

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 9 (1963)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: EN MARGE DU CALCUL DES VARIATIONS
Autor: Lebesgue, Henri
Kapitel: Chapitre V La méthode classique du calcul des variations
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-38785>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 19.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

CHAPITRE V

La méthode classique du calcul des variations

Avant de donner une idée plus précise de la méthode directe dans le calcul des variations (Chap. VI), je dois, puisqu'il s'agit de comparer deux procédés, parler du calcul des variations classique. C'est par lui que je commence parce qu'il a été le point de départ et le procédé unique tant qu'on n'en avait pas reconnu les lacunes. L'exposé que je vais en donner, peu différent de celui des traités, est extrait des notes préliminaires d'un cours que j'ai fait au Collège de France « sur les problèmes en marge du calcul des variations ». Certains étudiants, frappés des difficultés rencontrées dans les applications en apparence les plus simples du calcul des variations, déclaraient alors, avec la belle intransigeance de la jeunesse: « Le calcul des variations classique n'existe pas ». C'est pourquoi j'ai tenu à exposer tout d'abord la méthode de Lagrange et Euler afin de montrer que, malgré ses lacunes logiques et toutes ses imperfections, elle joue dans les problèmes de son ressort le même rôle que la méthode de Fermat pour les problèmes d'extremum algébrique. Certes une méthode complète reste à trouver, mais ni le procédé classique, ni le procédé direct ne la donne; il paraît probable qu'ils interviendront conjointement dans la constitution de la méthode désirée.

a et b étant deux nombres fixes donnés, $F(x, u, v)$ une fonction donnée, on considère l'intégrale

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx,$$

dans laquelle y est une fonction à trouver, définie de a à b , continue ainsi que sa dérivée première. Pour F , on suppose que c'est une fonction à dérivées première et seconde continues, définies

pour toutes les valeurs de x , u , v , nécessaires à considérer. Il faut trouver $y(x)$ de façon que $I(y)$ atteigne l'un de ses extrema, disons son minimum pour fixer le langage.

L'idée mise en œuvre est remarquablement simple. Soit $y_0(x)$ la fonction, supposée existante, donnant le minimum; pour toute fonction de deux variables $y(x, t)$ telle que l'on ait $y(x, 0) \equiv y_0(x)$, $t = 0$ donnera le minimum de la fonction $I[y(x, t)]$ dépendant de la seule variable t . La méthode de Fermat appliquée à la recherche de ce minimum donnera une relation que devra vérifier $y_0(x)$ et qui jouera le rôle de l'équation dérivée ordinaire.

Cette relation contient la fonction $y(x, t)$ à laquelle il convient de laisser, sinon toute sa généralité, du moins une grande généralité, car il est clair que $y_0(x)$ peut donner le minimum cherché pour $I[y(x, t)]$ sans le donner pour $I[y(x)]$. Peut-on du moins espérer qu'il suffira d'envisager une famille restreinte de $y(x, t)$? Non, car supposons seulement qu'il s'agisse du minimum de la fonction de deux variables $\varphi(t, t_1) = I[y(x, t, t_1)]$, $y(x, t, t_1)$ étant donnée. La méthode classique revient à écrire d'abord que $t = t_1 = 0$, par exemple, donne le minimum pour $y(x, t, 0)$ et $y(x, 0, t_1)$. Mais supposons même que le point $0, t = t_1 = 0$, donne le minimum pour toute droite issue de O , donc pour toute fonction $y(x, t, kt)$, k fixe quelconque; il n'en résulte nullement que 0 donnera le minimum de $\varphi(t, t_1)$. Prenons en effet deux circonférences tangentes intérieurement en O ; à l'extérieur de la circonférence extérieure C_1 et sur cette circonférence, prenons pour $\varphi(t, t_1)$ une fonction continue ayant son minimum en O , $\varphi(t, t_1) = \sqrt{t^2 + t_1^2}$ par exemple; à l'intérieur de la circonférence intérieure C_2 et sur elle, faisons de même, les deux fonctions étant égales en O , par exemple, encore $\varphi = \sqrt{t^2 + t_1^2}$; entre C_1 et C_2 , prenons pour φ une fonction continue se raccordant avec les deux autres sur C_1 et C_2 , mais n'ayant pas l'origine pour minimum, par exemple, sur chaque droite issue de O et coupant C_1 et C_2 en A_1 et A_2 , φ linéaire de A_1 et de A_2 jusqu'au milieu B de $A_1 A_2$ et égale en B à $-OB$. Ainsi, la considération de droites passant par O ne suffit pas; ni celle des coniques, il suffirait en effet de remplacer C_1 et C_2 par deux courbes entre lesquelles ne passe aucune conique; ni celle des courbes analytiques, car

