

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 9 (1963)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: EN MARGE DU CALCUL DES VARIATIONS
Autor: Lebesgue, Henri
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-38785>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 27.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Vide-leer-empty

Vide-leer-empty

EN MARGE DU CALCUL DES VARIATIONS

par HENRI LEBESGUE

TABLE DES MATIÈRES

Préface par L.-C. Young	209
Introduction	212
CHAPITRE PREMIER: Sur une question de minimum	215
CHAPITRE 2: Sur le problème des isopérimètres.	233
CHAPITRE 3: Sur quelques questions de minimum relatives aux courbes orbiformes et sur leurs rapports avec le calcul des variations	246
CHAPITRE 4: Sur la plus courte distance entre deux points d'une surface développable.	277
CHAPITRE 5: La méthode classique du calcul des variations	291
CHAPITRE 6: La méthode directe du calcul des variations	304

PRÉFACE

Ce petit livre provient d'un manuscrit trouvé récemment dans un tiroir du bureau de Lebesgue. Il me semble destiné aux étudiants de tous les âges, aux plus jeunes, surtout (car Lebesgue avait toujours pour eux un intérêt particulier), mais sans exclure, cependant, ceux d'entre nous qui sommes étudiants depuis une quarantaine d'années et même davantage, et dont Lebesgue avait coutume de dire: « Nous sommes tous jeunes, surtout ceux d'entre nous qui le sommes depuis longtemps. »

Pour être étudiant, ou tout au moins bon étudiant, il n'est pas indispensable de suivre le cours d'un professeur; et si on le suit, il faut le compléter par des lectures et des réflexions propres. Il faut avant tout chercher à bien lire et à bien penser; c'est ce que Lebesgue nous enseigne ici.

Ce qui est important dans un livre, ce n'est pas son texte même, ce sont plutôt les réflexions « en marge » qu'il nous suggère, ou qu'il devrait nous suggérer.

Le Calcul des variations, tel que l'avait compris Lebesgue, constitue un champ idéal pour en tirer des réflexions « en marge ». En suivant sa pensée, le lecteur apprendra bien plus qu'en suivant seulement un exposé formel, même très moderne. D'ailleurs, après avoir lu Lebesgue, il n'en sera que plus avide de compléter ses connaissances, en étudiant d'une façon d'autant plus approfondie les livres classiques d'Hadamard, de Tonelli, et de Carathéodory, par exemple, ainsi que le chapitre sur le Calcul des variations dans le beau traité de Hardy, Littlewood et Polya intitulé: *Inégalités*. Que la plupart de ces livres soient en langues étrangères, ce ne sera pas pour arrêter un étudiant sérieux, dont la curiosité a été éveillée: on ne s'effraye pas pour si peu quand on entre dans tout un monde nouveau de la pensée mathématique.

Une remarque de Lebesgue qui m'a particulièrement frappé, c'est que ses travaux se rattachent en somme à une blague de collégien, d'après laquelle, dans un triangle ABC , un côté BC serait égal à la somme $BA + AC$ des deux autres: on exprime pour cela BC comme limite géométrique d'une certaine ligne brisée, dont les côtés sont alternativement parallèles à BA et à AC , et dont on voit que sa longueur est égale à $BA + AC$.

L'étude des limites de telles lignes brisées conduit au cœur des recherches modernes sur le Calcul des variations.

En effet, elles conduisent d'une part, comme le remarque Lebesgue, à l'utilisation en Calcul des variations de la notion de semi-continuité inférieure qui a joué un rôle fondamental dans les travaux de Lebesgue, de Tonelli, de Mc Shane, ainsi que ceux de Rado et de Cesari sur l'aire des surfaces. D'autre part elles conduisent aussi à la notion de solution faible, exploitée de diverses façons par toute une série de mathématiciens contem-

porains, et en particulier, dans le Calcul des variations, par Mc Shane, par Fleming et par moi-même, sous la forme de courbe, ou de variété, généralisée.

Mon attention a été attirée sur les lignes brisées un peu autrement que celle de Lebesgue.

La première fois, c'est en essayant de prendre un raccourci à la montagne, où les sentiers montent en zig-zag: pour éviter de glisser en suivant le raccourci, il fallait encore diriger les pieds en zig-zag, donc je suivais en réalité toujours un chemin de même longueur que le sentier. Ce phénomène connu de tous ceux qui font du ski — car ils montent bien en zig-zag avec les skis — est typique d'un problème irrégulier du Calcul des variations, qu'on connaît sous le nom de problème de Maxwell, un phénomène tout semblable a lieu dans le problème de navigation à voile (problème de Zermelo).

La seconde fois, c'est à propos d'une bicyclette, achetée pendant mes premières années d'étudiant: les kilomètres se lisaient sur un petit appareil enregistreur, et je voulais absolument dépasser le nombre indiqué sur le vélo qu'un de mes amis avait acheté en même temps que moi. Puisque nous roulions toujours ensemble, l'idée me vint de suivre sur la route un chemin en zig-zag. Ce que je n'ai jamais pu comprendre, c'est que malgré ce chemin en zig-zag, mon vélo indiquait toujours le même nombre de kilomètres que celui de mon compagnon, qui roulait tout droit.

Sans doute le lecteur trouvera, lui aussi, parmi ses propres expériences, des événements qui ne s'accordent pas trop bien avec l'enseignement de ses professeurs.

Peut-être s'en servira-t-il pour démolir, avec cette belle intransigeance de la jeunesse, dont parle Lebesgue, ce qu'on lui aura enseigné. Ce qui importe, c'est qu'il apprenne à penser par lui-même, et qu'il le fasse d'autant plus, qu'il pénètre plus profondément dans la pensée mathématique des autres.

L.-C. YOUNG.

