Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 9 (1963)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: EN MARGE DU CALCUL DES VARIATIONS

Autor: Lebesgue, Henri

Kapitel: Chapitre IV Sur la plus courte distance entre deux points d'une surface développable

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-38785

Chapitre IV

Sur la plus courte distance entre deux points d'une surface développable

Le cas des problèmes réguliers semble le plus simple; remarquons que, cependant, la méthode des dérivées ou son équivalent pour le calcul des variations, ne fournit pas en général la solution cherchée sans ambiguïté.

S'agit-il d'avoir le minimum de $F(X)$ pour $a \leqq X \leqq b$. Si l'on a trouvé X_0 dans (a, b) et tel que $F'(X_0) = 0$, $F''(X_0) > 0$, on sera certain que X_0 donne un minimum, mais ce ne sera peut-être qu'un minimum local ou, comme l'on dit, relatif. Il reste à comparer ces minima locaux. L'habitude est de considérer les recherches nécessaires comme accessoires, encore qu'elles soient parfois fort délicates; leur examen a conduit, dans le calcul des variations, aux conditions de Legendre et de Jacobi, ce qui montre bien qu'elles ont en réalité une importance qu'on néglige.

Comme tout problème du calcul des variations peut être simplifié jusqu'à prendre un aspect très élémentaire, j'avais, il y a quelques années, bâti par une telle transformation, un exercice destiné à montrer aux élèves de Sèvres la nature des études complémentaires que réclame le traitement complet d'un problème d'extremum. Voici cet énoncé débarrassé de certains artifices destinés à guider les élèves et à donner à l'énoncé l'aspect de leurs problèmes de concours.

Exercice relatif au plus court chemin tracé sur la surface d'un cube et joignant deux points donnés M et N, de cette surface.

1. Montrer que ce plus court chemin

a) vérifie à chaque traversée d'arête une condition que l'on énoncera, *b)* ne passe par aucun sommet si ni M, ni N n'est sur une arête,

c) ne passe pas deux fois dans la même face.

En conclure que le plus court chemin cherché est à choisir parmi des chemins dont chacun est fourni par une des suites de faces joignant M à N; suites qui sont en nombre fini. Montrer qu'une construction simple permet, pour chaque suite de faces, de reconnaître s'il lui correspond ou non un chemin utile à considérer et de fournir ce chemin.

Quelles modifications devraient être apportées aux faits constatés s'il s'était agi, au lieu d'un cube, d'un polyèdre convexe quelconque, puis d'un polyèdre quelconque.

2. $A.B, C, D$, étant les sommets successifs d'une face, A', B', C', D', étant symétriques de A, B, C, D, par rapport au centre du cube, on supposera M dans la face $ABCD$ et, pour fixer les idées, tel que les distances de M à AB et à AD soient respectivement le $1/5$ et les $2/5$ du côté du cube.

Montrer que l'on peut effectuer les comparaisons exigées au n° 1 d'un seul coup et quelle que soit la position de N, en opérant ainsi: on fend la surface du cube suivant les 8 plus courts chemins de M aux 8 sommets du cube puis on développe la surface ainsi fendue, par exemple sur le plan de la face $A'B'C'D'$ laissée fixe. Tous les chemins à considérer deviennent rectilignes. Appliquer au cas où N est le symétrique de M par rapport au centre du cube. Décrire le polygone développement Π obtenu pour le choix spécial du point M; indiquer en quelques mots comment il varie quand M varie et à quels moments il subit des variations importantes.

3. Démontrer que le polygone Π peut être partagé en 8 polygones partiels dont chacun est constitué par les images des points N dont les plus courts chemins à M sont représentés sur Π par des segments rectilignes aboutissant à l'un déterminé des 8 transformés de M. Caractériser les côtés et les sommets de ces polygones partiels par rapport aux transformés de M.

En déduire qu'il est possible de pratiquer dans la surface du cube 8 coupures respectant cette fois la face $ABCD$ et permettant, en laissant cette face immobile, un développement sur lequel tous les plus courts chemins MN sont transformés en segments issus de M. Tracer ce nouveau développement Π_1 pour la position spéciale indiquée pour M.

