexivité:* pour tout entier naturel n et quels que soient les a_i dans E, $R_n(a_1, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$.

4) *Transitivité:* pour tout entier naturel n supérieur *à* 1, les conditions $\overline{R}_{n-1}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ et $R_n(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, b_k)$, où $k = 1, 2, \ldots, n$, et a_i, $b_k \in E$, impliquent $R_n(b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

Ainsi, une relation d'équivalence dans E peut être assimilée à une incidence pour laquelle $R_n(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ quels que soient $a_i \in E$, dès que $n > 2$. Dans l'ensemble des éléments non nuls d'un espace vectoriel, la dépendance linéaire est une incidence.

Soit un R-groupe (G, Σ); nous disons qu'il satisfait la condition J, ou encore qu'il est un *RJ-groupe*, si l'on définit une incidence générale dans Σ en posant, pour tout n naturel, $R_n(a_1,$ $a_2, \ldots, a_n)$ dès que $\dim\,(a_1 a_2 \ldots a_n) < n$-1, avec $a_i \in \Sigma$. On voit qu'un RI-groupe de dimension 2 est un RJ-groupe. On peut aussi dire qu'un RI-groupe est un R-groupe (G, Σ) tel que l'on introduit une incidence générale dans Σ en posant:

1) Si $n = 1, 2, 3$: $R_n(a_1, \ldots, a_n)$ quand $\dim(a_1 \ldots a_n) < n$-1, $a_i \in \Sigma$.

2) Si $n > 3$: $R_n(a_1, \ldots, a_n)$ $\forall\, a_i \in \Sigma$.

1.3. Soit a et b deux réflexions distinctes. Nous appellerons *faisceau* déterminé par a et b et nous noterons $\Phi(a, b)$ l'ensemble des éléments de Σ incidents avec a et b. Il est clair que $\Phi(a, b)$ contient a et b et qu'il est identique à $\Phi(b, a)$.

PROPOSITION 1. *Un faisceau est entièrement déterminé par deux quelconques de ses éléments, pourvu qu'ils soient distincts.*

Prenons deux éléments distincts x et y dans un faisceau $\Phi(a, b)$, a et b étant deux réflexions distinctes. On peut supposer sans restriction que a et y sont distincts. Nous voulons prouver que les faisceaux $\Phi(a, b)$ et $\Phi(x, y)$ coïncident. Soit s un élément arbitraire de $\Phi(a, b)$. On peut écrire:

$$(1)\ \iota(a, b, x) \qquad (2)\ \iota(a, b, y) \qquad (3)\ \iota(a, b, s)$$

En vertu de l'axiome *P II*, on peut tirer de (1) et (2):

$$(4)\ \iota(a, x, y) \qquad (5)\ \iota(b, x, y)$$

ce qui montre que chacun des deux faisceaux contient les éléments déterminant l'autre. Par suite, il suffit de prouver que l'un de ces faisceaux contient l'autre. De (2) et (3), on tire $\iota(a, y, s)$; en associant ce fait à (4), on voit que $\iota(x, y, s)$, où l'on tient compte du fait que $a \neq y$. Par conséquent $\Phi(a, b) \subset \Phi(x, y)$. C.Q.F.D.

COROLLAIRE. *Soit* a, b *et* c *trois réflexions distinctes telles que* a = cbc. *Chacune d'elles appartient au faisceau déterminé par les deux autres.*

En effet, $acb = c$; donc $c \in \Phi(a, b)$. Le reste se déduit de la proposition 1.

Lorsque l'on ne désirera pas mettre en évidence un couple particulier d'éléments déterminant un faisceau, on désignera celui-ci par la seule lettre Φ.

Proposition 2. *Soit* G *un* RI-*groupe non banal engendré par un ensemble distingué* Σ *de réflexions et soit* Φ *un faisceau dans* Σ. *Le groupe engendré par* Φ *est un* RI-*groupe* $g(\Phi)$ *de dimension* 1. *Les éléments propres de* $g(\Phi)$ *forment un sous-groupe abélien* $g_0(\Phi)$.

Désignons par a et b deux réflexions déterminant Φ: $\Phi = \Phi(a, b)$. Montrons d'abord que, quels que soient x, y, et z dans Φ, le produit xyz est également dans Φ. Quand $x = y$, $xyz = z \in \Phi$. Quand $x \neq y$, les faisceaux Φ et $\Phi(x, y)$ sont confondus en vertu de la proposition 1. Par suite xyz est une réflexion. Comme $yx.xyz = z \in \Sigma$, xyz appartient à $\Phi(x, y)$, donc à Φ.