INTRODUCTION

Les questions de maxima et de minima jouent un tel rôle en mathématiques que mon attention a toujours été attirée vers elles. Mes premières recherches sur la longueur des courbes et l'aire des surfaces m'ont fait considérer ces notions comme liées à des problèmes de minimum. Les procédés que j'employais alors étant apparentés à ceux grâce auxquels M. Hilbert fonda la méthode directe du calcul des variations, c'est toujours en pensant quelque peu à cette méthode que je me suis occupé de maximum et de minimum, de sorte que des glanes faites dans mes publications, mes notes de cours ou mes souvenirs relatifs à des problèmes d'extrema constituent une sorte d'étude critique de la méthode directe; c'est sous cette forme que je les présenterai ici. La conclusion qui s'en dégagera est que cette méthode directe, loin de devoir être opposée comme on le fait quelquefois aux méthodes plus classiques n'est que le complément naturel et indispensable de ces méthodes.

La dénomination de « méthode directe » étant assez mal choisie, quelques explications sont peut-être nécessaires. Avant que les dérivées n'aient fait partie des programmes de l'enseignement moyen, la recherche d'un maximum ou d'un minimum se faisait comme il va être rappelé. Soit à trouver le minimum de $y = x^2 - 3x + 2$. Les valeurs de y sont celles pour lesquelles l'équation précédente, considérée comme équation en x , a des racines; donc ces valeurs de y vérifient l'inégalité

$$3^2 - 4(2 - y) \geq 0.$$

Ainsi le minimum de y est $-\frac{1}{4}$ et il est atteint pour $x = \frac{3}{2}$. Soit encore à trouver les extrema de

$$y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 9}.$$

Les valeurs de y atteintes s'obtiennent comme précédemment.

Elles vérifient l'inégalité

$$3^2 - 4(2 + 9y)(1 - y) \geq 0$$

ou

$$1 - 28y + 36y^2 \geq 0$$

$$\text{soit } y \geq \frac{7 + 2\sqrt{10}}{18}, \text{ soit } y \leq \frac{7 - 2\sqrt{10}}{18}.$$

Cette fonction n'a donc ni maximum absolu ni minimum absolu, mais elle a un maximum relatif et un minimum relatif dont nous venons de trouver les valeurs et qui sont obtenues pour $x = \frac{3}{2(1-y)}$.

Pour distinguer cette ancienne méthode de la méthode actuelle qui utilise les dérivées, celle-ci a été parfois appelée méthode directe. Dénomination étrange, puisque l'ancienne méthode fournissait d'abord y et ensuite x , c'est-à-dire en premier lieu l'extremum cherché, tandis que la nouvelle fournit d'abord x et ensuite y , c'est-à-dire en premier lieu ce qu'on appelle la *valeur extrême*. Cette dénomination est d'autant plus surprenante que, dans la pratique, c'est l'extremum qui est important. Ce qu'il importe de savoir, par exemple, c'est quelle est la plus grande charge que peut supporter un pont et il est beaucoup moins essentiel de savoir quelle position atteindrait une voiture trop chargée avant que le pont ne se rompe. L'ancienne méthode présente donc un avantage évident sur la nouvelle. Mais elle a le grave inconvénient de ne pouvoir être employée que dans un très petit nombre de cas, ceux où l'on sait résoudre les équations analogues à celles qui nous ont servi ou, tout au moins, trouver le nombre de leurs racines et les valeurs approximatives de ces racines. Comme on ne sait guère résoudre ces équations auxiliaires que par l'emploi des dérivées, on se trouve ramené, à la forme d'exposition près, à la méthode nouvelle.

Malgré ces critiques, nous appellerons *méthode directe* une méthode dans laquelle l'extremum n'est pas obtenu en premier lieu.

Les questions dont nous nous occuperons sont du type suivant: un élément X est variable dans une certaine famille d'éléments; ce sera, suivant les cas, un nombre, un point (d'une droite,

d'une courbe, d'un plan, de l'espace, ..., c'est-à-dire une variable ou un ensemble de deux ou de plus de deux variables), une courbe (du plan ou de l'espace, c'est-à-dire une fonction d'une variable ou l'ensemble de deux fonctions d'une variable), une ou plusieurs surfaces, etc... On suppose établie une correspondance entre un nombre Y et l'élément X . Cette correspondance définit ce que l'on appelle une fonction de X : $Y = F(X)$. La plus grande des valeurs atteintes par Y est son *maximum*, la plus petite son *minimum*; ce sont là les deux *extrema* de Y . Si l'on suppose qu'ils sont atteints respectivement pour les éléments X_1 et X_2 , X_1 et X_2 sont les *positions extrémales* de X . Ce sont toujours les positions extrémales que nous déterminons en premier lieu.

CHAPITRE PREMIER

Sur une question de minimum¹⁾

1. Il s'agit de cette question connue: *A, B, C étant trois points donnés, P un point variable du plan ABC, quel est le minimum de la somme PA+PB+PC ?*

Je me propose de résoudre cette question par des méthodes élémentaires, sans faire d'hypothèses sur l'existence d'une position pour laquelle le minimum est atteint, et sans recourir ni à la théorie des coniques ni à des considérations de géométrie de situation.

Dans une suite d'exercices de sa *Géométrie élémentaire* (voir en particulier ex. 363) M. Hadamard a donné une méthode conduisant au but que je me propose. Bien entendu, sa méthode n'est pas sans parenté avec celles qui suivent. Des différentes démonstrations proposées, le lecteur en déduira facilement de nouvelles.

Les premiers paragraphes contiennent des propositions accessoires qui simplifieront l'exposition, mais qu'il n'est pas nécessaire de traiter à part comme je le fais.

2. Parcourons le périmètre du triangle dans le sens *ABC*; nous fixons ainsi un sens de rotation qui sera dit le sens direct.

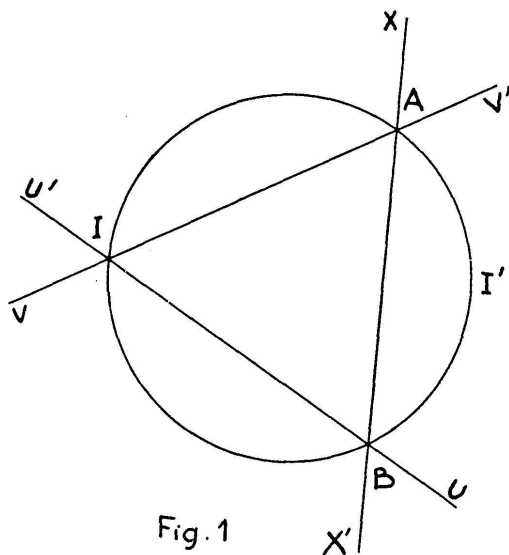
Si par *A* on mène une droite quelconque *D* et par *B* une droite Δ rencontrant *D* en un point *P* et telle qu'il faille faire tourner *D* de $\frac{2\pi}{3}$ dans le sens direct autour du point *P* pour l'amener sur Δ , le lieu de *P* quand *D* tourne autour de *A*, est la circonférence capable de $\frac{2\pi}{3}$ décrite sur *AB*.