Le problème précédent est loin d'épuiser l'étude du plus court chemin entre deux points d'un cube; c'est dire combien on laisse de questions de côté quand on se borne, dans un problème d'extremum, aux parties qui sont susceptibles d'un traitement uniforme.

L'exemple du cube est cependant l'un des plus simples; il n'y en a en réalité qu'un autre qui soit plus simple, celui du tétraèdre à arêtes opposées égales. Si l'on pose un tel tétraèdre sur un plan, puis qu'on le fasse pivoter autour de diverses arêtes pour amener chaque fois une face en contact avec le plan support, la correspondance ponctuelle réalisée entre la surface du tétraèdre et le plan est univoque dans le sens plan-tétraèdre. Cela simplifie bien des questions relatives aux tétraèdres à arêtes opposées égales.

Le cas le plus simple après celui de la plus courte distance entre deux points de la surface d'un polyèdre est celui de la plus courte distance entre deux points d'une surface développable. Nous entendons par là, suivant l'habitude en géométrie différentielle, qu'il s'agit de surfaces enveloppes de plans dépendant d'un seul paramètre et données par des fonctions dont toutes les dérivées utilisées dans les calculs sont continues [1]).

Ces surfaces se partagent naturellement suivant les propriétés de leurs génératrices en cylindres, cônes et surfaces lieux des tangentes à une courbe gauche. On a admis de très bonne heure qu'elles sont applicables sur le plan comme les surfaces polyédriques dont elles sont les limites. On rencontre encore dans les géométries élémentaires un raisonnement de ce genre à l'occasion de l'étude de l'hélice. Mais si une telle preuve est notoirement insuffisante, il est facile de la transformer. Je le ferai en me bornant aux surfaces lieux des tangentes à une courbe gauche; les autres se traitent de façon analogue, mais plus simplement encore.

Repérons chaque point M d'une développable Δ par deux coordonnées curvilignes. La première l est la mesure du seg-

---

[1]) Le texte qui suit est extrait de notes préparatoires à un cours sur les applications géométriques de l'analyse, professé à la Sorbonne de 1910 à 1921.

ment mM porté sur la génératrice de Δ, m étant le point de contact de cette génératrice avec l'arête de rebroussement Γ de Δ; Γ et ses tangentes sont orientées, l a donc un signe. La seconde s est l'abscisse curviligne de m sur Γ. Alors, en réservant les notations x, y, z; $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$; r, s pour les coordonnées, les cosinus directeurs des tangentes et normales principales, le rayon de courbure de Γ en m et l'arc de cette courbe, et en désignant par de grandes lettres ce qui est relatif à M. on a trois relations du type

$$X = x + \alpha l,$$

d'où

$$dX = \alpha(ds + dl) + l\frac{\alpha'}{r}ds,$$

$$dS^2 = (ds + dl)^2 + \frac{l^2}{r^2}ds^2.$$

Si donc entre les points M et M_1 de deux développables Δ et Δ_1, on établit une correspondance ponctuelle par l'emploi des mêmes coordonnées curvilignes l et s, cette correspondance laissera invariante la longueur des courbes pourvu que les deux arêtes de rebroussement Γ et Γ_1 aient la même équation intrinsèque $r =$ fonction de s. On vérifie d'ailleurs immédiatement que la transformation conserve aussi les angles. On a donc réalisé l'application de Δ sur Δ_1.

Or, on peut prendre pour Δ_1 la développable d'arête de rebroussement Γ_1 donnée par:

$$x_1 = \int_{s_0}^{s} \cos \int_{s_1}^{s} \frac{ds}{r} ds, \qquad y_1 = \int_{s_0}^{s} \sin \int_{s_1}^{s} \frac{ds}{r} ds, \quad z_1 = 0;$$

c'est-à-dire le plan de $x_1 y_1$; nous avons donc réalisé l'application de Δ sur ce plan, ou plus exactement sur la partie Π_1 de ce plan balayée par les tangentes à la courbe convexe Γ_1.