il suffirait de remplacer C_1 et C_2 par deux courbes qui, au voisinage de O , soient

$$y = e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad y = 2e^{-\frac{1}{x^2}}. \quad 1)$$

On reconnaîtra facilement qu'il suffirait de se borner à la considération des courbes $x(\theta)$, $y(\theta)$ données par deux fonctions monotones, mais c'est là une famille très vaste de courbes et il faudrait définir $\varphi(t, t_1)$ pour toutes ces courbes.

Ainsi, la méthode des dérivées qui ne suffit pas pour obtenir le minimum d'une fonction d'une seule variable à coup sûr, qui ne fournit que des conditions nécessaires, est encore moins satisfaisante quand le nombre des variables augmente. Mais le problème devenant alors plus compliqué, les renseignements qu'elle fournit conservent à peu près la même valeur relative. Quand nous passons au calcul des variations, il en est de même, l'emploi des dérivées ne fournit que des conditions nécessaires, les compléments indispensables s'accroissent, mais vu la difficulté accrue des questions, l'intérêt des résultats fournis par l'emploi des dérivées reste du même ordre.

Il faut donc conserver à $y(x, t)$ sa généralité; mais alors la relation que donne la dérivée de $I(t)$ contient $y(x, t)$ et l'on ne sait l'utiliser. Au contraire, chaque fonction $y(x, t)$ construite algébriquement à partir de $y_0(x)$ et de t donnera une relation intégral-différentielle en $y_0(x)$ que l'on peut espérer employer. Le cas le plus favorable serait naturellement celui où l'on aurait une équation différentielle; c'est précisément ce à quoi Lagrange était parvenu dans des cas particuliers et Euler dans le cas général.

On choisit $y(x, t)$ linéaire en t :

$$y(x, t) = y_0(x) + t\Delta y(x),$$

$\Delta y(x)$ étant une fonction ayant les mêmes continuité et dérivabilité que $y_0(x)$; les fonctions de x données par $y(x, t)$

1) Cet artifice peut de même servir à prouver qu'une fonction peut être en un point O continue sur chaque droite ou sur chaque courbe analytique passant par O sans être continue par rapport à l'ensemble des variables dont elle dépend.

pour les diverses valeurs de t constituent en somme une droite de l'espace fonctionnel $y(x)$.

L'analogie avec le cas des fonctions de variables se poursuit donc. Avec ce choix, on aura une relation intégral-différentielle; pour avoir une équation différentielle, il faut ne faire intervenir qu'une valeur de x , d'où l'idée de prendre $\Delta y(x) \equiv 0$ sauf au voisinage de cette valeur de x . (Je m'écarterai quelque peu ici des considérations classiques. Cette modification comme toutes celles de cet article a pour but, en utilisant des considérations particulières élémentaires, de permettre de mieux suivre l'ensemble des idées, depuis les principes jusqu'aux résultats, tandis que des considérations plus générales, obligeant à recourir à des résultats techniques, masquent quelque peu la suite des raisonnements, précisément parce que les résultats techniques proviennent eux-mêmes d'un raisonnement. Par contre, cela permet des démonstrations plus brèves. Comme le disait Bouquet: « Les démonstrations courtes ont un avantage: être courtes; les démonstrations longues ont un avantage: être longues. »)

Nous prendrons $\Delta y(x)$ comme ayant la forme indiquée par la figure:

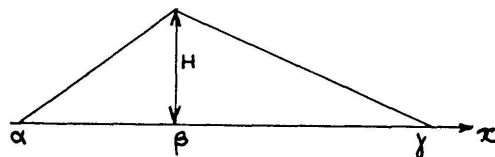


Fig. 13

Cette forme entraîne pour $\frac{d}{dx} \Delta y(x) = \Delta y'(x)$ des points de discontinuité de première espèce; cela n'est nullement gênant. Soit $\delta y \equiv \Delta y$ en dehors d'un petit intervalle $\alpha - \alpha_0, \alpha + \alpha_0$ et à l'intérieur de cet intervalle tel que δy et $\delta y'$ soient continus partout et uniformément bornés. Alors:

$$\begin{aligned} I(y + \Delta y) &= \\ I(y + \delta y) + \int_{\alpha - \alpha_0}^{\alpha + \alpha_0} [F(x, y + \Delta y, y' + \Delta y') - F(x, y + \delta y, y' + \delta y')] dx \\ &= I(y + \delta y) + 2\theta\alpha_0 \mathcal{M}, \quad |\theta| < 1, \end{aligned}$$

\mathcal{M} étant facilement majorable; ainsi $I(y + \Delta y)$ et $I(y + \delta y)$ peuvent se remplacer dans la recherche du minimum.

On peut faire tendre Δy vers zéro de bien des manières.

1. Prenons d'abord $H = th$, $\alpha = \beta - h$, $\gamma = \beta + h$, h étant fixe.

Pour $h = 0$, $\frac{\partial I(y_0 + \Delta y)}{\partial t} = 0$, et pour $h \neq 0$, on doit avoir cette même égalité pour $t = 0$. Or :

$$\begin{aligned} I(y_0 + \Delta y) &= \int_a^{\beta-h} F(x, y_0, y'_0) dx + \int_{\beta-h}^{\beta} F[x, y_0 + t(x - \beta + h), y'_0 + t] dx \\ &+ \int_{\beta}^{\beta+h} F[x, y_0 + t(\beta + h - x), y'_0 - t] dx + \int_{\beta+h}^b F(x, y_0, y'_0) dx. \\ \frac{\partial}{\partial t} I(y_0 + \Delta y) &= \int_{\beta-h}^{\beta} \left[(x - \beta + h) \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y'} \right] dx \\ &+ \int_{\beta}^{\beta+h} \left[(\beta + h - x) \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y'} \right] dx. \end{aligned}$$

Dans la première intégrale, les variables sont :

$$x, y_0 + t(x - \beta + h), y'_0 + t,$$

dans la seconde

$$x, y_0 + t(\beta + h - x), y'_0 - t,$$

y et y' étant naturellement prises pour la valeur de x considérée. Pour $t = 0$, ces valeurs sont x, y_0, y'_0 ; donc on doit avoir pour ces valeurs :

$$\int_{\beta-h}^{\beta} \left[\frac{\partial F}{\partial y} (x - \beta + h) + \frac{\partial F}{\partial y'} \right] dx + \int_{\beta}^{\beta+h} \left[\frac{\partial F}{\partial y} (\beta + h - x) - \frac{\partial F}{\partial y'} \right] dx = 0,$$

quel que soit h . La dérivée du premier membre par rapport à h est donc aussi identiquement nulle. Or, grâce aux hypothèses

faites sur la continuité et la dérivabilité de la fonction donnée F , elle s'écrit :

$$\int_{\beta-h}^{\beta+h} \frac{\partial F}{\partial y_0} dx - \frac{\partial F(\beta-h, y_0, y'_0)}{\partial y'_0} + \frac{\partial F(\beta+h, y_0, y'_0)}{\partial y'_0} = 0,$$

ou

$$\int_{\beta-h}^{\beta+h} \frac{\partial F}{\partial y_0} dx + \frac{\partial F(\beta+h, y_0, y'_0)}{\partial y'_0} = \int_{\beta-h}^{\beta+h} \frac{\partial F}{\partial y_0} dx + \frac{\partial F(\beta-h, y_0, y'_0)}{\partial y'_0}.$$

D'où la condition nécessaire :

$$\int_x^x \frac{\partial F}{\partial y_0} dx + \frac{\partial F(x, y_0, y'_0)}{\partial y'_0} = \text{constante},$$

ou

$$\frac{\partial F}{\partial y_0} + \frac{d}{dx} \frac{\partial F(x, y_0, y'_0)}{\partial y'_0} = 0;$$

car $\frac{\partial F}{\partial y_0}$ existant et la dérivée d'une constante étant nulle, $\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_0}$ existe bien.

