

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 10 (1964)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE CONSTRUCTION DE LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE FONDÉE SUR LA NOTION DE RÉFLEXION
Autor: Delessert, André
Kapitel: INTRODUCTION
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-39412>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 03.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

INTRODUCTION

La géométrie dite « élémentaire » est une notion assez confuse. Elle dissimule — si l'on ose dire — certains chapitres de mathématiques derrière une collection de recettes, de conventions et de rites extrêmement subtils qui présentent un caractère quelque peu ésotérique. Ce ne sont pas ces procédés qui nous intéressent ici, mais bien le domaine mathématique auquel ils s'appliquent: celui de la géométrie euclidienne à deux ou trois dimensions. Pour la suite, il nous est nécessaire de préciser ce que nous entendons par là. Nous avons le choix entre trois définitions qui, bien qu'équivalentes, reflètent des attitudes très différentes.

La première définition peut être considérée comme « analytique ». Soit K un corps réel (autrement dit le corps R des nombres réels ou l'un de ses sous-corps) contenant la racine carrée de chacun de ses éléments positifs. On appelle *points* les éléments de K^n ; tout point x est un système ordonné de n éléments de K : $x = (x_i) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. On introduit une distance d dans K^n en posant:

$$d(x, y) = \left[\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}}; \quad x = (x_i), y = (y_i) \in K^n.$$

On appelle *isométrie* de K^n toute application de K^n dans lui-même qui conserve la distance d . On montre qu'une isométrie de K^n est une application biunivoque de K^n sur lui-même. L'ensemble des isométries de K^n constitue donc un groupe que nous désignerons par $GE(n, K)$: le *groupe euclidien de dimension n sur K* . On appelle *géométrie euclidienne de dimension n sur K* la recherche et la classification des invariants de K^n vis-à-vis du groupe $GE(n, K)$.

Une *translation* de K^n est une application de K^n dans lui-même définie par $(x_i) \rightarrow (x_i + a_i)$ où (a_i) est un point arbitrairement choisi dans K^n . L'ensemble des translations de K^n est un sous-groupe distingué τ_n de $GE(n, K)$. Le groupe τ_n est visible-

ment isomorphe à K_+^n , où K_+ désigne le groupe additif sous-jacent à K . Le sous-groupe des éléments de $GE(n, K)$ qui laissent fixe le point (o, o, \dots, o) , ou *groupe de stabilité* de (o, o, \dots, o) , est isomorphe au groupe orthogonal à n variables sur K , noté $O(n, K)$. Ce groupe $O(n, K)$ est constitué par l'ensemble des automorphismes de l'espace vectoriel de dimension n sur K (que l'on désigne encore par K^n) qui laissent invariante la forme quadratique

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2; \quad x = (x_i) \in K^n.$$

On montre que $GE(n, K)$ est le produit semi-direct de τ_n et du groupe de stabilité de (o, o, \dots, o) (voir 2.3). Il en résulte, en particulier, que les géométries euclidiennes à deux ou trois dimensions ne sont que des épisodes mineurs dans l'étude des formes quadratiques (voir [7]). La définition que nous venons de rappeler a l'avantage de la concision et de la netteté. Elle insère très naturellement la géométrie élémentaire dans l'édifice des mathématiques tel qu'il est conçu actuellement par beaucoup de mathématiciens.

