Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 9 (1963)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: EN MARGE DU CALCUL DES VARIATIONS
Autor: Lebesgue, Henri
Kapitel: Chapitre premier Sur une question de minimum
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-38785

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 19.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Chapitre premier

Sur une question de minimum [1])

1. Il s'agit de cette question connue: A, B, C *étant trois points donnés*, P *un point variable du plan* ABC, *quel est le minimum de la somme* PA+PB+PC ?

Je me propose de résoudre cette question par des méthodes élémentaires, sans faire d'hypothèses sur l'existence d'une position pour laquelle le minimum est atteint, et sans recourir ni à la théorie des coniques ni à des considérations de géométrie de situation.

Dans une suite d'exercices de sa *Géométrie élémentaire* (voir en particulier ex. 363) M. Hadamard a donné une méthode conduisant au but que je me propose. Bien entendu, sa méthode n'est pas sans parenté avec celles qui suivent. Des différentes démonstrations proposées, le lecteur en déduira facilement de nouvelles.

Les premiers paragraphes contiennent des propositions accessoires qui simplifieront l'exposition, mais qu'il n'est pas nécessaire de traiter à part comme je le fais.

2. Parcourons le périmètre du triangle dans le sens ABC; nous fixons ainsi un sens de rotation qui sera dit le sens direct.

Si par A on mène une droite quelconque D et par B une droite Δ rencontrant D en un point P et telle qu'il faille faire tourner D de $\frac{2\pi}{3}$ dans le sens direct autour du point P pour l'amener sur Δ, le lieu de P quand D tourne autour de A, est la circonférence capable de $\frac{2\pi}{3}$ décrite sur AB.

---

[1]) Le texte qui suit est paru sous le titre: Sur une question de minimum, dans la *Revue de l'Enseignement des Sciences*, 12e année, janvier-février 1918, p. 1.

Si, au contraire, Δ se déduisait de D par une rotation de $\frac{2\pi}{3}$ dans le sens inverse, le lieu de P serait la circonférence capable de $-\frac{2\pi}{3}$ décrite sur AB.

Les trois circonférences capables de $+\frac{2\pi}{3}$ décrites respectivement sur AB, BC, CA se coupent en un point M, et de même les trois circonférences capables de $-\frac{2\pi}{3}$ se coupent en un point M_1. En effet, si M, par exemple, est le point commun aux deux premières, on passe de la droite MA à la droite MB par une rotation $+\frac{2\pi}{3}$; on passe de MB à MC par une rotation $+\frac{2\pi}{3}$; donc on passe de MC à MA par la rotation

$$+2\pi - \frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = +\frac{2\pi}{3}.$$

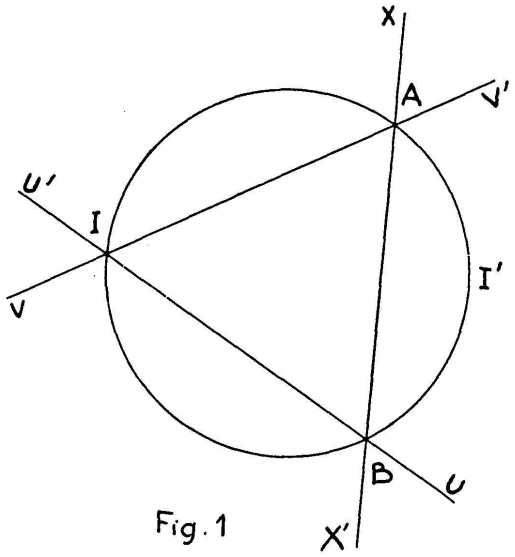

Fig. 1

Soit $AIBI'$ (fig. 1) la circonférence capable de $+\frac{2\pi}{3}$ décrite par P. Nous allons chercher dans quelles conditions le point M est intérieur au triangle ABC. Le sens de rotation direct des angles $+\frac{2\pi}{3}$ est le sens AIB. Ce sens doit être le même que le sens ABC; donc le point C est dans le demi-plan limité par AB

et qui contient I'. La droite MC forme avec MA et MB des angles égaux en valeur absolue à $\frac{\pi}{3}$ et qui sont inscrits dans notre circonférence; donc MC passe par I, milieu du grand arc AB. Les droites IA, IB et l'arc $AI'B$ divisent le demi-plan considéré en quatre régions. Si C est dans $X'BU$ ou $V'AX$, le point M, qui est sur IC, est sur l'arc AI ou BI, donc est extérieur à ABC.

Si C est dans $UBI'AV'$, M est sur $AI'B$ et entre C et le point de rencontre avec AB; donc il est intérieur à ABC.

Si C est dans le segment $AI'B$, M est encore sur $AI'B$, mais pas entre C et le point de rencontre avec AB; donc il est encore extérieur à ABC.