L'applicabilité sur le plan des surfaces développables est ainsi démontrée, on sait même la réaliser et l'on voit que, dans cette application, la courbure de l'arête de rebroussement est conservée.

Quant au problème du plus court chemin entre deux points de Δ il devient, grâce à l'application, celui du plus court chemin entre deux points de Π_1, quand on n'a pas le droit de sortir de Π_1, ou d'autres problèmes analogues, comme on va le voir. Soient deux points M et $\overline{M}$ de Δ; supposons qu'ils appartiennent à la même nappe de Δ; alors tout chemin allant de M à $\overline{M}$, ou ne change pas de nappe, ou en change un nombre pair de fois. Son image joignant M_1 à $\overline{M}_1$, ou ne rencontre pas Δ_1, ou rencontre cette courbe et passe un nombre pair de fois de l'une à l'autre des deux régions Π_1 et Π'_1 du plan $x_1 y_1$ qui se recouvrent.

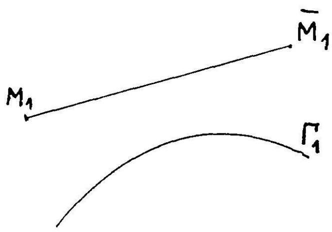

Fig. 10

Supposons que le segment $M_1\,\overline{M}_1$ ne rencontre pas Γ_1 (fig. 10); alors la courbe $M\overline{M}$ correspondante est le plus court chemin de M à $\overline{M}$; cette courbe est appelée une *géodésique*. Les droites du plan x_1, y_1 sont caractérisées par l'équation différentielle

$$\frac{\dfrac{d^2 X_1}{ds^2}}{\dfrac{dX_1}{ds}} = \frac{\dfrac{d^2 Y_1}{ds^2}}{\dfrac{dY_1}{ds}}, \qquad \text{avec } X_1 = x_1 + \alpha_1 l,$$

d'où

$$\frac{\left(\dfrac{d^2 l}{ds^2} - \dfrac{l}{r}\right)\alpha_1 + \left[\dfrac{1}{r} + \dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{l}{r}\right)\right]\alpha'_1}{\left(1 + \dfrac{dl}{ds}\right)\alpha_1 - \alpha'_1\dfrac{l}{r}} = \frac{\left(\dfrac{d^2 l}{ds^2} - \dfrac{l}{r}\right)\beta_1 + \left[\dfrac{1}{r} + \dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{l}{r}\right)\right]\beta'_1}{\left(1 + \dfrac{dl}{ds}\right)\beta_1 - \beta'_1\dfrac{l}{r}},$$

$x_1, y_1, \alpha_1, \beta_1, \alpha'_1, \beta'_1$ étant relatifs à l'arête de rebroussement plane Γ_1 de Δ_1. En tenant compte des relations $\alpha'_1 = -\beta_1$, $\beta'_1 = \alpha_1$, $\alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1$, on a l'équation différentielle des géodésiques. Au lieu de simplifier cette équation, écrivons-la sous une forme plus compliquée mais qui contiendra symétriquement les trois coordonnées; pour cela désignons par $\alpha_1'' = 0$, $\beta_1'' = 0$, $\gamma_1'' = 1$ les cosinus directeurs de la binormale de Γ_1. Ceux de Γ seront représentés par α'', β'', γ'' et le rayon de torsion par τ. Alors l'équation trouvée exprime qu'est nul le déterminant dont la première ligne est:

$$\left| \frac{d^2 X_1}{ds^2}, \quad \frac{d X_1}{ds}, \quad \alpha_1'' \right| = 0.$$

Pour Γ l'équation analogue est:

$$\left| \alpha\left(\frac{d^2 l}{ds^2} - \frac{l}{r}\right) + \alpha' \left[\frac{1}{r} + \frac{d}{ds}\left(\frac{l}{r}\right)\right] - \frac{\alpha'' l}{\tau}, \alpha\left(1 + \frac{dl}{ds}\right) + \alpha' \frac{l}{r}, \alpha'' \right| = 0,$$