La deuxième définition pourrait être qualifiée de « physique ». C'est celle qui apparaît chez Euclide, celle qui a été mise en forme par Hilbert dans ses *Grundlagen*. A la suite d'expériences innombrables pratiquées par toutes sortes d'individus, il s'est révélé possible de décrire convenablement une quantité considérable de faits matériels en employant quelques termes et expressions bien choisis: point, droite, intersection, être sur, être entre, etc. Les règles permettant de combiner ces mots entre eux sont consignées une fois pour toutes dans des axiomes, dont l'axiome d'Euclide est le plus fameux. La géométrie euclidienne est alors l'art de découvrir et de classer les propositions correctes que l'on peut formuler à partir des notions fondamentales et des axiomes. Nous ne préciserons pas plus ces notions fondamentales et ces axiomes, renvoyant pour cela aux ouvrages de Hilbert [12] et de Kerékjarto [13]. Disons simplement qu'il est possible de le faire de manière que la définition « physique » de la géométrie euclidienne soit équivalente à la définition « analytique ». Vue sous cet angle, la géométrie élémentaire cons-

titue une branche de la physique théorique élémentaire, comparable à la mécanique rationnelle, par exemple. Le mérite d'un exposé « physique » de la géométrie élémentaire est de refléter une étape essentielle dans le cheminement historique des mathématiques et, par là-même, de convenir à des intelligences adolescentes qui doivent parcourir en raccourci un cheminement analogue. Le grand inconvénient d'un tel exposé est de dissimuler ce que l'on considère aujourd'hui comme les structures fondamentales des mathématiques.

La troisième définition relève des idées de F. Klein. Soit E_S un ensemble E muni d'une structure bien déterminée S . Soit G un groupe de transformations agissant effectivement et transitivement dans E_S ; cela signifie que G est un sous-groupe du groupe des automorphismes de E_S tel qu'à tout couple d'éléments (a, b) de E on puisse faire correspondre au moins un élément de G qui envoie a sur b . G peut être muni d'une structure S' plus forte que celle de groupe (de groupe topologique, par exemple). La géométrie de E_S relativement à G est l'étude des invariants de E_S vis-à-vis de G .

Si l'on désigne par g le sous-groupe de stabilité de l'élément a de E dans G , on peut établir une correspondance biunivoque canonique f entre E et l'espace homogène G/g . Lorsqu'on considère que G agit simultanément dans E et dans G/g , on observe que f commute avec chaque élément de G . L'espace homogène G/g peut souvent être muni d'une structure S'' obtenue à partir de S' « par passage au quotient » suivant g . Il peut alors se produire que f soit un isomorphisme entre G/g et E_S . (A ce propos, voir par exemple [17], page 65.) Nous dirons que la géométrie de E_S par rapport à G est *régulière* dans ce cas. On peut alors substituer G/g à E_S , et pour autant qu'on se borne aux géométries régulières, on peut poser la définition suivante:

Soit G un groupe (muni éventuellement d'une structure plus forte que celle de groupe) et g un sous-groupe de G tel que l'intersection des sous-groupes conjugués de g dans G se réduise à l'élément neutre. On appelle géométrie de G relativement à g l'étude des invariants de l'espace homogène G/g vis-à-vis des transformations qui y sont induites par les éléments de G .

Les axiomes d'une telle géométrie s'expriment par des hypothèses formulées sur le groupe G uniquement. Une telle situation se présente justement dans le cas de la géométrie euclidienne de dimension n sur un corps K : elle est la géométrie du groupe $GE(n, K)$ par rapport au groupe de stabilité d'un point quelconque de K^n . De ce point de vue, la géométrie euclidienne est un paragraphe de la théorie générale des groupes.

Si l'on néglige la définition dite « physique » qui ne se prête pas à une généralisation suffisante, semble-t-il, il ne reste en présence que la définition « analytique » et la troisième définition que l'on hésite à qualifier de « synthétique », ce terme étant officieusement condamné par les tenants de la première définition. Nous ne prenons pas parti ici entre « analystes » triomphants et « synthétistes » obstinés. Nous remarquerons seulement que la géométrie euclidienne est une introduction à deux domaines très vastes qui ne se recouvrent pas: la théorie des formes quadratiques et celle des groupes de transformations. Loin de condamner une définition au profit de l'autre, l'enseignement élémentaire a tout avantage à adopter à l'égard de la géométrie euclidienne deux attitudes mentales qui se complètent. Dans ce qui suit, nous allons essayer d'examiner la contribution que peut apporter notre troisième définition à la géométrie élémentaire. Pour cela, nous partirons de la définition analytique de $GE(n, K)$ et nous formulerons un système d'axiomes dont nous montrerons qu'il caractérise $GE(n, K)$. Afin de préciser notre cheminement, nous allons rappeler quelques faits très simples.