Or, quand C est dans $V'AX$, l'angle A surpasse $\frac{2\pi}{3}$; quand C est dans $X'BU$, l'angle B surpasse $\frac{2\pi}{3}$; quand C est dans le segment $AI'B$, l'angle C surpasse $\frac{2\pi}{3}$; quand C est dans $V'AI'BU$, tous les angles du triangle sont inférieurs à $\frac{2\pi}{3}$.

Donc M est intérieur au triangle ABC si tous ses angles sont inférieurs à $\frac{2\pi}{3}$.

Supposons maintenant que la circonférence $AIBI'$ soit capable de $-\frac{2\pi}{3}$ et cherchons dans quelles conditions M_1 est sur l'arc $AI'B$ que nous appellerons Γ. Cette fois, C est dans le demi-plan limité par AB et qui contient I.

M_1 étant sur CI, il faut que C soit dans AIB ou $U'IV$. Dans le premier cas, les deux angles A et B sont tous deux plus petits que $\frac{\pi}{3}$; dans le second, ils sont tous deux plus grands; pour toutes les autres positions de C, l'un de ces angles est plus grand que $\frac{\pi}{3}$ et l'autre plus petit.

Si Θ est un triangle d'angles α, β, γ, on démontrera de même que les trois circonférences capables de $+(\pi-\alpha)$, $+(\pi-\beta)$,

$+(\pi-\gamma)$, ou de $-(\pi-\alpha)$, $-(\pi-\beta)$, $-(\pi-\gamma)$, décrites sur AB, BC, CA concourent en un point M ou M_1. Dans les considérations précédentes, le triangle équilatéral ABI sera remplacé par un triangle semblable à Θ pour lequel:

$$\widehat{ABI} = \beta,\ \widehat{BIA} = \gamma,\ \widehat{IAB} = \alpha$$

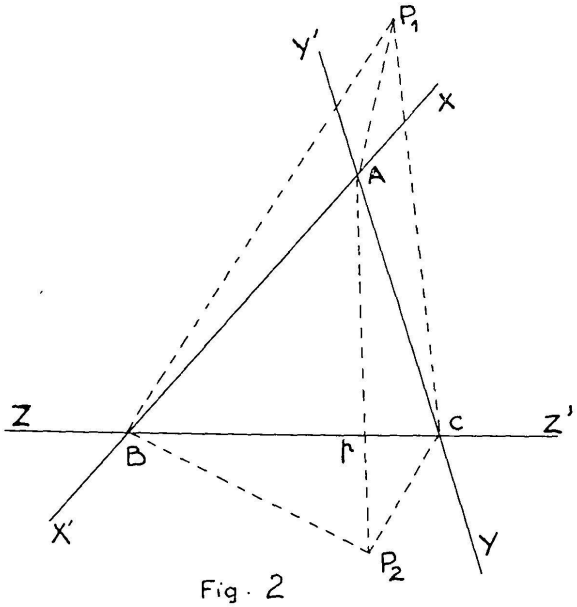

Fig. 2

Donc, M sera intérieur à ABC si l'on a

$$A < \pi-\alpha,\ B < \pi-\beta,\ C < \pi-\gamma$$

M_1 sera sur l'arc Γ si l'on a

soit $\quad A < \alpha$ *et* $B < \beta$

soit $\quad A > \alpha$ *et* $B > \beta$

3. Pour la recherche du minimum de $PA+PB+PC$, on peut se borner aux points P intérieurs à ABC ou situés sur le contour de ABC. Je les appellerai: les points de ABC.

En effet, soit un point P qui ne soit pas point de ABC. Nous allons lui faire correspondre un point de ABC donnant une somme plus petite que $PA+PB+PC$.

Si P est en P_1 dans XAY' (fig. 2), on a

$$P_1B + P_1C > AB+AC,$$

donc

$$P_1A + P_1B + P_1C > AA + AB + AC,$$

et l'on peut faire correspondre A à P_1.

Si P est en P_2 dans $X'BCY$, on peut lui faire correspondre p, point de rencontre de AP_2 et de BC, car

$$P_2B + P_2C > pB + pC,$$

donc

$$P_2A + P_2B + P_2C > pA + pB + pC.$$

Tous les cas sont ainsi examinés.