¹⁾ Le texte qui suit est paru sous le titre: Sur une question de minimum, dans la *Revue de l'Enseignement des Sciences*, 12^e année, janvier-février 1918, p. 1.

Si, au contraire, Δ se déduisait de D par une rotation de $\frac{2\pi}{3}$ dans le sens inverse, le lieu de P serait la circonférence capable de $-\frac{2\pi}{3}$ décrite sur AB .

Les trois circonférences capables de $+\frac{2\pi}{3}$ décrites respectivement sur AB, BC, CA se coupent en un point M , et de même les trois circonférences capables de $-\frac{2\pi}{3}$ se coupent en un point M_1 . En effet, si M , par exemple, est le point commun aux deux premières, on passe de la droite MA à la droite MB par une rotation $+\frac{2\pi}{3}$; on passe de MB à MC par une rotation $+\frac{2\pi}{3}$; donc on passe de MC à MA par la rotation

$$+ 2\pi - \frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = + \frac{2\pi}{3}.$$



Soit $AIBI'$ (fig. 1) la circonférence capable de $+\frac{2\pi}{3}$ décrite par P . Nous allons chercher dans quelles conditions le point M est intérieur au triangle ABC . Le sens de rotation direct des angles $+\frac{2\pi}{3}$ est le sens AIB . Ce sens doit être le même que le sens ABC ; donc le point C est dans le demi-plan limité par AB

et qui contient I' . La droite MC forme avec MA et MB des angles égaux en valeur absolue à $\frac{\pi}{3}$ et qui sont inscrits dans notre

circonférence; donc MC passe par I , milieu du grand arc AB . Les droites IA , IB et l'arc $AI'B$ divisent le demi-plan considéré en quatre régions. Si C est dans $X'BU$ ou $V'AX$, le point M , qui est sur IC , est sur l'arc AI ou BI , donc est extérieur à ABC .

Si C est dans $UBI'AV'$, M est sur $AI'B$ et entre C et le point de rencontre avec AB ; donc il est intérieur à ABC .

Si C est dans le segment $AI'B$, M est encore sur $AI'B$, mais pas entre C et le point de rencontre avec AB ; donc il est encore extérieur à ABC .

Or, quand C est dans $V'AX$, l'angle A surpasse $\frac{2\pi}{3}$; quand C est dans $X'BU$, l'angle B surpasse $\frac{2\pi}{3}$; quand C est dans le segment $AI'B$, l'angle C surpasse $\frac{2\pi}{3}$; quand C est dans $V'AI'BU$, tous les angles du triangle sont inférieurs à $\frac{2\pi}{3}$.

Donc M est intérieur au triangle ABC si tous ses angles sont inférieurs à $\frac{2\pi}{3}$.

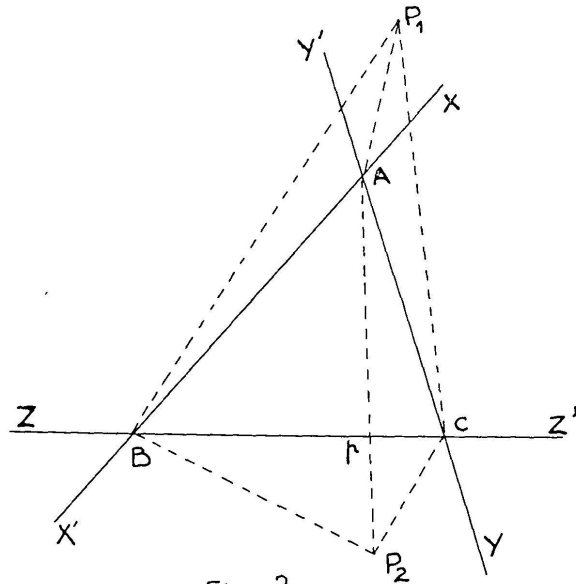
Supposons maintenant que la circonférence $AIBI'$ soit capable de $-\frac{2\pi}{3}$ et cherchons dans quelles conditions M_1 est sur l'arc $AI'B$ que nous appellerons Γ . Cette fois, C est dans le demi-plan limité par AB et qui contient I .

M_1 étant sur CI , il faut que C soit dans AIB ou $U'IV$. Dans le premier cas, les deux angles A et B sont tous deux plus petits que $\frac{\pi}{3}$; dans le second, ils sont tous deux plus grands; pour toutes les autres positions de C , l'un de ces angles est plus grand que $\frac{\pi}{3}$ et l'autre plus petit.

Si Θ est un triangle d'angles α , β , γ , on démontrera de même que les trois circonférences capables de $+(\pi-\alpha)$, $+(\pi-\beta)$,

$+(\pi-\gamma)$, ou de $-(\pi-\alpha)$, $-(\pi-\beta)$, $-(\pi-\gamma)$, décrites sur AB , BC , CA concourent en un point M ou M_1 . Dans les considérations précédentes, le triangle équilatéral ABI sera remplacé par un triangle semblable à Θ pour lequel :

$$\widehat{ABI} = \beta, \widehat{BIA} = \gamma, \widehat{IAB} = \alpha$$



Donc, M sera intérieur à ABC si l'on a

$$A < \pi - \alpha, B < \pi - \beta, C < \pi - \gamma$$

M_1 sera sur l'arc Γ si l'on a

soit $A < \alpha$ et $B < \beta$

soit $A > \alpha$ et $B > \beta$

3. Pour la recherche du minimum de $PA+PB+PC$, on peut se borner aux points P intérieurs à ABC ou situés sur le contour de ABC . Je les appellerai: les points de ABC .