Désignons alors par $g(\Phi)$ l'ensemble des mots formés avec des éléments de Φ. Il résulte de ce qui précède que l'on peut obtenir $g(\Phi)$ en prenant tous les mots d'une ou deux « lettres » prises dans Φ. Quels que soient $x, y \in \Phi$, $x^{-1} = x$ et $(xy)^{-1} = yx$. Donc $g(\Phi)$ est un groupe engendré par Φ. Il résulte de la première partie de la démonstration que Φ est une partie distinguée de $g(\Phi)$. Comme l'élément neutre I de G ne peut être représenté par le produit d'un nombre impair d'éléments de Σ, $g(\Phi)$ est un R-groupe. De plus, quels que soient x, y et z dans Φ, $\imath(x, y, z)$. Donc $g(\Phi)$ est un RI-groupe de dimension 1.

L'ensemble $g_0(\Phi)$ des éléments propres de $g(\Phi)$ forment un sous-groupe d'indice 2 dans $g(\Phi)$. Prenons arbitrairement A dans $g_0(\Phi)$ et u dans Φ. On peut affirmer que $Au = v$ et $uA = w$ sont des éléments de Φ. Ainsi tout élément A de $g_0(\Phi)$ peut se mettre sous les deux formes vu et uw, avec u, v, $w \in \Phi$, u étant arbitrairement choisi. On en déduit que l'automorphisme intérieur de $g(\Phi)$ associé à u envoie tout élément de $g_0(\Phi)$ sur son inverse:

$$uAu = u(vu)u = uv = A^{-1}.$$

Il résulte immédiatement de là que $g_0(\Phi)$ est abélien. On peut le voir en prenant quatre éléments c, d, e et f dans Φ et en observant que:

$$(cd)(ef)(cd)^{-1} = c(d.ef.d)c = c.fe.c = ef,$$

C.Q.F.D.

Rappelons le fait suivant que nous avons démontré en passant:

COROLLAIRE. *Quand* x, y *et* z *sont trois éléments d'un faisceau* Φ, *le produit* xyz *appartient à* Φ.

Les faits que nous venons de voir ont une illustration très simple en géométrie élémentaire. Lorsque a et b sont deux réflexions d'axes concourants, $\Phi(a, b)$ est l'ensemble des réflexions dont les axes passent par l'intersection de ceux de a et b. Lorsque les axes de a et b sont parallèles, $\Phi(a, b)$ est l'ensemble des réflexions dont les axes ont la même direction que ceux de a et b. Soit x, y et z trois réflexions dont les axes respectifs $\bar{x}$, $\bar{y}$, et $\bar{z}$ sont concourants. Le produit $t = xyz$ est une réflexion dont l'axe $\bar{t}$ est la conjuguée isogonale de $\bar{y}$ par rapport à $\bar{x}$ et $\bar{z}$.

La géométrie élémentaire étudie la *transformation* ou *inversion isogonale* par rapport à un triangle ABC. Son existence repose sur le théorème suivant: soit x, y et z trois droites passant respectivement par C, A et B; soit x' la conjuguée isogonale de x par rapport à CA et CB, y' celle de y par rapport à AB etAC, et z' celle de z par rapport à BC et BA. Si x, y et z sont incidentes (concourantes ou de même direction), il en est de même de x', y' et z'. La transformation isogonale considérée associe au point d'intersection de x, y et z celui de x', y' et z', quand ils existent. Il est facile de voir que le théorème cité est un cas particulier de la proposition suivante qui concerne les R-groupes en général:

Soit G un R-groupe engendré par un ensemble distingué Σ de réflexions. Soit a, b, c, x, y et z six réflexions telles que: $x' = axb$, $y' = byc$, $z' = cza$ et $t = xyz$ soient dans Σ; alors $t' = x'y'z'$ est aussi dans Σ.

En effet: $x'y'z' = axb.byc.cza = a.xyz.a \quad \in a\,\Sigma\,a = \Sigma$

1.4. Nous appellerons *élément bissecteur* de deux réflexions distinctes a et b tout élément u de Σ tel que $a = ubu$. Il est clair que $b = uau$ et que u est distinct de a et de b. Nous sommes maintenant en mesure de poser le troisième axiome concernant le groupe G, axiome qui est assez restrictif.

Axiome P III (axiome de bissection). *Toute paire de réflexions distinctes admet au moins un élément bissecteur.*

L'axiome P III implique d'abord que Φ ne contient aucun élément central de G. De plus, l'ensemble des automorphismes intérieurs de G agit transitivement dans Σ. On aurait pu tenter de remplacer l'axiome P III par l'hypothèse suivante, apparemment moins restrictive:

(1) Il existe dans Σ un élément a tel que, quel que soit s différent de a dans Σ, a et s admettent au moins un élément bissecteur.

Mais il est facile de voir que, moyennant ce qui précède, (1) entraîne la validité de l'axiome P III dans G. En effet, soit b et c deux réflexions distinctes et différentes l'une et l'autre de a. Soit u un élément bissecteur de a et b et posons $c' = ucu$. Si $c' = a$, posons $v = a$; si $c' \neq a$, soit v un élément bissecteur de a et c'. Alors

$$c = uc'u = u.vav.u = uvu.b.uvu\ ,$$

et uvu est un élément bissecteur de b et c.