La même conclusion subsiste et le raisonnement convient aussi pour le cas de la somme $aPA + bPB + cPC$, a, b, c étant trois constantes positives données. Pour la somme $aPA + bPB - cPC$, il suffirait de s'occuper des points de la région $Y'ABZ$; démontrons seulement qu'on peut se limiter au demi-plan Π limité par AB et ne contenant pas C. Soient en effet P_1 et P_2 deux points symétriques par rapport à AB, P_1 étant dans Π; il est évident que l'on a

$$\begin{aligned} aP_1A + bP_1B - cP_1C &= aP_2A + bP_2B - cP_1C \\ &< aP_2A + bP_2B - cP_2C \end{aligned}$$

I

4. Soit $\hat{A} \leq \hat{B} \leq \hat{C}$ (fig. 3).

Faisons tourner ABC de $+\frac{\pi}{3}$ autour de C; il vient en $A'B'C$. Un point P, intérieur à ABC, vient en P'. Le triangle PCP', isocèle car $PC = PC'$, et dont l'angle C vaut $+\frac{\pi}{3}$, est équilatéral. Donc

$$PA + PB + PC = AP + PP' + P'B'$$

Un mobile, se déplaçant sur $APP'B'$ de A vers B', tourne autour de C d'abord de l'angle ACP qui est dans le sens direct,

puis de $+\frac{\pi}{3}$, puis de $P'CB' = PCB$ de sens direct; donc il tourne au total de $ACB + \frac{\pi}{3}$.

Si donc l'angle $\widehat{C}$ du triangle surpasse $\frac{2\pi}{3}$, la ligne $APP'B'$ est enveloppante pour la ligne ACB' dont l'angle $\widehat{ACB'}$ est plus grand que π. Le minimum est alors obtenu quand P est en C. Ce minimum est la somme des deux plus petits côtés du triangle, car AB opposé au plus grand angle C est le plus grand côté de ce triangle.

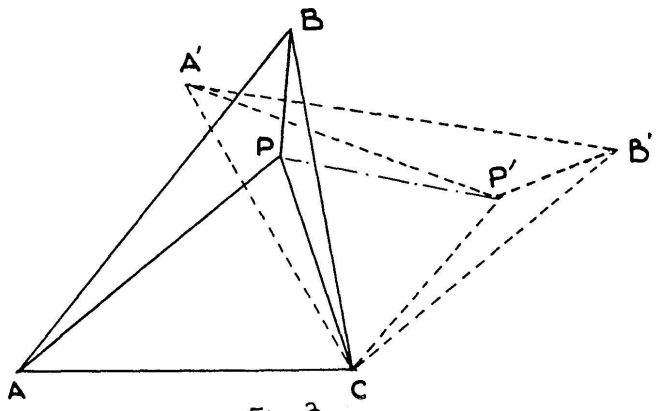

Fig 3

Si $\widehat{C}$, et par suite aussi $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$, est inférieur ou égal à $\frac{2\pi}{3}$, il existe un point M de ABC tel que les droites MA; MB, MC fassent entre elles des angles de $+\frac{2\pi}{3}$. Si P vient en M, on a

$$\widehat{APC} = \frac{2\pi}{3} \qquad \widehat{CPP'} = \frac{\pi}{3}$$

$$\widehat{CP'B'} = \widehat{CPB} = \frac{2\pi}{3} \qquad \widehat{PP'C} = \frac{\pi}{3};$$

donc A, P, P', B sont en ligne droite: la position M de P donne le minimum et il est évident que c'est la seule position le donnant.

Ce minimum est égal à

$$AB' = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2AC.BC \cos\left(C + \frac{\pi}{3}\right)}.$$

Le fait que $\hat{C}$ est le plus grand des angles nous a été commode pour la distinction des deux cas, mais il n'intervient pas dans la seconde partie du raisonnement; dans l'expression ci-dessus du minimum, on peut donc effectuer une permutation circulaire sur les côtés et les angles du triangle.

5. M. Montel m'a fait remarquer que la démonstration s'applique à la somme

$$aPA + bPB + cPC.$$

Ecartons le cas banal où l'un des a, b, c, serait nul, et supposons d'abord qu'il existe un triangle Θ dont les côté ont pour longueurs a, b, c. Soient α, β, γ les angles de ce triangle.

Supposons que l'on ait

$$A+\alpha \leqq B+\beta \leqq C+\gamma$$

et faisons tourner ABC de l'angle γ autour de C; puis effectuons l'homothétie de centre C et de rapport $\frac{b}{a}$ qui donne le triangle $A'B'C$; P, intérieur à ABC, vient en P'. On a

$$P'B' = PB \times \frac{b}{a} \qquad P'C = PC \times \frac{b}{a}.$$

Le triangle PCP', dont l'angle $\widehat{PCP'}$ est égal à γ, est donc semblable à Θ et

$$PP' = PC \times \frac{c}{a}$$

Donc on a

$$AP + PP' + P'B' = \frac{aPA + bPB + cPC}{a}$$

La démonstration se poursuit comme précédemment. Le minimum est donné par C si $C+\gamma \geqslant \pi$. Le minimum est donné par le point M commun aux trois circonférences capables de $+(\pi-\alpha)$, $+(\pi-\beta)$, $+(\pi-\gamma)$ décrites respectivement sur BC, CA, AB, si

$$A+\alpha < \pi, \quad B+\beta < \pi, \quad C+\gamma < \pi.$$

Supposons ensuite qu'il n'existe pas de triangle Θ. Soit, par exemple, $c > a+b$. On peut trouver c_1 vérifiant $c_1 > a$, $c_1 > b$, $c_1 < a+b$ et tel que le triangle de côtés a, b, c_1 ait un angle γ_1 opposé à c_1 assez grand pour que $C+\gamma_1$ surpasse π. Alors on a, quel que soit P différent de C,

$$aPA + bPB + c_1PC > aCA + bCB,$$

donc, *a fortiori*, puisque c_1 est plus petit que c,

$$aPA + bPB + cPC > aCA + bCB$$

et le minimum est donné par la position C de P.