En décomposant celle-ci en colonnes partielles, on aura des déterminants dont seuls seront différents de zéro ceux dont les colonnes proviendront de termes multipliés respectivement par α, α', α''; β, β', β''; γ, γ', γ''. Donc on a:

$$\left(\frac{d^2 l}{ds^2} - \frac{l}{r}\right)\frac{l}{r} - \left[\frac{1}{r} + \frac{d}{ds}\left(\frac{l}{r}\right)\right]\left(1 + \frac{dl}{ds}\right) = 0;$$

c'est l'équation déjà trouvée des géodésiques, équation indépendante de τ; les géodésiques sont donc conservées dans les applications des surfaces Δ, ce que nous savions déjà, mais nous avons de plus une définition géométrique simple des géodésiques, car notre déterminant exprime que la tangente à la géodésique, la normale principale à cette courbe, la normale à la développable sont dans un même plan. *Les géodésiques sont donc les courbes dont les plans osculateurs sont en chaque point normaux à la développable.*

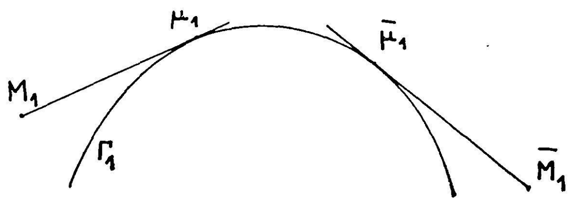

Fig. 11

Supposons maintenant que M et $\overline{M}$ étant toujours sur la même nappe de Δ, le segment $M_1\overline{M}_1$ rencontre Γ (fig. 11). Le trajet le plus court de M_1 à $\overline{M}_1$ dans Π_1 (ou Π'_1) doit envelopper le contour convexe formé par les deux tangentes $M_1\mu_1$, $\overline{M}_1\bar{\mu}_1$ menées de M_1 et $\overline{M}_1$ à Γ_1, et l'arc $\mu_1\bar{\mu}_1$ de Γ_1. C'est donc ce tracé lui-même qui constitue le plus court chemin. Aínsi le plus court chemin de M à $\overline{M}$ est constitué par les deux portions de géodésiques $M\mu$ et $\overline{M}\bar{\mu}$ et par l'arc $\mu\bar{\mu}$ de l'arête de rebroussement. Mais il y a une grande différence à faire entre les deux arcs géodésiques $M\mu$ et $\overline{M}\bar{\mu}$: la nappe de Δ contenant M et $\overline{M}$ est formée de demi-tangentes à Γ; si μM est une de ces demi-tangentes, $\bar{\mu}\overline{M}$ n'en est pas une et inversement, de sorte que le plus court chemin de M à $\overline{M}$ se compose d'un segment de génératrice, d'un arc de Γ et d'une courbe géodésique (prises dans cet ordre ou dans l'ordre inverse suivant les cas).

Dans ce qui précède, j'ai supposé que la courbe Γ ne se fermait pas; si Γ avait été une courbe fermée, le raisonnement précédent aurait donné deux chemins localement plus courts entre lesquels il eût fallu choisir.