Tout faisceau contient les éléments bissecteurs de chacune de ses paires d'éléments distincts, d'après le corollaire de la proposition 1. Par suite, tout faisceau contient trois éléments distincts, au moins.

1.5. Remarquons que la notion de faisceau ne se présente dans Σ que lorsque G est de dimension supérieure à zéro. Lorsque G est de dimension 1, Σ ne contient qu'un seul faisceau, et réciproquement. Par la suite nous ne nous intéresserons qu'aux cas où Σ contient plusieurs faisceaux, et nous poserons un axiome à ce sujet. Mais auparavant, il convient de poser quelques définitions.

Lorsque G est au moins de dimension 2, on peut trouver dans Σ trois éléments non incidents a, b et c. Cela implique qu'il existe dans Σ au moins trois faisceaux distincts $\Phi(a, b)$, $\Phi(b, c)$ et $\Phi(c, a)$. L'intersection de deux faisceaux distincts comporte au plus un élément; elle peut être vide. Prenons un faisceau Φ. S'il possède un élément commun avec chacun des autres faisceaux de Σ, on dit qu'il est de *première classe* et on le note Φ_1. Dans le cas contraire, il existe au moins un faisceau de Σ disjoint de Φ;

on dit alors que Φ est de *seconde classe* et on le note Φ_2. Il résulte immédiatement de la définition que s'il existe un faisceau de seconde classe dans Σ, il en existe au moins deux.

PROPOSITION 3. *Tout automorphisme intérieur de* G *transforme un faisceau de Σ en un faisceau de même classe.*

Il suffit d'établir la proposition dans le cas des automorphismes intérieurs spéciaux. Désignons par σ l'automorphisme intérieur de G associé à une réflexion s et soit un faisceau quelconque $\Phi(a, b)$ de Σ. Quel que soit x dans $\Phi(a, b)$, sxs appartient au faisceau $\Phi(sas, sbs)$. Donc σ envoie $\Phi(a, b)$ dans $\Phi(sas, sbs)$. Prenons y dans $\Phi(sas, sbs)$. Comme sas, sbs et y sont incidents, sys appartient au faisceau $\Phi(a, b)$. Mais σ envoie sys sur y. Donc $\sigma\Phi(a, b)$ contient $\Phi(sas, sbs)$. Ce qui prouve que σ transforme le faisceau $\Phi(a, b)$ en le faisceau $\Phi(sas, sbs)$.

Montrons encore que σ transforme tout faisceau Φ en un faisceau de même classe. Lorsque Φ est de seconde classe, il existe un faisceau Φ' disjoint de Φ. Comme σ est un automorphisme, $\sigma\Phi$ et $\sigma\Phi'$ sont disjoints. Donc $\sigma\Phi$ est de seconde classe. Quand Φ est de première classe, $\sigma\Phi$ n'est pas de seconde classe car σ est une transformation involutive. C.Q.F.D.

En géométrie élémentaire plane, un faisceau de première classe est l'ensemble des réflexions dont les axes passent par un point donné; un faisceau de seconde classe est l'ensemble des réflexions dont les axes ont une direction donnée. Pour l'instant, nous ne sommes pas renseignés sur l'existence dans Σ de faisceaux appartenant à l'une ou l'autre des deux classes. Pour nous assurer l'existence de « points », nous allons poser l'axiome suivant:

AXIOME P IV. (Axiome des faisceaux de première classe) *Dans Σ, il existe au moins deux faisceaux dont un de première classe.*

Nous dirons de deux réflexions distinctes qu'elles *se coupent* ou qu'elles sont *sécantes* lorsqu'elles déterminent un faisceau de première classe.

L'axiome P IV entraîne immédiatement un fait important.

Proposition 4. *Le* R-*groupe* G *est de dimension* 2.

Nous avons déjà observé que l'existence de deux faisceaux distincts implique que la dimension de G égale au moins 2. Pour établir qu'elle est exactement 2, il suffit de montrer que, quelles que soient les réflexions a, b, c et d, le produit $abcd$ peut s'écrire sous la forme rs, où r et s sont des réflexions convenables. Le fait est banal quand a, b et c sont incidentes. Plaçons-nous donc dans le cas où elles ne le sont pas. Nous savons qu'il existe dans Σ un faisceau de première classe Φ_1. Si a appartient à Φ_1, posons $a' = a$ et $b' = b$. Si a n'appartient pas à Φ_1, désignons par a' l'élément commun aux faisceaux Φ_1 et $\Phi\,(a, b)$. Dans tous les cas, on peut écrire:

$$ab = a'.a'ab = a'b', \qquad b' = a'ab \in \Phi(a, b), \qquad b' \neq c.$$

Désignons alors par e l'élément commun à Φ_1 et $\Phi(b', c)$. Posons $f = eb'c \in \Sigma$. On peut écrire:

$$abcd = a'b'cd = a'e.eb'c.d = a'e.fd.$$

Lorsque $\iota(e, f, d)$, la démonstration est achevée. Sinon désignons par g l'intersection des faisceaux Φ_1 et $\Phi(f, d)$, et posons:

$$r = a'eg \in \Phi_1\,; \quad s = gfd \in \Phi(f, d).$$

On a alors:

$$abcd = a'e.fd = a'eg.gfd = rs. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Il convient de souligner que la démonstration de cette proposition ne fait pas intervenir l'axiome P III. Lorsqu'on fait usage de cet axiome, on peut affirmer l'existence dans Σ de plusieurs faisceaux de première classe. Plus précisément, on peut montrer que toute réflexion appartient à deux faisceaux de première classe, au moins. Prenons en effet un faisceau de première classe Φ_1 et une réflexion s n'appartenant pas à Φ_1. Choisissons un élément a dans Φ_1 et soit u un élément bissecteur de a et s. Le faisceau $u\Phi_1 u$ est de première classe. Comme il contient s, il est distinct de Φ_1. L'élément commun à Φ_1 et $u\Phi_1 u$ appartient à deux faisceaux de première classe distincts. En vertu de l'axiome de bissection, il en est de même de toute réflexion.

1.6. Il est facile de reconnaître les éléments involutifs propres de G. Comme G est de dimension 2, tout élément propre de G peut se mettre sous la forme ab, où a, $b \in \Sigma$. Pour que ab soit involutif, il faut que a et b commutent. En géométrie euclidienne plane, cela revient à exiger que les axes des réflexions a et b soient confondus ou perpendiculaires. Nous conviendrons donc d'appeler *perpendiculaires* deux réflexions distinctes qui commutent. La relation ainsi définie dans Σ est symétrique. De plus, elle est invariante pour les automorphismes intérieurs de G. En effet, soit a, b et s trois réflexions, a et b étant perpendiculaires; sas et sbs sont des réflexions distinctes et:

$$sas.sbs = sabs = sbas = sbs.sas\,.$$

Nous allons énoncer un théorème d'existence au sujet des éléments perpendiculaires de Σ, mais il convient auparavant d'établir un lemme.

LEMME. *Soit* G *un* RI-*groupe engendré par un ensemble distingué Σ de réflexions satisfaisant l'axiome de bissection. Pour que tous les éléments d'un même faisceau Φ commutent avec une même réflexion* s, *il faut et il suffit que* s *n'appartienne pas à Φ et que les faisceaux Φ et* sΦs *soient confondus.*

Montrons d'abord la nécessité de ces conditions. Prenons un faisceau Φ dont tous les éléments commutent avec une même réflexion s. Il est clair que les faisceaux Φ et $s\Phi s$ sont confondus. Soit a un élément de Φ distinct de s. Si s était contenu dans Φ, tout élément bissecteur de a et s appartiendrait à Φ sans toutefois commuter avec s. Donc s n'appartient pas à Φ.

Réciproquement, considérons un faisceau Φ et une réflexion s n'appartenant pas à Φ telle que les faisceaux Φ et $s\Phi s$ coïncident. Prenons dans Φ un élément quelconque x. Il résulte des hypothèses que $x' = sxs$ appartient aussi à Φ. Les réflexions x et x' sont confondues, car sinon s appartiendrait à $\Phi(x, x') = \Phi$. Par suite, x commute avec s. Comme s n'appartient pas à Φ, on peut même affirmer que s et x sont perpendiculaires. C.Q.F.D.

Nous dirons qu'un faisceau Φ est *entièrement perpendiculaire* à une réflexion s quand chaque élément de Φ est perpendiculaire à s. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que Φ ne contienne pas s mais en revanche qu'il contienne deux éléments distincts perpendiculaires à s, en vertu du lemme précédent.

Proposition 5. *Soit une réflexion* s *et un faisceau de première classe Φ_1 ne contenant pas* s ; *Φ_1 contient au moins un élément perpendiculaire à* s ; *s'il en contient plus d'un, il est entièrement perpendiculaire à* s.

Considérons le faisceau de première classe $s\Phi_1 s$. Lorsque Φ_1 et $s\Phi_1 s$ sont distincts, leur élément commun t commute avec s. Comme s n'appartient pas à Φ_1, s et t sont perpendiculaires.

Lorsque Φ_1 et $s\Phi_1 s$ sont confondus, Φ_1 est entièrement perpendiculaire à s, comme l'indique le lemme ci-dessus. Cela se produit dès que Φ_1 contient deux éléments distincts perpendiculaires à s. C.Q.F.D.

Il convient de remarquer que, quel que soit le faisceau de première classe Φ_1, on peut trouver une réflexion s non contenue dans Φ_1 et perpendiculaire à un seul élément de Φ_1. En effet, soit a un élément de Φ_1 et b une réflexion non contenue dans Φ_1; il suffit de prendre pour s un élément bissecteur de a et b.

Proposition 6. *Tout faisceau de première classe contient au moins quatre éléments distincts.*

Soit Φ_1 un faisceau de première classe, b un élément de Φ_1 et s une réflexion non contenue dans Φ_1 et non perpendiculaire à b. Soit a l'élément de Φ_1 perpendiculaire à s. La réflexion $b' = sbs$ est contenue dans $s\Phi_1 s$, mais elle n'appartient ni à $\Phi(a, b) = \Phi_1$ ni à $\Phi(a, s)$.