En effet, soit un point P qui ne soit pas point de ABC . Nous allons lui faire correspondre un point de ABC donnant une somme plus petite que $PA+PB+PC$.

Si P est en P_1 dans XAY' (fig. 2), on a

$$P_1B + P_1C > AB + AC,$$

donc

$$P_1A + P_1B + P_1C > AA + AB + AC,$$

et l'on peut faire correspondre A à P_1 .

Si P est en P_2 dans $X'BCY$, on peut lui faire correspondre p , point de rencontre de AP_2 et de BC , car

$$P_2B + P_2C > pB + pC,$$

donc

$$P_2A + P_2B + P_2C > pA + pB + pC.$$

Tous les cas sont ainsi examinés.

La même conclusion subsiste et le raisonnement convient aussi pour le cas de la somme $aPA + bPB + cPC$, a , b , c étant trois constantes positives données. Pour la somme $aPA + bPB - cPC$, il suffirait de s'occuper des points de la région $Y'ABZ$; démontrons seulement qu'on peut se limiter au demi-plan Π limité par AB et ne contenant pas C . Soient en effet P_1 et P_2 deux points symétriques par rapport à AB , P_1 étant dans Π ; il est évident que l'on a

$$\begin{aligned} aP_1A + bP_1B - cP_1C &= aP_2A + bP_2B - cP_1C \\ &< aP_2A + bP_2B - cP_2C \end{aligned}$$

I

4. Soit $\hat{A} \leq \hat{B} \leq \hat{C}$ (fig. 3).

Faisons tourner ABC de $+\frac{\pi}{3}$ autour de C ; il vient en $A'B'C$.

Un point P , intérieur à ABC , vient en P' . Le triangle PCP' , isocèle car $PC = PC'$, et dont l'angle C vaut $+\frac{\pi}{3}$, est équilatéral.

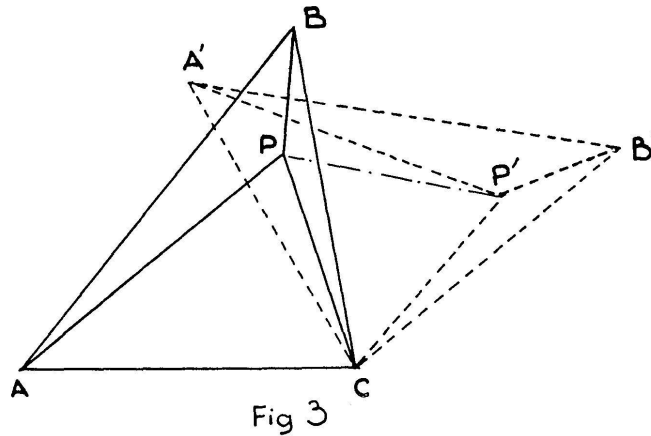
Donc

$$PA + PB + PC = AP + PP' + P'B'$$

Un mobile, se déplaçant sur $APP'B'$ de A vers B' , tourne autour de C d'abord de l'angle ACP qui est dans le sens direct,

puis de $+\frac{\pi}{3}$, puis de $P'CB' = PCB$ de sens direct; donc il tourne au total de $ACB + \frac{\pi}{3}$.

Si donc l'angle \widehat{C} du triangle surpasse $\frac{2\pi}{3}$, la ligne $APP'B'$ est enveloppante pour la ligne ACB' dont l'angle $\widehat{ACB'}$ est plus grand que π . Le minimum est alors obtenu quand P est en C . Ce minimum est la somme des deux plus petits côtés du triangle, car AB opposé au plus grand angle C est le plus grand côté de ce triangle.



Si \widehat{C} , et par suite aussi \widehat{A} et \widehat{B} , est inférieur ou égal à $\frac{2\pi}{3}$, il existe un point M de ABC tel que les droites MA ; MB , MC fassent entre elles des angles de $+\frac{2\pi}{3}$. Si P vient en M , on a

$$\widehat{APC} = \frac{2\pi}{3} \quad \widehat{CPP'} = \frac{\pi}{3}$$

$$\widehat{CP'B'} = \widehat{CPB} = \frac{2\pi}{3} \quad \widehat{PP'C} = \frac{\pi}{3};$$

donc A , P , P' , B sont en ligne droite: la position M de P donne le minimum et il est évident que c'est la seule position le donnant.

Ce minimum est égal à

$$AB' = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos\left(C + \frac{\pi}{3}\right)}.$$

Le fait que \widehat{C} est le plus grand des angles nous a été commode pour la distinction des deux cas, mais il n'intervient pas dans la seconde partie du raisonnement; dans l'expression ci-dessus du minimum, on peut donc effectuer une permutation circulaire sur les côtés et les angles du triangle.

5. M. Montel m'a fait remarquer que la démonstration s'applique à la somme

$$aPA + bPB + cPC.$$

Ecartons le cas banal où l'un des a, b, c , serait nul, et supposons d'abord qu'il existe un triangle Θ dont les côtés ont pour longueurs a, b, c . Soient α, β, γ les angles de ce triangle.

Supposons que l'on ait

$$A + \alpha \leq B + \beta \leq C + \gamma$$

et faisons tourner ABC de l'angle γ autour de C ; puis effectuons l'homothétie de centre C et de rapport $\frac{b}{a}$ qui donne le triangle $A'B'C$; P , intérieur à ABC , vient en P' . On a

$$P'B' = PB \times \frac{b}{a} \quad P'C = PC \times \frac{b}{a}.$$

Le triangle PCP' , dont l'angle $\widehat{PCP'}$ est égal à γ , est donc semblable à Θ et

$$PP' = PC \times \frac{c}{a}$$

Donc on a

$$AP + PP' + P'B' = \frac{aPA + bPB + cPC}{a}$$

La démonstration se poursuit comme précédemment. Le minimum est donné par C si $C + \gamma \geq \pi$. Le minimum est donné par le point M commun aux trois circonférences capables de $+(\pi - \alpha)$, $+(\pi - \beta)$, $+(\pi - \gamma)$ décrites respectivement sur BC, CA, AB , si

$$A + \alpha < \pi, \quad B + \beta < \pi, \quad C + \gamma < \pi.$$

Supposons ensuite qu'il n'existe pas de triangle \ominus . Soit, par exemple, $c > a + b$. On peut trouver c_1 vérifiant $c_1 > a$, $c_1 > b$, $c_1 < a + b$ et tel que le triangle de côtés a , b , c_1 ait un angle γ_1 opposé à c_1 assez grand pour que $C + \gamma_1$ surpasse π . Alors on a, quel que soit P différent de C ,

$$aPA + bPB + c_1PC > aCA + bCB,$$

donc, *a fortiori*, puisque c_1 est plus petit que c ,

$$aPA + bPB + cPC > aCA + bCB$$

et le minimum est donné par la position C de P .