II

6. Soient A_1, B_1, C_1 des points pris sur MA, MB, MC entre M et A, B, C et P un point différent de M. On a

$$PA \leqq PA_1 + AA_1, \quad PB \leqq PB_1 + BB_1, \quad PC \leqq PC_1 + CC_1,$$

les trois signes $=$ ne convenant pas à la fois. En ajoutant, on a

$$PA + PB + PC < PA_1 + PB_1 + PC_1 + (AA_1 + BB_1 + CC_1).$$

Si donc on a

$$PA_1 + PB_1 + PC_1 \leqq MA_1 + MB_1 + MC_1$$

en ajoutant $AA_1 + BB_1 + CC_1$ aux deux membres, on en tire:

$$PA + PB + PC < MA + MB + MC.$$

Donc, si M donne le minimum pour $PA+PB+PC$, il donne aussi le minimum pour $PA_1+PB_1+PC_1$. Et puisque, quels que soient $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$, sur les demi-droites MA, MB, MC, une homothétie de centre M permet de remplacer $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$, par A_1, B_1, C_1 entre M et A, M et B, M et C, le point M donne aussi le minimum pour la somme $P\mathscr{A}+P\mathscr{B}+P\mathscr{C}$.

La recherche d'une position donnant le minimum est donc la recherche d'une certaine configuration de trois demi-droites

MA, MB, MC, mais ne dépend pas de la position des points A, B, C.

Cette remarque, qui fait pressentir le rôle du point M du § 2, permet d'arriver tout de suite au résultat si l'on admet l'existence d'une position P donnant le minimum. Pour rester tout à fait dans le domaine élémentaire, notons la conclusion sous la forme suivante.

Si l'on a

$$PA + PB + PC > MA + MB + MC,$$

on peut remplacer dans cette inégalité les points A, B, C par d'autres situés sur MA, MB, MC entre M et A, M et B, M et C, ou par des points situés sur PA, PB, PC, au-delà de A, B, C. En d'autres termes, on peut allonger les longueurs du membre le plus grand ou diminuer celles du plus petit.

7. Supposons que ABC soit un triangle équilatéral; M est le point de rencontre de ses hauteurs. Soit P un point différent de M. Je dis que l'on a

$$PA + PB + PC > MA + MB + MC.$$

En effet, soient P_1, P_2 les deux points déduits de P par des rotations de $\pm \frac{2\pi}{3}$ autour de M. M est le point de rencontre des médianes du triangle PP_1P_2; donc la somme géométrique de AP, AP_1, AP_2 est d'après une proposition connue égale à $3\ AM$. Cette somme géométrique a une longueur inférieure à $AP + AP_1 + AP_2$; donc on a

$$PA + PB + PC = \frac{AP + AP_1 + AP_2}{3} + \frac{BP + BP_1 + BP_2}{3}$$
$$+ \frac{CP + CP_1 + CP_2}{3} > AM + BM + CM$$

Ainsi le point M donne bien le minimum pour le cas du triangle équilatéral.

Supposons que ABC n'ait aucun angle supérieur à $\frac{2\pi}{3}$.

D'après le § 2, il existe un point M tel que les trois demi-droites MA, MB, MC fassent entre elles des angles égaux à $\frac{2\pi}{3}$ [1]).

Sur ces trois demi-droites, prenons, au-delà de A, B, C trois points $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$, à la même distance de M. M donne le minimum pour le triangle $\mathscr{A}\mathscr{B}\mathscr{C}$, donc aussi pour ABC.