Considérons un élément bissecteur t de a et s; il est distinct de a et de s et il ne leur est pas perpendiculaire. Il s'ensuit que la réflexion $t' = sts$ est distincte de a, de s et de t. Les réflexions a, s, t et t' appartiennent à un même faisceau qui ne contient pas b'. Par suite les faisceaux $\Phi(b', a)$, $\Phi(b', s)$, $\Phi(b', t)$ et $\Phi(b', t')$ sont distincts. Comme b' n'appartient pas à Φ_1, les intersections de ces faisceaux avec Φ_1 fournissent quatre éléments distincts de Φ_1. C.Q.F.D.

Corollaire. *Toute réflexion appartient à quatre faisceaux distincts au moins.*

On vient de voir, en effet, que c'est le cas de b'; c'est vrai par conséquent pour toute réflexion, en vertu de l'axiome P III.

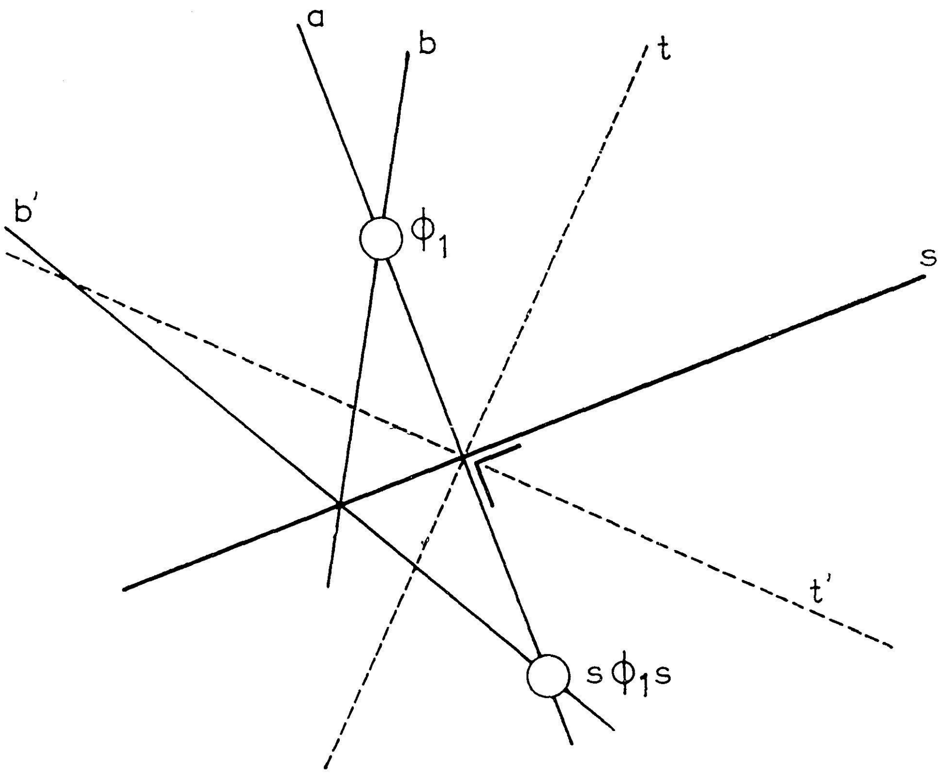

Fig. 1.

Proposition 7. *Soit une réflexion* s *et un faisceau de première classe* Φ_1 *contenant* s. *Il existe dans* Φ_1 *un élément perpendiculaire à* s, *au moins.*

Nous savons que la réflexion s appartient au moins à quatre faisceaux; deux d'entre eux au moins, soit Φ_1 et Φ_1', sont de première classe. Il existe donc une réflexion a non perpendiculaire à s et n'appartenant à ni Φ_1 à ni Φ_1'. Soit u un élément bissecteur de a et s. Les faisceaux $u\Phi_1 u$ et $u\Phi_1' u$ contiennent a mais pas s. En vertu de la proposition 5, ces faisceaux contiennent chacun un élément perpendiculaire à s. Soit b et c ces éléments; ils sont distincts car a, qui n'est pas perpendiculaire à s, est le seul élément commun à $u\Phi_1 u$ et $u\Phi_1' u$. Le faisceau $\Phi(b, c)$, qui contient deux éléments distincts perpendiculaires à s, est entièrement perpendiculaire à s. Il est distinct de Φ_1.

Par suite la réflexion t commune à Φ_1 et $\Phi(b, c)$ répond aux conditions de l'énoncé. C.Q.F.D.