Pour fixer les idées, nous nous plaçons dans le cas de la géométrie plane: $n = 2$. A toute droite d du plan, on peut associer une isométrie distincte de la transformation identique I et laissant fixes tous les points de d . Cette isométrie est unique; on l'appelle la *réflexion* suivant d . Tout élément A de $GE(2, K)$ peut être obtenu en formant le produit d'un certain nombre de réflexions. Ce nombre peut être borné à trois et sa parité est uniquement déterminée par l'élément A . Les éléments de $GE(2, K)$ qui résultent du produit d'un nombre pair de réflexions sont dits *propres* et constituent un sous-groupe d'indice 2 dans $GE(2, K)$. Lorsque trois droites a, b et c passent par un même point ou admettent une même perpendiculaire, le produit des

réflexions suivant a , b et c est encore une réflexion; la réciproque est vraie. La condition nécessaire et suffisante pour que deux droites a et b soient perpendiculaires est que les réflexions associées à a et b soient distinctes et commutent. Les seuls éléments involutifs de $GE(2, K)$ sont les réflexions et les demi-tours, tout demi-tour étant le produit de deux réflexions suivant des droites perpendiculaires. En associant à tout demi-tour son centre, on établit une correspondance biunivoque entre l'ensemble des demi-tours et celui des points du plan. Un demi-tour et une réflexion commutent quand le centre du demi-tour est sur l'axe de la réflexion, et dans ce cas seulement.

Comme on le voit, il existe tout un ordre de faits géométriques élémentaires qui s'interprètent très simplement comme des propriétés du groupe $GE(2, K)$. Il est naturel de considérer un groupe G engendré par un ensemble d'éléments involutifs appelés les-uns « droites » et les autres « points », tout point étant le produit de deux droites distinctes qui commutent. Un point P est « sur » une droite d quand P et d commutent. Deux droites sont perpendiculaires quand elles sont distinctes et qu'elles commutent, et ainsi de suite. Après quoi l'on pose un ensemble d'axiomes portant sur les points et les droites de G de sorte que G soit isomorphe à un groupe $GE(2, K)$. Sous l'impulsion de plusieurs géomètres parmi lesquels il faut signaler d'abord Hjelmlev, cette idée s'est développée. Mais il s'est révélé intéressant de ne conserver qu'une partie des axiomes nécessaires à la détermination de $GE(2, K)$ et d'abandonner des axiomes concernant l'ordre, l'existence de droites parallèles et la libre mobilité. L'étude des groupes ainsi caractérisés — parmi lesquels on trouve non seulement $GE(2, K)$, mais encore les groupes fondamentaux des géométries elliptiques et hyperboliques, par exemple — est l'objet de la *géométrie métrique absolue*. L'exposé le plus complet sur la question est le beau traité de M. F. Bachmann qui a paru récemment (voir [3]). Des développements analogues peuvent être faits pour la géométrie de l'espace ($n = 3$) (voir [1], par exemple).