II

6. Soient A_1 , B_1 , C_1 des points pris sur MA , MB , MC entre M et A , B , C et P un point différent de M . On a

$$PA \leq PA_1 + AA_1, \quad PB \leq PB_1 + BB_1, \quad PC \leq PC_1 + CC_1,$$

les trois signes $=$ ne convenant pas à la fois. En ajoutant, on a

$$PA + PB + PC < PA_1 + PB_1 + PC_1 + (AA_1 + BB_1 + CC_1).$$

Si donc on a

$$PA_1 + PB_1 + PC_1 \leq MA_1 + MB_1 + MC_1$$

en ajoutant $AA_1 + BB_1 + CC_1$ aux deux membres, on en tire :

$$PA + PB + PC < MA + MB + MC.$$

Donc, si M donne le minimum pour $PA + PB + PC$, il donne aussi le minimum pour $PA_1 + PB_1 + PC_1$. Et puisque, quels que soient \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} , sur les demi-droites MA , MB , MC , une homothétie de centre M permet de remplacer \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} , par A_1 , B_1 , C_1 entre M et A , M et B , M et C , le point M donne aussi le minimum pour la somme $P\mathcal{A} + P\mathcal{B} + P\mathcal{C}$.

La recherche d'une position donnant le minimum est donc la recherche d'une certaine configuration de trois demi-droites

MA, MB, MC , mais ne dépend pas de la position des points A, B, C .

Cette remarque, qui fait pressentir le rôle du point M du § 2, permet d'arriver tout de suite au résultat si l'on admet l'existence d'une position P donnant le minimum. Pour rester tout à fait dans le domaine élémentaire, notons la conclusion sous la forme suivante.

Si l'on a

$$PA + PB + PC > MA + MB + MC,$$

on peut remplacer dans cette inégalité les points A, B, C par d'autres situés sur MA, MB, MC entre M et A, M et B, M et C , ou par des points situés sur PA, PB, PC , au-delà de A, B, C . En d'autres termes, on peut allonger les longueurs du membre le plus grand ou diminuer celles du plus petit.

7. Supposons que ABC soit un triangle équilatéral; M est le point de rencontre de ses hauteurs. Soit P un point différent de M . Je dis que l'on a

$$PA + PB + PC > MA + MB + MC.$$

En effet, soient P_1, P_2 les deux points déduits de P par des rotations de $\pm \frac{2\pi}{3}$ autour de M . M est le point de rencontre des médianes du triangle PP_1P_2 ; donc la somme géométrique de AP, AP_1, AP_2 est d'après une proposition connue égale à $3AM$. Cette somme géométrique a une longueur inférieure à $AP + AP_1 + AP_2$; donc on a

$$\begin{aligned} PA + PB + PC &= \frac{AP + AP_1 + AP_2}{3} + \frac{BP + BP_1 + BP_2}{3} \\ &+ \frac{CP + CP_1 + CP_2}{3} > AM + BM + CM \end{aligned}$$

Ainsi le point M donne bien le minimum pour le cas du triangle équilatéral.

Supposons que ABC n'ait aucun angle supérieur à $\frac{2\pi}{3}$.

D'après le § 2, il existe un point M tel que les trois demi-droites MA , MB , MC fassent entre elles des angles égaux à $\frac{2\pi}{3}$ ¹⁾.

Sur ces trois demi-droites, prenons, au-delà de A , B , C trois points \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} , à la même distance de M . M donne le minimum pour le triangle $\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}$, donc aussi pour ABC .

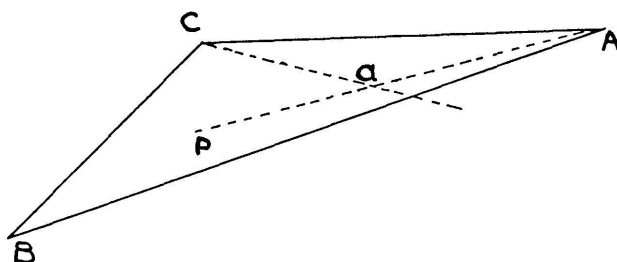


Fig 4

Supposons que ABC ait un angle supérieur à $\frac{2\pi}{3}$, soit l'angle C . Je dis que C donne le minimum, donc, que, quel que soit le point P , on n'a pas

$$PA + PB + PC < CA + CB.$$

L'un des deux angles \widehat{BCP} ou \widehat{PCA} est inférieur à $\frac{2\pi}{3}$, soit \widehat{BCP} (fig. 4). Traçons la droite Ca faisant $+\frac{2\pi}{3}$ avec CB ; elle coupe PA en a . Si l'inégalité précédente était vraie, on pourrait y remplacer A par a . Or cela est impossible, puisque C donne le minimum pour le triangle aBC .