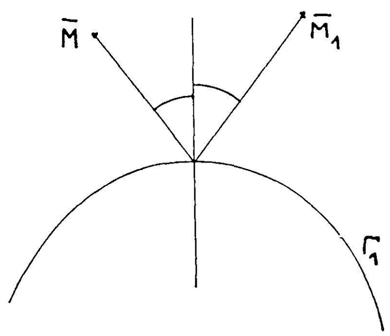

Fig. 12

Si M et $\overline{M}$ appartiennent aux deux nappes différentes de Δ, le segment $M_1\overline{M}_1$ pourra ou non rencontrer Γ_1. S'il ne rencontre pas Γ_1, le chemin le plus court de M_1 à $\overline{M}_1$ sans sortir de Π_1 (ou Π'_1) et rencontrant Γ_1 est constitué de deux segments aboutissant au même point de Γ_1 et constituant le trajet d'un rayon lumineux qui irait de M_1 à $\overline{M}_1$ en se réfléchissant sur Γ_1 (fig. 12); ceci résulte de l'emploi des dérivés, ou, ce qui est équivalent, des raisonnements sur les coniques qui nous ont servi dans la toute première question dont nous nous sommes occupés dans ce volume. A ce plus court trajet, que je suppose déterminé, correspond le plus court chemin cherché allant de M à $\overline{M}$; il est constitué par deux portions de géodésiques situées respectivement sur l'une et l'autre nappe de Δ et se réfléchissant sur Δ à la façon des rayons lumineux.

Si $M_1\overline{M}_1$ rencontre Γ_1, nous avons déjà dit quel était le plus court chemin de M_1 à $\overline{M}_1$ en restant dans Π_1 (ou Π'_1); il lui correspond, à condition de l'interpréter comme tracé sur les régions Π_1 et Π'_1 convenables, le plus court chemin de M à $\overline{M}$. Celui-ci est par suite formé de deux arcs géodésiques tracés sur deux nappes différentes de Δ et d'un arc de Γ; seulement cette fois, les deux arcs géodésiques sont, ou tous deux des segments de génératrices, ou tous deux des arcs de courbes géodésiques.

Naturellement le choix prévu précédemment pour le cas où Γ est fermée est à considérer aussi, quand M et $\overline{M}$ sont sur les deux nappes de Δ.

Nota: Je me suis borné suivant l'habitude à la considération des courbes données par des fonctions plusieurs fois dérivables, mais les résultats s'étendent à toutes les courbes tracées sur nos développables.

La longueur d'une courbe est en effet, la limite de la somme de segments $M\overline{M}$ petits; or, en posant $\delta u = \bar{u} - u$, en désignant par u_m une valeur voisine de u et $\bar{u}$, d'ailleurs variable d'une ligne à l'autre, et par ε des infiniments petits, en employant les symboles S de Lamé, (sommes relatives aux trois coordonnées), on a:

$$M\overline{M} = \sqrt{S(\varDelta X)^2} = \sqrt{S(\bar{x}+\bar{\alpha}\bar{l}-x-\alpha l)^2} = \sqrt{S(\delta x+\bar{\alpha}\delta l+l\delta\alpha)^2}$$

$$= \sqrt{\delta s^2+\delta l^2+2\delta l\, S\,\bar{\alpha}\delta x+2l\, S\,\delta x\delta\alpha+2l\delta l\, S\,\bar{\alpha}\delta\alpha+l^2\, S\,\delta\alpha^2}$$

avec

$$2\delta l\, S\,\bar{\alpha}\delta x = 2\delta l\delta s\, S\,\bar{\alpha}\alpha_m = 2\delta l\delta s+\mu\varepsilon,$$

où l'on peut prendre μ inférieur à $\delta l\delta s$;

$$2l\, S\,\delta x\delta\alpha = 2l\delta s^2\, S\,\alpha_m\frac{\alpha'_m}{r_m} = \mu\varepsilon,\ \mu \text{ étant inférieur à } l\frac{\delta s^2}{r};$$

$$2l\delta l\, S\,\bar{\alpha}\delta\alpha = 2l\delta l\delta s\, S\,\bar{\alpha}\frac{\alpha'_m}{r_m} = \mu\varepsilon,\ \mu \text{ étant inférieur à } \frac{l\delta l\delta s}{r},$$

$$l^2\, S\,\delta\alpha^2 = l^2\delta s^2\, S\left(\frac{\alpha'_m}{r_m}\right)^2 = l^2\frac{\delta s^2}{r^2}+\mu\varepsilon,\ \mu \text{ étant inférieur à } \frac{l^2\delta s^2}{r^2}.$$

Donc on a:

$$M\overline{M} = \sqrt{(\delta s + \delta l)^2 + l^2 \frac{\delta s^2}{r^2}} + \nu\varepsilon,$$

le reste $\nu\varepsilon$ étant infiniment petit relativement à la partie principale de l'expression si δs et δl sont infiniment petits; ainsi la longueur d'une courbe quelconque se présente comme la limite d'une somme d'expressions

$$\sqrt{(\delta s + \delta l)^2 + l^2 \left(\frac{\delta s}{r}\right)^2}$$

qui ne diffèrent de celles qui nous avaient servi que par le remplacement des différentielles par des différences.