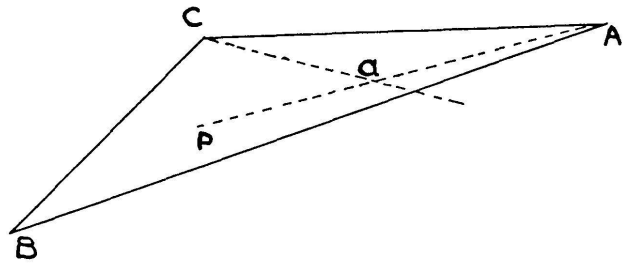

Fig 4

Supposons que ABC ait un angle supérieur à $\frac{2\pi}{3}$, soit l'angle C. Je dis que C donne le minimum, donc, que, quel que soit le point P, on n'a pas

$$PA + PB + PC < CA + CB.$$

L'un des deux angles $\widehat{BCP}$ ou $\widehat{PCA}$ est inférieur à $\frac{2\pi}{3}$, soit $\widehat{BCP}$ (fig. 4). Traçons la droite Ca faisant $+\frac{2\pi}{3}$ avec CB; elle coupe PA en a. Si l'inégalité précédente était vraie, on pourrait y remplacer A par a. Or cela est impossible, puisque C donne le minimum pour le triangle aBC.

III

8. Les raisonnements du § 6 s'appliquent tout de suite au cas de la somme $aPA + bPB + cPC$; mais il n'en est pas de même du raisonnement du début du § 7 .On peut, dans le cas général, raisonner comme il suit.

---

1) Si $C = \frac{2\pi}{3}$, M est en C; la demi-droite MC est alors définie par la condition de faire l'angle $+\frac{2\pi}{3}$ avec MB.

Plaçons-nous dans le cas où il existe un triangle Θ et où $A+\alpha$, $B+\beta$, $C+\gamma$ sont inférieurs à π. Il existe alors, dans ABC, un point M d'où l'on voit BC, CA, AB sous des angles $\pi-\alpha$, $\pi-\beta$, $\pi-\gamma$ (§ 2). Je dis que ce point donne le minimum. Soit P un point différent de M. L'hypothèse

$$aPA+bPB+cPC \leqq aMA+bMB+cMC$$

va nous conduire à une contradiction.

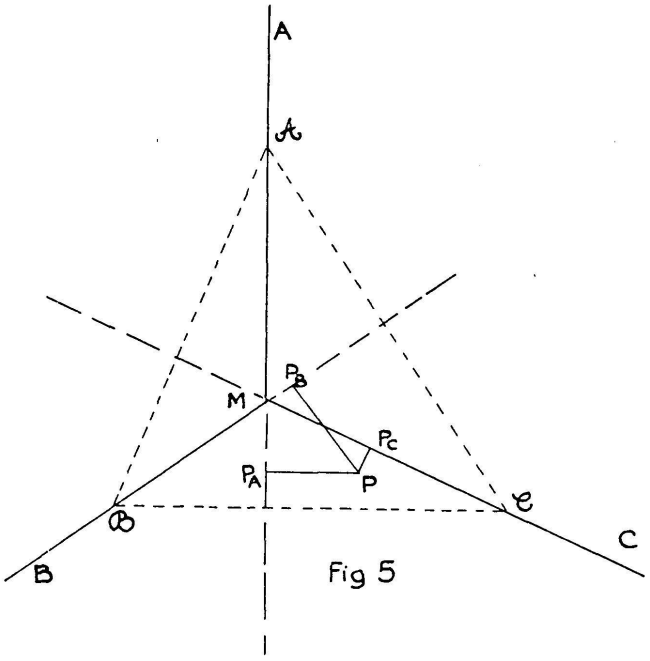

Fig 5

Soient (fig. 5) P_A, P_B, P_C les projections de P sur AM, BM, CM et convenons de compter positivement AP_A, BP_B, CP_C respectivement dans les sens AM, BM, CM. On a

$$AP \geqq AP_A;$$

inégalité dans laquelle le premier membre est positif et le second de signe quelconque, ou

$$AM-AP \leqq AM-AP_A = P_AM.$$

Les trois inégalités analogues ne peuvent se réduire simultanément à des égalités. En les ajoutant, on a

$$0 \leqq a(AM-AP)+b(BM-BP)+c(CM-CP)$$

$$< aP_AM+bP_BM+cP_CM.$$

Or, soit θ un triangle $\mathscr{ABC}$ ayant pour hauteurs les droites MA MB, MC. θ est évidemment semblable à Θ; donc ses côtés sont proportionnels à a, b, c. En représentant par M_a, M_b, M_c, P_a, P_b, P_c les distances de M et P aux côtés de ce triangle, distances comptées dans des sens tels qu'elles soient positives pour des points intérieurs à θ, on a, comme l'on sait

$$aM_a + bM_b + cM_c = aP_a + bP_b + cP_c,$$

ou encore

$$a(P_a - M_a) + b(P_b - M_b) + c(P_c - M_c) = 0$$

Or, au signe près peut-être, car la position de θ n'a pas été précisée, le premier membre est égal à $aP_AM + bP_BM + cP_CM$, d'où la contradiction annoncée.

Le premier cas étant ainsi traité, pour achever l'examen des trois cas possibles, on imitera la fin du § 7, puis celle du § 5.