III

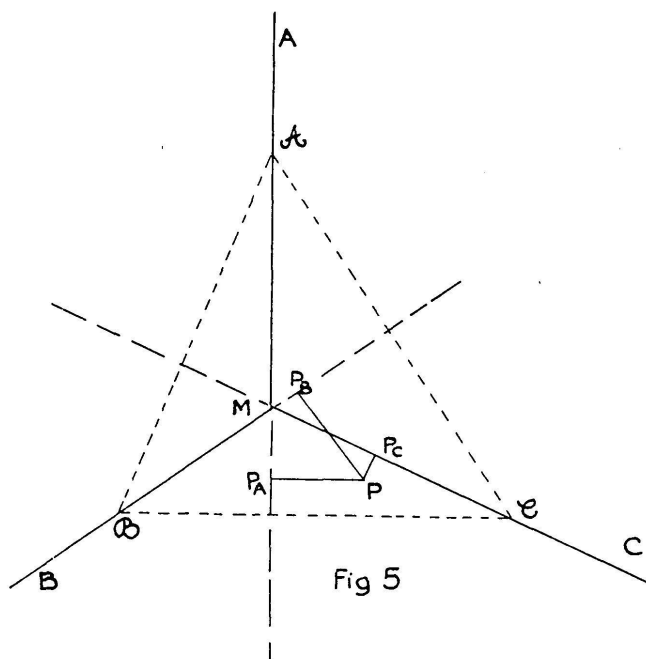
8. Les raisonnements du § 6 s'appliquent tout de suite au cas de la somme $aPA + bPB + cPC$; mais il n'en est pas de même du raisonnement du début du § 7. On peut, dans le cas général, raisonner comme il suit.

1) Si $C = \frac{2\pi}{3}$, M est en C ; la demi-droite MC est alors définie par la condition de faire l'angle $+\frac{2\pi}{3}$ avec MB .

Plaçons-nous dans le cas où il existe un triangle Θ et où $A + \alpha, B + \beta, C + \gamma$ sont inférieurs à π . Il existe alors, dans ABC , un point M d'où l'on voit BC, CA, AB sous des angles $\pi - \alpha, \pi - \beta, \pi - \gamma$ (§ 2). Je dis que ce point donne le minimum. Soit P un point différent de M . L'hypothèse

$$aPA + bPB + cPC \leq aMA + bMB + cMC$$

va nous conduire à une contradiction.



Soient (fig. 5) P_A, P_B, P_C les projections de P sur AM, BM, CM et convenons de compter positivement AP_A, BP_B, CP_C respectivement dans les sens AM, BM, CM . On a

$$AP \geq AP_A;$$

inégalité dans laquelle le premier membre est positif et le second de signe quelconque, ou

$$AM - AP \leq AM - AP_A = P_A M.$$

Les trois inégalités analogues ne peuvent se réduire simultanément à des égalités. En les ajoutant, on a

$$0 \leq a(AM - AP) + b(BM - BP) + c(CM - CP)$$

$$< aP_A M + bP_B M + cP_C M.$$

Or, soit θ un triangle \mathcal{ABC} ayant pour hauteurs les droites MA , MB , MC . θ est évidemment semblable à Θ ; donc ses côtés sont proportionnels à a , b , c . En représentant par M_a , M_b , M_c , P_a , P_b , P_c les distances de M et P aux côtés de ce triangle, distances comptées dans des sens tels qu'elles soient positives pour des points intérieurs à θ , on a, comme l'on sait

$$aM_a + bM_b + cM_c = aP_a + bP_b + cP_c,$$

ou encore

$$a(P_a - M_a) + b(P_b - M_b) + c(P_c - M_c) = 0$$

Or, au signe près peut-être, car la position de θ n'a pas été précisée, le premier membre est égal à $aP_A M + bP_B M + cP_C M$, d'où la contradiction annoncée.

Le premier cas étant ainsi traité, pour achever l'examen des trois cas possibles, on imitera la fin du § 7, puis celle du § 5.

IV

9. Je vais examiner rapidement le cas de la somme $aPA + bPB - cPC$, en supposant toutefois $c < a + b$, sans quoi le minimum serait $-\infty$ comme on le voit en prenant P de plus en plus loin.

Soit P un point du demi-plan Π limité par AB et ne contenant pas C (§ 3). Soit Q la position du point K donnant le minimum de $aKA + bKB + cKC$. On a

$$aPA + bPB > aQA + bQB + cQP,$$

d'où

$$\begin{aligned} aQA + bQB - cQC &< aPA + bPB - c(QP + QC) \\ &< aPA + bPB - cPC. \end{aligned}$$

Or, Q est en A si $A \geq \pi - \alpha$, ou si $a \geq b + c$, en B si $B \geq \pi - \beta$, ou si $b \geq a + c$, en C si $C \geq \pi - \gamma$, et si aucune de ces conditions n'est réalisée, il se trouve sur l'arc Γ de la circonférence capable de $-(\pi - \gamma)$ décrite sur AB qui se trouve dans Π .

Donc, la question est résolue pour $a \geq b+c$, ou $b \geq a+c$, et, dans le cas où il existe un triangle θ , il suffit de s'occuper des points P du demi-plan Π qui sont compris entre AB et Γ .

Soient P un de ces points, Q le point de rencontre de CP prolongé et de Γ . Q donne le minimum de la somme $aKA+bKB+cKQ$, puisque l'angle AQB est égal à $\pi-\alpha$. Donc

$$\begin{aligned} aQA+bQB &< aPA+bPB+cPQ, \\ aQA+bQB-cQC &< aPA+bPB-c(QC-PQ) \\ &< aPA+bPB-cPC. \end{aligned}$$

Donc il suffit de s'occuper du cas où P serait en A , en B ou sur Γ .

10. Supposons $A = \alpha$, $B = \beta$, $C = \gamma$ et P sur Γ qui est maintenant un arc de la circonférence circonscrite à ABC . Le théorème de Ptolémée donne :

$$PC \cdot AB = PA \cdot BC + PB \cdot AC,$$

ou puisque AB, BC, CA sont proportionnels à a, b, c ,

$$cPC = aPA + bPB.$$

Le minimum est donc 0; il est atteint pour tous les points de Γ .

11. La conclusion énoncée à la fin du § 6 s'applique sans changement à la somme $aPA+bPB-cPC$ pour ce qui est de la substitution d'autres points aux points A et B ; mais, pour ce qui est de C , la conclusion est naturellement inverse: on peut remplacer C par un point situé sur MC au-delà de C ou par un point situé sur PC entre P et C .