Nous pouvons situer maintenant notre démarche par rapport à la géométrie métrique absolue. En simplifiant un peu, nous pouvons considérer que celle-ci se propose d'étudier certains

groupes à l'aide de termes et d'expressions propres à la géométrie élémentaire: point, droite, être sur, etc. Mais on pourrait insister plus particulièrement sur le fait suivant: si l'on reprend le cas de la géométrie plane, on peut observer que le groupe $GE(2, K)$ est engendré par une famille $\Sigma(2, K)$ d'éléments involutifs — les réflexions — telle que le produit d'un nombre impair de ces éléments générateurs ne saurait être égal à l'élément neutre I de $GE(2, K)$. Nous dirons d'un groupe possédant cette propriété qu'il est engendré par des réflexions ou encore que c'est un *R-groupe*. Les groupes symétriques finis, les groupes $GE(n, K)$, les groupes orthogonaux $O(L, \Phi)$ sur les corps L de caractéristique $\neq 2$ et relatifs à des formes quadratiques Φ régulières sont des *R-groupes* (voir [11]). Plus généralement, tout groupe engendré par une famille d'éléments involutifs est un *R-groupe* ou le groupe-quotient d'un *R-groupe* par un sous-groupe distingué d'ordre 2.

Si nous reprenons le groupe $GE(2, K)$, nous voyons que la condition suivante:

(1) « le produit de trois réflexions est une réflexion »

définit dans $\Sigma(2, K)$ une relation intéressante. Géométriquement, cette condition est équivalente au fait que les axes des trois réflexions considérées appartiennent à un même faisceau de droites. Dans l'ensemble des droites du plan, le fait d'appartenir à un même faisceau détermine une relation ternaire *symétrique* (si $a_1, a_2,$ et a_3 appartiennent à un même faisceau, il en est de même de a_i, a_j et a_k , où (i, j, k) est une permutation quelconque des indices 1, 2 et 3), *réflexive* (les droites a, a et b appartiennent à un même faisceau, quelles que soient a et b) et *transitive* (si les droites a et b sont distinctes, si $a, b,$ et c appartiennent à un même faisceau tout comme a, b et d , alors a, c et d appartiennent encore à un même faisceau). Ces trois propriétés caractérisent les *relations d'incidence ternaires*. Les *R-groupes* dans lesquels la condition (1) définit une relation d'incidence ternaire seront appelés *RI-groupes*. Les exemples donnés plus haut sont des *RI-groupes*.

La notion de *R-groupe* semble assez générale pour justifier des recherches plus détaillées. En ce qui concerne en particulier

les *RI*-groupes, on peut signaler les travaux de M. R. Lingenberg (voir [16]). Nous nous sommes proposé ici deux buts. Le premier consiste en l'examen sur un exemple bien connu de quelques notions qui interviendront probablement dans l'étude des *R*-groupes. Le deuxième est de formuler pour la géométrie euclidienne à n dimensions un système d'axiomes maniables en nombre réduit, en adoptant le langage des *R*-groupes. Il ne s'agit pas là d'une recherche axiomatique en soi. Notre propos est de donner un exemple de construction de la géométrie élémentaire fondé sur des notions généralement peu exploitées dans l'enseignement du second degré. Le changement de point de vue est susceptible de faire apparaître des perspectives intéressantes.

Afin de ne pas manquer notre second objectif, nous avons fait en sorte de conserver le contact avec les problèmes de la géométrie élémentaire. Ainsi nous avons développé particulièrement la géométrie plane à partir de laquelle il est possible de construire simplement la géométrie euclidienne à n dimensions ($n \geq 3$) par une sorte de récurrence. Dans ce domaine restreint, nous avons fait en sorte de donner toutes les démonstrations utiles, même lorsqu'elles sont classiques. Pour les mêmes raisons, nous avons introduit deux axiomes dont le rôle algébrique est assez mince dans notre construction: il s'agit de l'axiome d'Archimède et de celui du compas. Ils ne se justifient ici que par le rôle essentiel qu'ils jouent dans l'enseignement élémentaire. En revanche, nous n'avons généralement pas traduit les propositions énoncées en terme de géométrie élémentaire traditionnelle, laissant ce soin au lecteur curieux d'observer l'incidence des développements qui vont suivre sur l'ordonnance d'un exposé élémentaire de géométrie euclidienne. Il importe de rappeler toutefois qu'ils ne sauraient figurer tels quels dans un cours destiné aux enfants.