Nous pouvons donc conclure, comme précédemment, que la correspondance ponctuelle établie entre deux développables Δ et Δ_1 dont les arêtes de rebroussement ont la même première équation intrinsèque, $r =$ fonction de s, conserve la longueur des courbes, de toutes les courbes. Nos résultats sur le plus court chemin entre deux points d'une développable restent valables quand on envisage toutes les courbes de cette développable.

Nous voici ainsi arrivés à ce qui est le problème primordial du calcul des variations: *trouver le plus court chemin entre deux points donnés d'une surface ou plus généralement d'une variété.*

En ce qui regarde ce problème, deux surfaces sont équivalentes quand il existe entre leurs points une correspondance conservant la longueur des courbes, c'est-à-dire quand les deux surfaces sont applicables l'une sur l'autre. Ceci établit un lien entre le problème d'extremum considéré et celui de l'applicabilité des surfaces. Je me permets de profiter de ce lien, quelque fragile qu'il soit, pour sortir des limites strictes de mon sujet et donner un autre extrait de mon cours sur les applications géométriques de l'Analyse. Celui-ci n'a pas eu l'heureuse fortune échue à l'extrait précédent et dont les parties principales ont trouvé place dans les écrits de mes élèves. Pourtant je lui attache une certaine importance que je vais d'abord expliquer. Par souci d'élégance, mais aussi parfois pour éviter de longs calculs pratiquement inexécutables, les géomètres ont pris l'habitude d'user continuellement de procédés ingénieux; l'un sert pour une équation, puis on l'abandonne et c'est un autre qui permet d'aller au-delà. Regarder certains exposés de géométrie supérieure, c'est assister au tirage d'un véritable feu d'artifice. Il devient alors bien difficile au débutant émerveillé de suivre une pensée; il lui arrive (du moins ce fut parfois mon cas) de méconnaître qu'une analyse simple et méthodique — peut-être fastidieuse et interminable — doive certainement conduire aux mêmes résultats, car la puissance de pensée des hommes ne peut aller au-delà de cette analyse simple. C'est pourquoi il m'a semblé de quelque intérêt de tirer d'une même analyse, presque enfantine, des faits qu'on n'obtient généralement pas par un procédé unique.

Soient S et s deux surfaces applicables l'une sur l'autre, c'est-à-dire telles qu'il existe entre elles une correspondance ponctuelle conservant la longueur des courbes. Nous supposons que ces surfaces sont analytiques ainsi que la correspondance qui définit l'application, ou que, tout au moins, les fonctions intervenant dans la question ont assez de dérivées continues pour que nous puissions utiliser les développements en série illimités ou limités.

Soient O et o deux points homologues de S et s; rapportons nos deux surfaces respectivement à des axes rectangulaires dont les axes OZ, oz sont les normales à S et s. Nos deux surfaces ont pour équations

$$S \qquad Z = \frac{1}{2!}(RX^2 + 2SXY + TY^2) + \ldots\ldots,$$

$$s \qquad z = \frac{1}{2!}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + \ldots\ldots,$$

et la transformation est définie par

$$X = ax + bx + \frac{1}{2!}(cx^2 + 2exy + fy^2) + \frac{1}{3!}(gx^3 + 3hx^2y + 3kxy^2 + ly^3) + \ldots..$$

$$Y = a'x + b'x + \frac{1}{2!}(c'x^2 + 2e'xy + f'y^2) + \frac{1}{3!}(g'x^3 + 3h'x^2 y + 3k'xy^2 + l'y^3) + \ldots$$

Nous avons à écrire l'identité

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

identité en dx, dy, x, y; car, grâce à nos formules, tout s'exprime à l'aide de ces quatres variables.