Ceci étant, soit $A > \alpha$, $B > \beta$. Alors C est dans $U'IV$ (fig. 1). Il existe sur $AI'B$ un point M_1 intersection de Γ et de CI . C'est ce point M_1 qui donne le minimum, car M_1 donne le minimum quand on remplace C par I .

Soient maintenant C intérieur à la circonférence (Γ) qui porte l'arc Γ (donc $C > \gamma$) et P un point de Γ (fig. 6). Si P ne fournissait pas une somme $aPA+bPB-cPC$ supérieure à celles que donneraient les points A ou B , il en serait de même si l'on rem-

plaçait C par le point d'intersection \mathcal{C} de PC et de (Γ) . Or, soit Q un point de Γ ; on a

$$cQI = aQA + bQB$$

et

$$aQA + bQB - cQ\mathcal{C} = c(QI - Q\mathcal{C})$$

Sur QI portons $QJ = Q\mathcal{C}$. L'angle $\mathcal{C}JI$ étant constant, le lieu de J est une circonférence (λ) passant par \mathcal{C} et I , et comme J est en I quand Q est situé en Q_1 , sur la perpendiculaire au milieu de $\mathcal{C}I$ et du même côté que A et B par rapport à $\mathcal{C}I$, Q_1I est la tangente à (λ) ; (λ) a donc pour centre le milieu Q_2 de celui des arcs $\mathcal{C}I$ qui ne contient pas A et B .

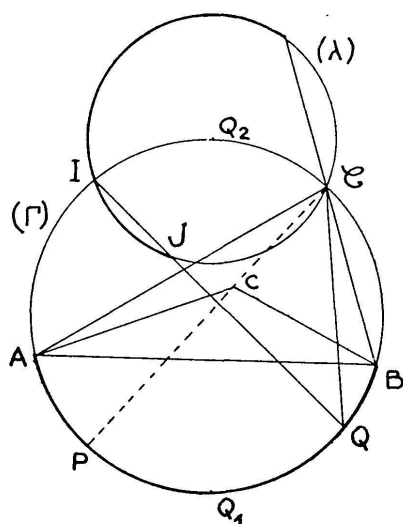


Fig. 6

Il résulte de là que, quand Q parcourt Γ , l'arc de (λ) parcouru par J ne contient pas le point diamétralement opposé à I , puisque Q ne prend pas la position Q_2 ; le minimum de la différence positive ou négative

$$JI = QI - Q\mathcal{C}$$

donc de $aQA + bQB - cQ\mathcal{C}$, est par suite obtenu pour l'une des deux positions extrêmes A ou B du point Q .

Donc, pour $C \geq \gamma$, le minimum est donné par l'un des sommets A ou B .

Maintenant, si A donne le minimum pour une position de C , il donne *a fortiori* le minimum si l'on éloigne C de A sur la droite AC ; donc tous les cas sont traités.

Le seul cas où le minimum n'est donné ni par A , ni par B est celui où l'on a

$$A > \alpha, B > \beta$$

et alors le minimum est donné par le point M_1 .

12. Reste le cas où $c > a + b$; il faut alors chercher le maximum de $aPA + bPB - cPC$. On sait, d'après ce qui précède, que pour $c > a + b$ on a, quel que soit P ,

$$aPA + bPB < aCA + bCB + cCP,$$

ou

$$aPA + bPB - cPC < aCA + bCB,$$

et C donne le maximum cherché.

Par des changements de signes, on déduit de ce qui précède l'étude du maximum ou du minimum de toute somme de la forme

$$\pm aPA \pm bPB \pm cPC \text{ } ^1) \text{ } ^2).$$

Au commencement de l'article qu'on vient de lire, il est fait allusion à la solution suivante du problème proposé:

Soit M la position du point P donnant le minimum; si nous faisons varier le point P sur l'ellipse de foyers A et B passant par M , $PA + PB$ est constant; le point M est donc le point de cette ellipse le plus rapproché de C ; il en résulte que CM est une normale à l'ellipse, sans quoi la tangente à l'ellipse n'étant pas perpendiculaire à CM , le point P décrivant l'ellipse franchirait à son passage en M la circonférence de centre C et de rayon CM , de sorte qu'il existerait des positions de P voisines de M

¹⁾ Les méthodes I et III réussissent aussi pour cette somme. Pour la première, je n'ai pu éviter d'assez grandes complications, mais pour la deuxième, le raisonnement s'applique presque sans changement. La seule difficulté, s'il s'agit de $aPA + bPB - cPC$, est l'utilisation de l'inégalité $c(CM - CP) \leq bMP_c$ à ajouter à des inégalités de sens contraires. Mais, en profitant de la possibilité d'éloigner M sur MC , on peut rendre cette inégalité aussi voisine qu'on veut d'une égalité.

²⁾ Fin de l'article reproduit.

pour lesquelles $PA + PB + PC$ serait inférieur à $MA + MB + MC$; de plus, l'ellipse doit être entièrement extérieure au cercle dont nous venons de parler et ne pas contenir ce cercle à son intérieur; donc la demi-droite MC doit être le prolongement de la demi-droite bissectrice intérieure des demi-droites MA, MB ; comme la même conclusion s'applique quand on permute A, B, C , il en résulte que les trois demi-droites MA, MB, MC doivent faire entre elles des angles de 120° . Toutefois, ce raisonnement suppose que les directions des trois demi-droites soient bien déterminées, donc que M ne coïncide avec aucun des points A, B, C . Lorsque l'un des angles du triangle est supérieur ou égal à 120° , il n'existe pas de point M pour lequel MA, MB, MC sont à 120° . Le minimum est donc atteint pour un sommet et, évidemment, pour le sommet du plus grand angle. Lorsque chacun des angles est inférieur à 120° , il existe au contraire un tel point M ; on vérifie facilement que la somme $MA + MB + MC$ est inférieure à la somme de deux quelconques des côtés du triangle et on en conclut que c'est ce point M qui donne le minimum.