Nous venons d'obtenir *l'équation différentielle d'Euler*, pour pouvoir la développer, supposons que la fonction donnée F admette des dérivées secondes continues. Alors

$$\frac{\partial F[x+h, y_0(x+h), y'_0(x+h)]}{\partial y'_0} - \frac{\partial F[x, y_0(x), y'_0(x)]}{\partial y'_0} =$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'_0} + \frac{\partial^2 F}{\partial y_0 \partial y'_0} \frac{\Delta y}{h} + \frac{\partial^2 F}{\partial y'_0{}^2} \frac{\Delta y'}{h},$$

le second membre étant pris pour une valeur $x + \theta h$ comprise entre x et $x+h$. Faisons tendre h vers zéro; tous les termes du second membre, sauf peut-être le dernier, tendent vers des limites. Donc celui-ci $\frac{\partial^2 F}{\partial y'_0{}^2} \frac{\Delta y'}{h}$ a aussi une limite. Ceci peut se produire de deux façons :

ou bien $\frac{\partial^2 F}{\partial y_0'^2}$ est nulle pour la valeur x , ou bien $\frac{\Delta y'}{h}$ a une limite qui est y_0'' . Donc: en tout point, qui n'est pas à la frontière du champ de variation des variables x, y, y' , de la courbe $y = y_0(x)$ donnant le minimum, on a soit:

$\frac{\partial^2 F}{\partial y_0'^2} = 0$, soit l'équation d'Euler développée

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y_0'} + \frac{\partial^2 F}{\partial y_0 \partial y_0'} y_0' + \frac{\partial^2 F}{\partial y_0'^2} y_0'' = 0.$$

2. Conservons les mêmes notations, mais intervertissons les rôles de t et de h ; t sera fixe et h variable; h ne pouvant devenir négatif, nous aurons seulement à écrire que $\frac{\partial I}{\partial h}$ est positif ou nul pour $h = 0$. Or

$$\frac{\partial I}{\partial h} = -F(\beta - h, y_0, y_0')$$

$$\begin{aligned} & + \left\{ F(\beta - h, y_0, y_0' + t) + \int_{\beta - h}^{\beta} t \frac{\partial F[x, y_0 + t(x - \beta + h), y_0' + t]}{\partial y_0} dx \right\} \\ & + \left\{ F(\beta + h, y_0, y_0' - t) + \int_{\beta}^{\beta + h} t \frac{\partial F[x, y_0 + t(\beta + h - x), y_0' - t]}{\partial y_0} dx \right\} \\ & - F(\beta + h, y_0, y_0'). \end{aligned}$$

D'où, en faisant $h = 0$, on a, quel que soit t ,

$$F(\beta, y_0, y_0' + t) + F(\beta, y_0, y_0' - t) - 2F(\beta, y_0, y_0') \geq 0.$$

Ainsi, en tout point, qui n'est pas à la frontière du champ de variation des variables, de la courbe $y = y_0(x)$ donnant le minimum, la fonction $F(x, y_0, y')$ de la variable y' est une fonction concave.