L'expression de $dx^2+dy^2+dz^2$ est la plus simple; c'est

$$dx^2 + dy^2 + (pdx + qdy)^2 =$$
$$dx^2 + dy^2 + [dx\,(rx + sy + \ldots) + dy(sx + ty + \ldots)]^2.$$

Mais pour $dX^2+dY^2+dZ^2$, il faut, dans l'expression analogue, remplacer dX, dY, X, Y, en fonction de dx, dy, x, y. Pour avoir des calculs simples, nous identifierons séparément les termes en dx^2, $dxdy$, dy^2, en nous bornant d'abord aux termes de degré 0 en x, y, puis à ceux de degré 1, etc...

Les expressions de p et q contiennent x et y au degré 1 au moins, donc aussi celles de P,Q; quand nous nous occupons de termes de degré 0 ou 1, il suffit de considérer dx^2+dy^2 et dX^2+dY^2 puisque dz^2 et dZ^2 donneraient des termes de degré 2. Des expressions

$$dX = dx\left[a + \frac{1}{1!}(cx + ey) + \frac{1}{2!}(gx^2 + 2hxy + ky^2) + \ldots\right]$$

$$+ dy\left[b + \frac{1}{1!}(ex + fy) + \frac{1}{2!}(hx^2 + 2kxy + ly^2) + \ldots,\right],$$

$$dY = dx\left[a' + \frac{1}{1!}(c'x + e'y) + \frac{1}{2!}(g'x^2 + 2h'xy + k'y^2) + \ldots\right]$$

$$+ dy\left[b' + \frac{1}{1!}(e'x + f'y) + \frac{1}{2!}(h'x^2 + 2k'xy + l'y^2) + \ldots\right],$$

nous devons pour le degré 0 ne conserver que les multiplicateurs constants a, b, a', b' de dx et dy; donc cela nous donne comme identification:

pour dx^2 $\quad 1 = a^2 + a'^2,$

pour $dxdy$ $\quad 0 = 2ab + 2a'b',$

pour dy^2 $\quad 1 = b^2 + b'^2.$

Cela exprime que a, a', b, b', sont les cosinus directeurs de deux directions rectangulaires; donc si l'on choisit convenablement les directions de OX, OY dans leur plan et l'orientation de l'angle XOY, nous aurons

$$a = 1, \qquad a' = 0, \qquad b = 0, \qquad b' = 1;$$

c'est ce que nous supposerons dorénavant.

La possibilité de ce choix montre que l'*application conserve les angles*; en transportant XOY sur xoy, on fait, en effet, coïncider deux angles en O et o correspondants quelconques.

Pour le degré 1 nous prendrons:

à la place de dX $\quad \left[1 + \frac{1}{1!}(cx + ey)\right]dx + \left[\frac{1}{1!}(ex + fy)\right]dy,$

à la place de dY $\quad \left[\frac{1}{1!}(c'x + e'y)\right]dx + \left[1 + \frac{1}{1!}(e'x + f'y)\right]dy;$

mais, bien entendu, dans dX^2 et dY^2 on ne tiendra compte que des termes du premier degré; donc cela nous donne comme identification:

pour dx^2 $\quad 0 = 2c \qquad 0 = 2e$

pour $dxdy$ $\quad 0 = 2e + 2c' \qquad 0 = 2f + 2e'$

pour dy^2 $\quad 0 = 2e' \qquad 0 = 2f'$

Ou encore: $\quad c = e = f = c' = e' = f' = 0;$ $\quad$ ainsi:

$$X = x + \frac{1}{3!}(gx^3 + 3hx^2y + 3kxy^2 + ly^3) + \ldots$$

$$Y = y + \frac{1}{3!}(g'x^3 + 3h'x^2y + 3k'xy^2 + l'y^3) + \ldots \qquad [1]$$

---

[1]) Ce résultat était évident, puisqu'on devait avoir $dx^2 + dy^2 \equiv dX^2 + dY^2$ aux termes du second degré près.