IV

9. Je vais examiner rapidement le cas de la somme $aPA + bPB - cPC$, en supposant toutefois $c < a + b$, sans quoi le minimum serait $-\infty$ comme on le voit en prenant P de plus en plus loin.

Soit P un point du demi-plan Π limité par AB et ne contenant pas C (§ 3). Soit Q la position du point K donnant le minimum de $aKA + bKB + cKC$. On a

$$aPA + bPB > aQA + bQB + cQP,$$

d'où

$$\begin{aligned} aQA + bQB - cQC &< aPA + bPB - c(QP + QC) \\ &< aPA + bPB - cPC. \end{aligned}$$

Or, Q est en A si $A \geqslant \pi - \alpha$, ou si $a \geqslant b + c$, en B si $B \geqslant \pi - \beta$, ou si $b \geqslant a + c$, en C si $C \geqslant \pi - \gamma$, et si aucune de ces conditions n'est réalisée, il se trouve sur l'arc Γ de la circonférence capable de $-(\pi - \gamma)$ décrite sur AB qui se trouve dans Π.

Donc, la question est résolue pour $a \geqslant b+c$, ou $b \geqslant a+c$, et, dans le cas où il existe un triangle θ, il suffit de s'occuper des points P du demi-plan Π qui sont compris entre AB et Γ.

Soient P un de ces points, Q le point de rencontre de CP prolongé et de Γ. Q donne le minimum de la somme $aKA+bKB+cKQ$, puisque l'angle AQB est égal à $\pi-\alpha$. Donc

$$aQA+bQB < aPA+bPB+cPQ,$$

$$\begin{aligned} aQA+bQB-cQC &< aPA+bPB-c(QC-PQ) \\ &< aPA+bPB-cPC. \end{aligned}$$

Donc il suffit de s'occuper du cas où P serait en A, en B ou sur Γ.

10. Supposons $A = \alpha$, $B = \beta$, $C = \gamma$ et P sur Γ qui est maintenant un arc de la circonférence circonscrite à ABC. Le théorème de Ptolémée donne:

$$PC \,.\, AB = PA \,.\, BC + PB \,.\, AC,$$

ou puisque AB, BC, CA sont proportionnels à a, b, c,

$$cPC = aPA+bPB.$$

Le minimum est donc 0; il est atteint pour tous les points de Γ.

11. La conclusion énoncée à la fin du § 6 s'applique sans changement à la somme $aPA+bPB-cPC$ pour ce qui est de la substitution d'autres points aux points A et B; mais, pour ce qui est de C, la conclusion est naturellement inverse: on peut remplacer C par un point situé sur MC au-delà de C ou par un point situé sur PC entre P et C.

Ceci étant, soit $A > \alpha$, $B > \beta$. Alors C est dans $U'IV$ (fig. 1). Il existe sur $AI'B$ un point M_1 intersection de Γ et de CI. C'est ce point M_1 qui donne le minimum, car M_1 donne le minimum quand on remplace C par I.

Soient maintenant C intérieur à la circonférence (Γ) qui porte l'arc Γ (donc $C > \gamma$) et P un point de Γ (fig. 6). Si P ne fournissait pas une somme $aPA+bPB-cPC$ supérieure à celles que donneraient les points A ou B, il en serait de même si l'on rem-

plaçait C par le point d'intersection $\mathscr{C}$ de PC et de (Γ). Or, soit Q un point de Γ; on a

$$cQI = aQA + bQB$$

et

$$aQA + bQB - cQ\mathscr{C} = c(QI - Q\mathscr{C})$$

Sur QI portons $QJ = Q\mathscr{C}$. L'angle $\mathscr{C}JI$ étant constant, le lieu de J est une circonférence (λ) passant par $\mathscr{C}$ et I, et comme J est en I quand Q est situé en Q_1, sur la perpendiculaire au milieu de $\mathscr{C}I$ et du même côté que A et B par rapport à $\mathscr{C}I$, Q_1I est la tangente à (λ); (λ) a donc pour centre le milieu Q_2 de celui des arcs $\mathscr{C}I$ qui ne contient pas A et B.

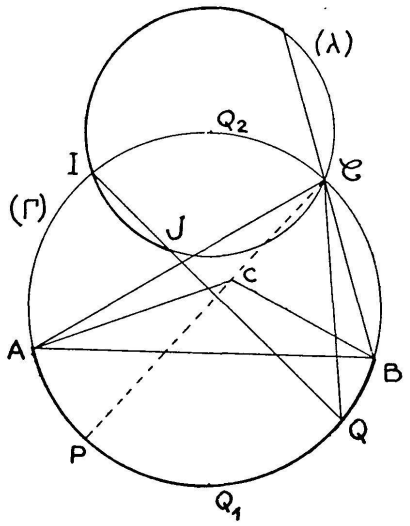

Fig. 6

Il résulte de là que, quand Q parcourt Γ, l'arc de (λ) parcouru par J ne contient pas le point diamétralement opposé à I, puisque Q ne prend pas la position Q_2; le minimum de la différence positive ou négative

$$JI = QI - Q\mathscr{C}$$

donc de $aQA + bQB - cQ\mathscr{C}$, est par suite obtenu pour l'une des deux positions extrêmes A ou B du point Q.