En particulier, si F est analytique ou possède assez de dérivées, la première des dérivées $\frac{\partial^p F}{\partial y_0'^p}$ non nulle doit être positive

et fournie par une valeur paire de p . Si l'on se borne aux dérivées secondes, *on ne peut conclure à l'existence du minimum que si* $\frac{\partial^2 F}{\partial y_0'^2}$ *est positif ou nul; c'est la condition de Legendre.*

Par une extension du qualificatif extrémal, on appelle toute solution de l'équation d'Euler une courbe extrémale. Lorsque le long d'une telle courbe $\frac{\partial^2 F}{\partial y_0'^2}$ est positif, la courbe est la seule pouvant donner le minimum strict. Si le long de l'extrémale $\frac{\partial^2 F}{\partial y_0'^2}$ est positif ou nul, on ne peut plus affirmer que cette courbe est la seule pouvant donner localement le minimum. C'est le cas du minimum large. Legendre appelle réguliers les problèmes où $\frac{\partial^2 F}{\partial y_0'^2}$ garde un signe constant. Il y a les problèmes réguliers positifs où l'équation d'Euler sert à la recherche des minima et les problèmes réguliers négatifs où elle sert à la recherche des maxima. On voit à quel point se poursuit l'analogie avec le cas des fonctions de variables.

3. Combinons les deux modes précédents de choix en posant $\alpha = \beta - h$, $H = ht$, $\gamma = \beta + \frac{ht}{q}$; t et q devront être de même signe, supposons-les positifs pour fixer les idées, le cas où ils seraient négatifs se traiterait de même.

Il nous faut écrire que $\frac{\partial I}{\partial t}$ est positif ou nul, pour $t = 0$, à droite; il suffira donc d'écrire que cette quantité est positive ou nulle pour t tendant vers zéro en décroissant. Or

$$I = \int_a^{\beta-h} F(x, y_0, y_0') dx + \int_{\beta-h}^{\beta} F\left[x, y_0 + t(x - \beta + h), y_0' + t\right] dx$$

$$+ \int_{\beta}^{\beta + \frac{ht}{q}} F\left[x, y_0 + t\left(\beta + \frac{ht}{q} - x\right), y_0' - q\right] dx + \int_{\beta + \frac{ht}{q}}^b F(x, y_0, y_0') dx,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial t} = & \int_{\beta-h}^{\beta} (x-\beta+h) \frac{\partial F [x, y_0 + t(x-\beta+h), y'_0 + t]}{\partial y_0} dx \\ & + \int_{\beta-h}^{\beta} \frac{\partial F [x, y_0 + t(x-\beta+h), y'_0 + t]}{\partial y'_0} dx \\ & + \int_{\beta}^{\beta + \frac{ht}{q}} \left(\beta + \frac{2ht}{q} - x \right) \frac{\partial F \left[x, y_0 + t \left(\beta + \frac{ht}{q} - x \right), y'_0 - q \right]}{\partial y_0} dx \\ & + \frac{h}{q} F \left(\beta + \frac{ht}{q}, y_0, y'_0 - q \right) - \frac{h}{q} F (\beta, y_0, y'_0); \end{aligned}$$

d'où, pour $t = 0$,

$$\begin{aligned} & \int_{\beta-h}^{\beta} (x-\beta+h) \frac{\partial F (x, y_0, y'_0)}{\partial y_0} dx + \int_{\beta-h}^{\beta} \frac{\partial F (x, y_0, y'_0)}{\partial y'_0} dx \\ & + \frac{h}{q} F (\beta, y_0, y'_0 - q) - \frac{h}{q} F (\beta, y_0, y'_0) \geq 0. \end{aligned}$$

Pour $h = 0$, ceci est identiquement nul, nous pouvons donc écrire que, pour $t = h = 0$, $\frac{\partial^2 I}{\partial t \partial h}$ est positif ou nul. Or

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 I}{\partial t \partial h} = & \int_{\beta-h}^{\beta} \frac{\partial F (x, y_0, y'_0)}{\partial y_0} dx + \frac{\partial F (\beta-h, y_0, y'_0)}{\partial y'_0} \\ & + \frac{1}{q} F (\beta, y_0, y'_0 - q) - \frac{1}{q} F (\beta, y_0, y'_0), \end{aligned}$$

donc

$$\frac{\partial F}{\partial y'_0} (\beta, y_0, y'_0) + \frac{1}{q} F (\beta, y_0, y'_0 - q) - \frac{1}{q} F (\beta, y_0, y'_0) \geq 0,$$

ou, en multipliant par q , en posant $y'_0 - q = p$ et $\beta = x$,

$$E (x, y_0, y'_0, p) = F (x, y_0, p) - F (x, y_0, y'_0) - (p - y'_0) F'_{y'_0} (x, y_0, y'_0) \geq 0.$$

C'est la *condition de Weierstrass*; elle doit être remplie dans les mêmes conditions que les deux autres. Le nombre p qui y figure est quelconque.