Si donc on considère une courbe quelconque issue de o

$$x = \alpha t + \beta t^2 + \ldots, \qquad y = \alpha' t + \beta' t^2 + \ldots,$$

il lui correspond la courbe:

$$X = \alpha t + \beta t^2 + \ldots, \qquad Y = \alpha' t + \beta' t^2 + \ldots$$

c'est-à-dire que les courbes x, y, X, Y correspondantes ont respectivement en o et O la même courbure.

Comme on appelle *courbure géodésique* en un de ses points o d'une courbe de s la courbure en o de la projection de cette courbe sur le plan tangent en o à la surface s, le résultat précédent s'exprime ainsi: *l'applicabilité conserve la courbure géodésique.*

Pour le second degré, il faut prendre

$$\begin{aligned} dX &= dx\left[1 + \frac{1}{2!}(gx^2 + 2hxy + ky^2) + \ldots\right] \\ &\quad + dy\left[\frac{1}{2!}(hx^2 + 2kxy + ly^2) + \ldots\right], \\ dY &= dx\left[\frac{1}{2!}(g'x^2 + 2h'xy + k'y^2) + \ldots\right] \\ &\quad + dy\left[1 + \frac{1}{2!}(h'x^2 + 2k'xy + l'y^2) + \ldots\right]. \end{aligned}$$

De plus il y a lieu de tenir compte de dz et dZ. On prendra:

à la place de dz, $\qquad (rx + sy)\,dx + (sx + ty)\,dy$,

à la place de dZ, $\qquad (RX + SY)\,dX + (SX + TY)\,dY$,

c'est-à-dire en réalité:

$$(Rx + Sy)\,dx + (Sx + Ty)\,dy.$$

L'identification des termes du second degré donne par conséquent:

pour dx^2 $\qquad r^2 = R^2 + g, \qquad 2rs = 2RS + 2h, \qquad s^2 = S^2 + k,$

pour $dxdy$ $\qquad 2rs = 2RS + 2h + g', \qquad 2rt + 2s^2 = 2RT + 2S^2,$

$\qquad 2st = 2ST + l + k'$

pour dy^2 $\qquad s^2 = S^2 + h', \qquad 2st = 2ST + 2k', \qquad t^2 = T^2 + l'.$

Ce tableau nous donne, quant aux formules de transformation, les conditions

$$g' = h, \qquad h' = k, \qquad k' = l,$$

conditions du troisième ordre dont nous ne nous occupons pas davantage; d'autre part il nous donne pour la première fois une condition relative à s et S. La comparaison des trois formules de la seconde diagonale du tableau fournit en effet la relation:

$$rt - s^2 = RT - S^2$$

que nous allons interpréter. Il suffit pour cela de se rappeler que les rayons de courbure principaux de s en o sont les racines de l'équation:

$$\left(r - \frac{1}{R}\right)\left(t - \frac{1}{R}\right) = s^2 \qquad {}^{1})$$

ou

$$\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R}(r+t) + rt - s^2 = 0;$$

$rt—s^2$ est donc le produit des inverses des rayons de courbure principaux en o. Ce produit a été appelé par Gauss la courbure totale de s en o; donc *l'applicabilité conserve la courbure totale* [2]).

---

1) On l'obtiendra, par exemple, par l'emploi de la méthode que j'ai dite être la plus directe et naturelle au début de cette suite de remarques et de citations sur les maxima et minima.

2) Ceci était complété par l'examen de conditions suffisantes pour que deux surfaces soient applicables; mais cela m'entraînerait ici tout à fait hors du cadre de notre étude. Au reste, dans les cours élémentaires sur les applications de l'Analyse à la Géométrie, on se contente le plus souvent d'établir les résultats partiels que je viens de donner.