Donc, pour $C \geqslant \gamma$, le minimum est donné par l'un des sommets A ou B.

Maintenant, si A donne le minimum pour une position de C, il donne *a fortiori* le minimum si l'on éloigne C de A sur la droite AC; donc tous les cas sont traités.

Le seul cas où le minimum n'est donné ni par A, ni par B est celui où l'on a

$$A > \alpha, \; B > \beta$$

et alors le minimum est donné par le point M_1.

12. Reste le cas où $c > a+b$; il faut alors chercher le maximum de $aPA+bPB—cPC$. On sait, d'après ce qui précède, que pour $c > a+b$ on a, quel que soit P,

$$aPA+bPB < aCA+bCB+cCP,$$

ou

$$aPA+bPB-cPC < aCA+bCB,$$

et C donne le maximum cherché.

Par des changements de signes, on déduit de ce qui précède l'étude du maximum ou du minimum de toute somme de la forme

$$\pm aPA \pm bPB \pm cPC$$ [1] [2].

Au commencement de l'article qu'on vient de lire, il est fait allusion à la solution suivante du problème proposé:

Soit M la position du point P donnant le minimum; si nous faisons varier le point P sur l'ellipse de foyers A et B passant par M, $PA+PB$ est constant; le point M est donc le point de cette ellipse le plus rapproché de C; il en résulte que CM est une normale à l'ellipse, sans quoi la tangente à l'ellipse n'étant pas perpendiculaire à CM, le point P décrivant l'ellipse franchirait à son passage en M la circonférence de centre C et de rayon CM, de sorte qu'il existerait des positions de P voisines de M

[1]) Les méthodes I et III réussissent aussi pour cette somme. Pour la première, je n'ai pu éviter d'assez grandes complications, mais pour la deuxième, le raisonnement s'applique presque sans changement. La seule difficulté, s'il s'agit de $aPA+bPB—cPC$, est l'utilisation de l'inégalité $c\,(CM — CP) \leqq bMP_c$ à ajouter à des inégalités de sens contraires. Mais, en profitant de la possibilité d'éloigner M sur MC, on peut rendre cette inégalité aussi voisine qu'on veut d'une égalité.

[2]) Fin de l'article reproduit.

pour lesquelles $PA+PB+PC$ serait inférieur à $MA+MB+MC$; de plus, l'ellipse doit être entièrement extérieure au cercle dont nous venons de parler et ne pas contenir ce cercle à son intérieur; donc la demi-droite MC doit être le prolongement de la demi-droite bissectrice intérieure des demi-droites MA, MB; comme la même conclusion s'applique quand on permute A, B, C, il en résulte que les trois demi-droites MA, MB, MC doivent faire entre elles des angles de 120°. Toutefois, ce raisonnement suppose que les directions des trois demi-droites soient bien déterminées, donc que M ne coïncide avec aucun des points A, B, C. Lorsque l'un des angles du triangle est supérieur ou égal à 120°, il n'existe pas de point M pour lequel MA, MB, MC sont à 120°. Le minimum est donc atteint pour un sommet et, évidemment, pour le sommet du plus grand angle. Lorsque chacun des angles est inférieur à 120°, il existe au contraire un tel point M; on vérifie facilement que la somme $MA+MB+MC$ est inférieure à la somme de deux quelconques des côtés du triangle et on en conclut que c'est ce point M qui donne le minimum.

Pourquoi remplacer cette démonstration si simple par d'autres analogues à celles qu'on a lues? C'est que, pour conclure comme nous l'avons fait, il faut admettre qu'il existe une position M de P donnant le minimum de $PA+PB+PC$. On peut être tenté de considérer que cela va de soi. Pourtant il est clair qu'il n'y a pas de position de P donnant le maximum de $PA+PB+PC$, de sorte qu'en réalité, s'il nous paraît certain qu'un minimum est atteint, c'est parce que nous n'imaginons pas qu'il pourrait en être autrement et ce défaut d'imagination n'a certainement aucune valeur logique.

Considérons le problème suivant: soient deux points A et B et une droite AT ne passant pas par B, et demandons-nous quel est le plus court de tous les arcs de courbe d'extrémités A et B et ayant AT pour tangente en A. On peut tracer de tels arcs différant extrêmement peu du segment AB. Comme tout arc joignant A et B a une longueur au moins égale à AB, c'est la distance AB qui fournit ce que l'on peut appeler le minimum de la longueur des arcs considérés. (Ce mot minimum sera d'ailleurs remplacé par un autre d'ici peu.) Mais il est clair qu'aucun de ces arcs n'a la longueur AB. Voici donc un minimum qui n'est

pas atteint. Ainsi, il apparaît comme essentiel de prouver l'existence de l'extremum que l'on cherche.