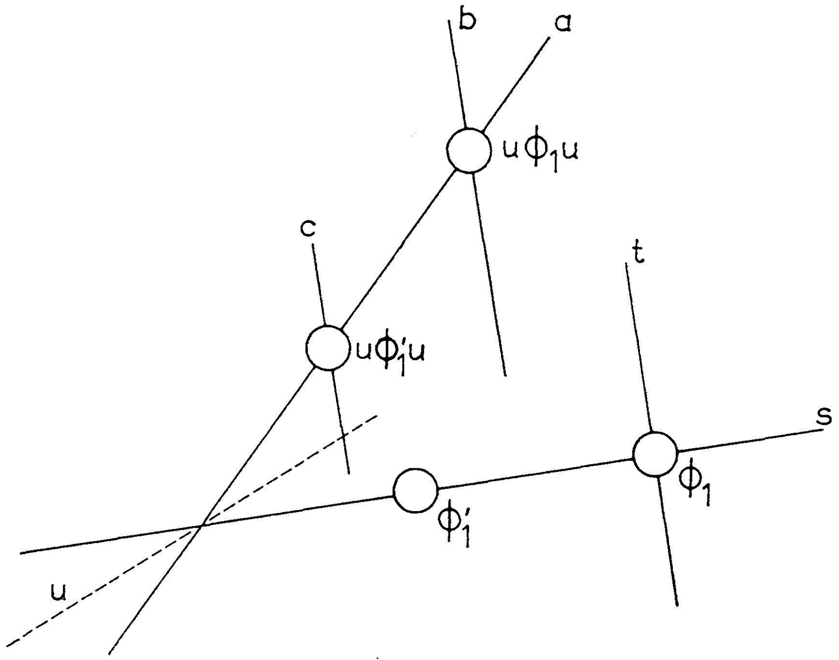

Fig. 2.

Corollaire. *A toute réflexion, on peut faire correspondre au moins deux réflexions qui la coupent perpendiculairement et qui déterminent avec elle des faisceaux distincts.*

Proposition 8. *Deux réflexions perpendiculaires se coupent.*

Soit a et s deux réflexions perpendiculaires. On peut trouver une réflexion b coupant s, perpendiculaire à s, et telle que $\Phi(s, a) \neq \Phi(s, b)$. Le faisceau $\Phi(a, b)$ est entièrement perpendiculaire à s. Prenons un élément bissecteur u de a et b. Il appartient à $\Phi(a, b)$; il est donc perpendiculaire à s. L'automorphisme intérieur de G associé à u envoie b sur a et laisse s fixe. Par conséquent $\Phi(a, s) = u\Phi(b, s)u$. Comme $\Phi(b, s)$ est de première classe, il en est de même de $\Phi(a, s)$. C.Q.F.D.

Corollaire. *Toute réflexion appartient à trois faisceaux de première classe, au moins.*

En effet, dans la démonstration précédente le faisceau $\Phi(a, b)$ contient u mais pas s. Comme les éléments a, b et u sont distincts, il en est de même des faisceaux $\Phi(s, a)$, $\Phi(s, b)$ et $\Phi(s, u)$. La proposition 8 affirme qu'ils sont de première classe.

PROPOSITION 9. *Soit une réflexion* s *et un faisceau de première classe* Φ_1 *contenant* s; Φ_1 *ne contient qu'un seul élément perpendiculaire à* s.

D'après la proposition 7, tout faisceau de première classe contenant s possède au moins un élément perpendiculaire à s.

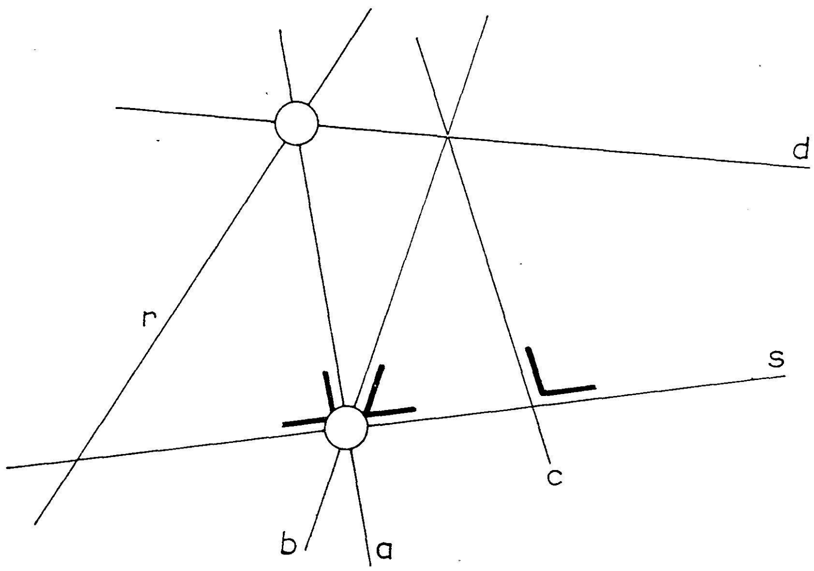

Fig. 3.