Je ne puis continuer à donner ici l'exposé du calcul des variations en somme fort complet qui était le début de mon cours; bien que bref, il nous entraînerait trop loin. Ce qui suit est la réunion de fragments dispersés dans ce cours et relatifs à ce qu'on appelle les conditions suffisantes.

Les Δy qui nous ont servi sont très particuliers. Quelle est la portée des conditions qu'ils nous ont fournies? La condition de Legendre étant une conséquence de celle de Weierstrass, nous ne nous occuperons que de 1 et 3. Dans 1, Δy et $\Delta y'$ tendent simultanément vers zéro, on a affaire à une continuité d'ordre 1; dans 3, $\Delta y'$ ne tend pas vers zéro, on a affaire à une continuité d'ordre 0. Or, toute fonction continue δy à dérivée continue à laquelle on fera jouer le rôle de Δy est infiniment approchée par une somme de Δy à continuité d'ordre 0; donc les conditions d'Euler et de Weierstrass entraînent bien le minimum de $y_0(x) + \lambda \delta y$, c'est-à-dire ce qu'on appelle le minimum de Lagrange. C'est le minimum sur toute droite issue de $y_0(x)$ de l'espace fonctionnel $y(x)$; mais nous avons vu que ce minimum n'entraîne pas nécessairement celui que nous cherchons.

Lorsqu'il s'agit de fonctions algébriques, nous savons que les conditions suffisantes pour le minimum sont obtenues en supposant que les conditions nécessaires sont vérifiées aussi au voisinage des points où elles sont indispensables; ainsi, pour le minimum d'une fonction d'une variable, on suppose $F''_{x^2} \geq 0$ dans tout le voisinage du point pouvant donner le minimum. Nous allons retrouver le fait analogue dans le calcul des variations.

Supposons qu'entre les deux points donnés, il y ait une solution de l'équation d'Euler, et pour qu'il n'y ait aucune ambiguïté relativement à l'extrémale pouvant donner le minimum, supposons qu'il n'y ait qu'une extrémale joignant les deux points ¹⁾. Pour qu'il ne s'agisse pas seulement d'une heureuse chance, supposons que nous soyons dans un champ d'extré-

1) La condition de Jacobi à laquelle il a été fait allusion et qui ne trouvera pas place dans cet exposé est relative à cette ambiguïté.

males, c'est-à-dire dans une région du plan telle que par deux de ses points il passe toujours une solution de l'équation d'Euler et une seule.

Soit $y = y_0(x)$ l'extrémale du champ joignant les deux points donnés. Nous voulons comparer $I(y_0)$ à $I(Y)$, $y = Y(x)$ étant une autre courbe joignant les deux points donnés. Soit la famille d'extrémales $y(x, t)$ telle que $y_0(x) \equiv y(x, 0)$; quels que soient x_1 et x_2 sur $y(x, t)$, on a :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} F[x, y(x, t), y'(x, t)] dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial F[x, y(x, t), y'(x, t)]}{\partial y} \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial F[x, y(x, t), y'(x, t)]}{\partial y'} \frac{\partial y'(x, t)}{\partial t} \right\} dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{d}{dx} \frac{\partial F[x, y(x, t), y'(x, t)]}{\partial y'} \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial F[x, y(x, t), y'(x, t)]}{\partial y'} \frac{\partial y'(x, t)}{\partial t} \right\} dx \\ &= \left[\frac{\partial F[x, y(x, t), y'(x, t)]}{\partial y'} \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right]_{x_1}^{x_2}. \end{aligned}$$