Les façons de faire dans lesquelles on néglige de prouver cette existence ont été critiquées sous une forme très imagée par M. O. Perron. Cherchons avec lui le plus grand des nombres entiers. Ce ne peut être 2 car le carré de 2 est plus grand que 2; ni 3, car le carré de 3 est plus grand que 3; etc... Donc le plus grand des nombres entiers est 1.

La première fois où la nécessité de démontrer l'existence de l'extremum ait été signalée semble être la suivante. Argand, né à Genève, teneur de livres à Paris, avait publié en 1806 un *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*. C'est là qu'il donne la représentation d'un nombre complexe par son affixe. A la vérité, Argand avait été précédé par le Danois Caspar Wessel qui avait présenté en 1797, à l'Académie Royale de Copenhague, un travail sur le même sujet, travail bien supérieur à celui d'Argand, mais qui ne fut pas remarqué et n'eut aucune influence, bien qu'il ait été publié en 1799 dans les Mémoires de l'Académie. Il s'en fallut de peu que le travail d'Argand fût aussi peu remarqué que celui de Wessel. Mais Jacques Français, à la mort de son frère aîné, trouva dans les papiers de celui-ci une lettre de Legendre mentionnant sans en nommer l'auteur la représentation qu'avait donnée Argand. Français pria cet auteur inconnu de se faire connaître et c'est ainsi qu'Argand reprit en quelque sorte son essai dans les *Annales de Mathématiques pures et appliquées*, tome VI, pages 61 à 71. En particulier, il donne là une démonstration du théorème de d'Alembert se réduisant à cette constatation: si une valeur z_0 de la variable complexe z fournit pour le module d'un polynome $f(z)$ une valeur positive, il y a au voisinage de z_0 des valeurs de z donnant au module une valeur plus petite. Il en résulte que, seuls, les zéros du polynome $f(z)$ peuvent donner le minimum du module de $f(z)$, et comme Argand admet que ce minimum est atteint, il en conclut que toute équation $f(z) = 0$ admet des racines. Servois critique le mémoire d'Argand dans le même tome des *Annales*, pages 228 à 235. Il écrit notamment: « Ce n'est point assez, ce me semble, de trouver des valeurs de x qui donnent au polynome des valeurs sans cesse décroissantes;

il faut de plus que la loi des décroissements amène nécessairement le polynome à zéro, ou qu'elle soit telle que zéro ne soit pas, si l'on peut s'exprimer ainsi, l'asymptote du polynome. »

Cette fine critique de Servois fut faite à nouveau en termes plus précis par Weierstrass à l'occasion des recherches de Riemann sur les fonctions algébriques, recherches fondées sur le problème de minimum connu sous le nom de problème de Dirichlet. A cette occasion, Weierstrass montra que les fonctions continues d'une ou de plusieurs variables atteignent leurs extrema lorsqu'on ne considère ces fonctions que dans des domaines bornés. D'autre part, il introduisit ce que l'on a appelé les conditions suffisantes dans le Calcul des variations. Pour le moment, rappelons seulement les dénominations précises qu'il a introduites. Une famille de nombres étant donnée, on appelle *borne inférieure* de ces nombres le plus grand des nombres tels qu'aucun nombre de la famille ne lui soit inférieur. La *borne supérieure* se définit d'une manière analogue. Toute famille de nombres admet nécessairement une borne inférieure et une borne supérieure, seulement la borne inférieure peut être $-\infty$ et la borne supérieure $+\infty$. Supposons que la famille de nombres considérée soit la famille des valeurs prises par une fonction $f(X)$. D'après la définition même de la borne inférieure, cette borne sera, ou le plus petit des nombres $f(X)$, ou le plus grand des nombres inférieurs à $f(X)$. Dans le premier cas seulement, on dira que la fonction a un *minimum*; c'est le cas où nous disions précédemment que le minimum est atteint. Dans le second cas, il vaut mieux remplacer le mot de minimum par l'expression borne inférieure.

Il ne faut pas trop s'étonner que la distinction entre minimum et borne inférieure, ou maximum et borne supérieure ait été faite si tardivement. C'est qu'elle n'a aucune signification concrète. Qui oserait décider s'il existe une charge maxima que peut supporter un pont, plutôt qu'une charge minima qui le fasse écrouler ? Aussi s'explique-t-on que les physiciens, dont les recherches ont posé certains problèmes de minimum comme celui de Dirichlet, aient été longs à admettre que les recherches des mathématiciens relatives à ces problèmes ne soient pas de simples jeux, mais des travaux nécessaires.