D'autre part, soit x et x' deux éléments perpendiculaires à s tels que $\Phi(s, x) \neq \Phi(s, x')$, et soit u un élément bissecteur de x et x'. Le faisceau $\Phi(x, x')$ étant entièrement perpendiculaire à s, u est perpendiculaire à s. L'automorphisme intérieur de G associé à u laisse s fixe et transforme l'un en l'autre les faisceaux $\Phi(s, x)$ et $\Phi(s, x')$. Il résulte immédiatement de là que si l'un des faisceaux de première classe contenant s ne possède qu'un seul élément perpendiculaire à s, il en est de même de tous les autres.

Soit r une réflexion distincte de s et non perpendiculaire à s. Il existe un faisceau de première classe contenant r mais pas s. Prenons dans ce faisceau l'élément a perpendiculaire à s. Admettons, par absurde, que le faisceau de première classe $\Phi(s, a)$ contienne un élément b distinct de a et perpendiculaire à s. Il existe une réflexion c perpendiculaire à s et n'appartenant pas à $\Phi(s, a)$. Le faisceau $\Phi(b, c)$, qui ne contient ni a, ni s, est entièrement perpendiculaire à s. En particulier, l'élément d commun à $\Phi(a, r)$ et $\Phi(b, c)$ est perpendiculaire à s. Le faisceau $\Phi(a, r)$ contient donc deux éléments distincts perpendiculaires à s, soit a et d, et un élément non perpendiculaire à s, soit r, ce qui est absurde. Il en résulte que $\Phi(s, a)$ ne contient qu'un seul élément perpendiculaire à s. Comme on l'a vu, cela implique qu'il en est de même pour tout faisceau de première classe Φ_1 contenant s. C.Q.F.D.

1.7.

Proposition 10. *L'ensemble des éléments de Σ perpendiculaires à une même réflexion constitue un faisceau.*

En vertu de la proposition 7 et du corollaire de la proposition 8, il existe trois réflexions distinctes a, b et c perpendiculaires à une même réflexion s. Le faisceau $\Phi(a, b)$ est entièrement perpendiculaire à s. Il suffit donc de montrer que a, b et c sont incidentes. Considérons l'élément c' commun aux faisceaux distincts $\Phi(a, b)$ et $\Phi(c, s)$. Il est perpendiculaire à s comme tout élément de $\Phi(a, b)$. Il résulte alors des propositions 8 et 9 que c' est confondu avec c, donc que a, b et c sont trois réflexions incidentes. C.Q.F.D.

Convenons d'appeler *système polaire* de la réflexion s et de noter $\Pi(s)$ le faisceau formé des réflexions perpendiculaires à s. La réflexion s est une *base* de $\Pi(s)$. Tout élément de Φ est une base d'un système polaire bien déterminé. Cependant, il peut arriver que les systèmes polaires de deux réflexions distinctes coïncident.

Remarquons que, s'il existe des faisceaux de seconde classe dans Σ, toute réflexion s appartient à l'un d'eux, au moins. En effet, soit Φ'_2 un faisceau de seconde classe contenant une réflexion a distincte de s. Si l'on désigne par u un élément bissecteur de a et s, il est clair que le faisceau de seconde classe $\Phi_2 = u\Phi'_2u$ contient s. Nous pouvons en déduire, en particulier que le système polaire $\Pi(s)$ est de seconde classe. Car, sans cela, l'élément commun à $\Pi(s)$ et Φ_2 serait une réflexion perpendiculaire à s mais ne coupant pas s, contrairement à la proposition 8. Ainsi, quand Σ contient des faisceaux de seconde classe, tout système polaire est de seconde classe. Signalons toutefois qu'il peut éventuellement se trouver dans Σ des faisceaux de seconde classe qui ne sont pas des systèmes polaires.

Lorsque deux réflexions distinctes s et t ont le même système polaire, elles ne se coupent pas. En effet, si a est un élément quelconque de $\Pi(s)$, le système polaire de a est $\Phi(s, t)$ en vertu de la proposition 10. L'intersection de $\Pi(a)$ et $\Pi(s)$ est vide, sinon il existerait dans $\Pi(a) = \Phi(s, t)$ un élément perpendiculaire à s et t à la fois, contrairement aux propositions 8 et 9. Par suite, $\Phi(s, t)$ est de seconde classe. On peut déduire de là que, lorsqu'il n'existe pas de faisceau de seconde classe dans Σ, la correspondance entre les réflexions s et les systèmes polaires $\Pi(s)$ est biunivoque.

1.8. Nous sommes maintenant en mesure de donner plus de détails au sujet des éléments bissecteurs de deux réflexions. Commençons par établir un lemme.

Lemme. *Soit* u, v *et* x *trois réflexions incidentes. La condition nécessaire et suffisante pour que* uvx *soit perpendiculaire à* x *est que* u *et* v *soient elles-mêmes perpendiculaires.*

Nous avons vu que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un élément de dimension 1 dans G soit involutif est que, lorsqu'il est mis sous la forme ab, où $a, b \in \Sigma$, les réflexions a et b soient perpendiculaires. Supposons donc que u et v sont perpendiculaires. Alors uv et $xuvx$ sont des éléments involutifs de dimension 1. Par hypothèse, uvx est une réflexion; nous pouvons affirmer qu'elle est perpendiculaire à x. Réciproquement, si x et uvx sont deux réflexions perpendiculaires, $uvx.x = uv$ est un élément involutif de dimension 1 dans G; il en résulte que u et v sont perpendiculaires. C.Q.F.D.