Partageons (a, b) en intervalles partiels (x_i, x_{i+1}) et désignons par t_i la valeur telle que $y(x_i, t_i) = Y(x_i)$.
On aura :

$$\begin{aligned} I(Y) - I(y_0) &= \sum \int_{x_i}^{x_{i+1}} \{F(x, Y, Y') - F[x, y(x, t_i), y'(x, t_i)]\} dx \\ &+ \sum \int_{x_i}^{x_{i+1}} \{F[x, y(x, t_i), y'(x, t_i)] - F(x, y_0, y'_0)\} dx \end{aligned}$$

D'après ce qui précède, le dernier terme s'écrit encore

$$\begin{aligned}
 & \sum \int_0^{t_i} \left[\frac{\partial F [x, y(x, t), y'(x, t)]}{\partial y'} \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right]_{x_i}^{x_{i+1}} \\
 &= \sum \int_0^{t_i} \frac{\partial F [x_{i+1}, y(x_{i+1}, t), y'(x_{i+1}, t)]}{\partial y'} \frac{\partial y(x_{i+1}, t)}{\partial t} dt \\
 & - \sum \int_0^{t_i} \frac{\partial F [x_i, y(x_i, t), y'(x_i, t)]}{\partial y'} \frac{\partial y(x_i, t)}{\partial t} dt \\
 &= \sum \int_{y(x_{i+1}, 0)}^{y(x_{i+1}, t_i)} \frac{\partial F [x_{i+1}, y(x_{i+1}, t), y'(x_{i+1}, t)]}{\partial y'} dy \\
 & - \sum \int_{y(x_i, 0)}^{y(x_i, t_i)} \frac{\partial F [x_i, y(x_i, t), y'(x_i, t)]}{\partial y'} dy;
 \end{aligned}$$

t étant cette fois la fonction implicite de x et de y telle que $y(x, t) \equiv y$; nous poserons $\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} = u(x, y)$. Alors, en désignant par ε la contribution de termes extrêmes des sommes précédentes et groupant autrement les termes, les sommes précédentes s'écrivent

$$\varepsilon + \sum \int_{y(x_i, t_i)}^{y(x_i, t_{i-1})} \frac{\partial F(x_i, y, u)}{\partial u} dy.$$

Or, l'intervalle d'intégration est:

$$y(x_i, t_{i-1}) - y(x_i, t_i) = [y(x_i, t_{i-1}) - y(x_{i-1}, t_{i-1})] + [Y(x_{i-1}) - Y(x_i)],$$

d'où par le théorème des accroissements finis, avec un nouvel ε

$$[u(x_i, t_{i-1}) - Y'(x_i) + \varepsilon](x_i - x_{i-1}).$$

Quand on augmente indéfiniment le nombre des intervalles (x_{i-1}, x_i) en les faisant tendre uniformément vers zéro, la limite de l'expression est :

$$- \int_a^b (Y' - u) \frac{\partial F(x, Y, u)}{\partial u} dx$$

et l'on a

$$\begin{aligned} I(Y) - I(y_0) &= \int_a^b \left\{ F(x, Y, Y') - F(x, Y, u) - (Y' - u) \frac{\partial F(x, Y, u)}{\partial u} \right\} dx \\ &= \int_a^b E(x, Y, u, Y') dx. \end{aligned}$$

Ainsi, si dans le voisinage de l'extrémale $y = y_0(x)$, on a constamment $E(x, Y, u, p) \geq 0$, c'est-à-dire si la condition de Weierstrass est remplie dans tout ce voisinage, l'extrémale donne bien un minimum, qui est strict si l'on a toujours affaire à l'inégalité $E(x, Y, u, p) > 0$ ¹⁾.

¹⁾ Il existe de très élégantes démonstrations de cette condition suffisante, celle de M. Hilbert, par exemple. J'ai voulu montrer que les conditions suffisantes peuvent, comme les nécessaires, être déduites d'un calcul patient de $I(Y)$ et $I(y_0)$. Ici, il aurait été plus élégant de se servir de la décomposition de Y déjà utilisée pour les conditions nécessaires; cela est possible, mais je n'ai pas su le faire brièvement.