Proposition 11. *Deux réflexions non sécantes ont exactement un élément bissecteur. Deux réflexions sécantes ont exactement deux éléments bissecteurs, qui sont perpendiculaires.*

Soit a et b deux réflexions distinctes. Nous savons qu'elles ont au moins un élément bissecteur u. Admettons qu'il existe un élément bissecteur v de a et b distinct de u. Nous pouvons observer que u et v appartiennent tous deux au faisceau $\Phi(a, b)$ et que, par suite, uva est une réflexion. Comme:

$$a = uvavu = uva.a.avu = uva.a.uva\,,$$

uva est une réflexion perpendiculaire à a. Donc u et v sont perpendiculaires en vertu du lemme précédent.

Nous déduisons de là que, lorsque a et b ne se coupent pas, elles ne possèdent qu'un seul élément bissecteur. En revanche, quand elles se coupent, elles ne sauraient en avoir plus de deux. Il nous faut montrer qu'elles en ont effectivement deux dans ce cas. Prenons l'élément u' perpendiculaire à u dans le faisceau de première classe $\Phi(a,\, b)$. Comme $uu'a$ est une réflexion, on peut écrire:

$$uu'.a.u'u = uu'a.u'u = au'u.u'u = a\,,$$

et, par suite:

$$b = uau = u'au'\,.$$

Donc u' est aussi élément bissecteur de a et b. C.Q.F.D.

Proposition 12. *Lorsqu'il existe des faisceaux de seconde classe dans Σ, le centre de* G *se réduit à l'élément neutre* I. *Lorsque Σ ne contient que des faisceaux de première classe, le centre de* G *est d'ordre* 2.

Nous savons que Σ ne contient pas d'élément du centre de G. Recherchons alors les éléments centraux propres de G. Soit ab l'un d'eux, où a, $b \in \Sigma$. Comme ab commute avec a, $(ab)^2 = \mathrm{I}$. Par suite, a et b sont confondus ou perpendiculaires. Si a et b étaient perpendiculaires, on pourrait trouver une réflexion s non incidente avec a et b, perpendiculaire à a mais pas à b. On pourrait alors écrire:

$$ba.s.ab = bsb \neq s\,,$$

ce qui serait absurde. Il s'ensuit que a et b sont confondus et que I est le seul élément central propre de G.

Le carré d'un élément central de dimension 2 est un élément central propre. Ce qui précède montre qu'un tel élément est involutif. Nous sommes donc conduits à la recherche des éléments involutifs de dimension 2 dans G. Soit A l'un d'eux et soit x une réflexion arbitraire. On peut poser: $A = xyz$, où x, y et z sont trois réflexions non incidentes. Comme A est involutif, on a:

$$xyx = zy.xzx,$$

ce qui montre que les réflexions xyx et xzx appartiennent au faisceau $\Phi(y, z)$. En vertu du lemme de la proposition 5, $\Phi(y, z)$ est entièrement perpendiculaire à x. Par suite:

$$(yz)^2 = xyz.xyz = A^2 = I.$$

Donc y et z sont perpendiculaires et le système polaire $\Phi(y, z)$ de x est de première classe. Prenons un élément quelconque y' dans $\Phi(y, z)$ et posons $z' = y'yz$. D'après ce qui précède, $A = xy'z'$ et z' est la réflexion perpendiculaire à y' dans $\Phi(y, z)$. D'autre part, A commute avec x; et comme x est arbitrairement choisi dans Σ, A est un élément central de G.

En résumé G ne possède d'élément central distinct de I que lorsque les systèmes polaires sont de première classe, autrement dit quand il n'existe pas de faisceaux de seconde classe dans Σ. Dans ce cas, G ne contient qu'un seul élément de cette espèce. C.Q.F.D.

Corollaire. *Lorsqu'il contient des faisceaux de seconde classe, Σ constitue l'ensemble de tous les éléments involutifs impropres de* G. *Dans le cas contraire, il existe dans* G *un élément involutif impropre n'appartenant pas à Σ, et un seul. Cet élément engendre le centre de* G. *Il peut être mis sous la forme* abc, *où* a, b *et* c *sont trois réflexions deux à deux perpendiculaires.*

2. L'axiome d'Euclide

2.1 Les axiomes précédents ne permettent aucune conclusion quant à l'existence de faisceaux de seconde classe dans Σ, particulièrement de ceux d'entre eux qui ne sont pas des systèmes polaires, et que nous qualifierons de *singuliers*. Remarquons à ce propos que si l'on admet l'existence de faisceaux singuliers dans Σ, toute réflexion appartient à deux d'entre eux, au moins. En