Pourquoi remplacer cette démonstration si simple par d'autres analogues à celles qu'on a lues? C'est que, pour conclure comme nous l'avons fait, il faut admettre qu'il existe une position M de P donnant le minimum de $PA + PB + PC$. On peut être tenté de considérer que cela va de soi. Pourtant il est clair qu'il n'y a pas de position de P donnant le maximum de $PA + PB + PC$, de sorte qu'en réalité, s'il nous paraît certain qu'un minimum est atteint, c'est parce que nous n'imaginons pas qu'il pourrait en être autrement et ce défaut d'imagination n'a certainement aucune valeur logique.

Considérons le problème suivant: soient deux points A et B et une droite AT ne passant pas par B , et demandons-nous quel est le plus court de tous les arcs de courbe d'extrémités A et B et ayant AT pour tangente en A . On peut tracer de tels arcs différant extrêmement peu du segment AB . Comme tout arc joignant A et B a une longueur au moins égale à AB , c'est la distance AB qui fournit ce que l'on peut appeler le minimum de la longueur des arcs considérés. (Ce mot minimum sera d'ailleurs remplacé par un autre d'ici peu.) Mais il est clair qu'aucun de ces arcs n'a la longueur AB . Voici donc un minimum qui n'est

pas atteint. Ainsi, il apparaît comme essentiel de prouver l'existence de l'extremum que l'on cherche.

Les façons de faire dans lesquelles on néglige de prouver cette existence ont été critiquées sous une forme très imagée, par M. O. Perron. Cherchons avec lui le plus grand des nombres entiers. Ce ne peut être 2 car le carré de 2 est plus grand que 2; ni 3, car le carré de 3 est plus grand que 3; etc... Donc le plus grand des nombres entiers est 1.

La première fois où la nécessité de démontrer l'existence de l'extremum ait été signalée semble être la suivante. Argand, né à Genève, teneur de livres à Paris, avait publié en 1806 un *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*. C'est là qu'il donne la représentation d'un nombre complexe par son affixe. A la vérité, Argand avait été précédé par le Danois Caspar Wessel qui avait présenté en 1797, à l'Académie Royale de Copenhague, un travail sur le même sujet, travail bien supérieur à celui d'Argand, mais qui ne fut pas remarqué et n'eut aucune influence, bien qu'il ait été publié en 1799 dans les Mémoires de l'Académie. Il s'en fallut de peu que le travail d'Argand fût aussi peu remarqué que celui de Wessel. Mais Jacques Français, à la mort de son frère aîné, trouva dans les papiers de celui-ci une lettre de Legendre mentionnant sans en nommer l'auteur la représentation qu'avait donnée Argand. Français pria cet auteur inconnu de se faire connaître et c'est ainsi qu'Argand reprit en quelque sorte son essai dans les *Annales de Mathématiques pures et appliquées*, tome VI, pages 61 à 71. En particulier, il donne là une démonstration du théorème de d'Alembert se réduisant à cette constatation: si une valeur z_0 de la variable complexe z fournit pour le module d'un polynome $f(z)$ une valeur positive, il y a au voisinage de z_0 des valeurs de z donnant au module une valeur plus petite. Il en résulte que, seuls, les zéros du polynome $f(z)$ peuvent donner le minimum du module de $f(z)$, et comme Argand admet que ce minimum est atteint, il en conclut que toute équation $f(z) = 0$ admet des racines. Servois critique le mémoire d'Argand dans le même tome des *Annales*, pages 228 à 235. Il écrit notamment: « Ce n'est point assez, ce me semble, de trouver des valeurs de x qui donnent au polynome des valeurs sans cesse décroissantes;

il faut de plus que la loi des décroissements amène nécessairement le polynome à zéro, ou qu'elle soit telle que zéro ne soit pas, si l'on peut s'exprimer ainsi, l'asymptote du polynome. »

Cette fine critique de Servois fut faite à nouveau en termes plus précis par Weierstrass à l'occasion des recherches de Riemann sur les fonctions algébriques, recherches fondées sur le problème de minimum connu sous le nom de problème de Dirichlet. A cette occasion, Weierstrass montra que les fonctions continues d'une ou de plusieurs variables atteignent leurs extrema lorsqu'on ne considère ces fonctions que dans des domaines bornés. D'autre part, il introduisit ce que l'on a appelé les conditions suffisantes dans le Calcul des variations. Pour le moment, rappelons seulement les dénominations précises qu'il a introduites. Une famille de nombres étant donnée, on appelle *borne inférieure* de ces nombres le plus grand des nombres tels qu'aucun nombre de la famille ne lui soit inférieur. La *borne supérieure* se définit d'une manière analogue. Toute famille de nombres admet nécessairement une borne inférieure et une borne supérieure, seulement la borne inférieure peut être $-\infty$ et la borne supérieure $+\infty$. Supposons que la famille de nombres considérée soit la famille des valeurs prises par une fonction $f(X)$. D'après la définition même de la borne inférieure, cette borne sera, ou le plus petit des nombres $f(X)$, ou le plus grand des nombres inférieurs à $f(X)$. Dans le premier cas seulement, on dira que la fonction a un *minimum*; c'est le cas où nous disions précédemment que le minimum est atteint. Dans le second cas, il vaut mieux remplacer le mot de minimum par l'expression borne inférieure.

Il ne faut pas trop s'étonner que la distinction entre minimum et borne inférieure, ou maximum et borne supérieure ait été faite si tardivement. C'est qu'elle n'a aucune signification concrète. Qui oserait décider s'il existe une charge maxima que peut supporter un pont, plutôt qu'une charge minima qui le fasse écrouler ? Aussi s'explique-t-on que les physiciens, dont les recherches ont posé certains problèmes de minimum comme celui de Dirichlet, aient été longs à admettre que les recherches des mathématiciens relatives à ces problèmes ne soient pas de simples jeux, mais des travaux nécessaires.

CHAPITRE II

Sur le problème des isopérimètres

On a vu, dans l'article précédemment reproduit, que, lorsqu'on n'admet pas a priori l'existence de l'extremum de $Y = f(X)$ cherché, il faut que le procédé employé conduise à la construction de l'élément extrémal X ainsi que cela s'est produit dans notre première méthode, ou que, comme dans les deux autres méthodes, il fasse soupçonner quel est cet élément extrémal; il convient alors de terminer par une vérification. Dans cet article, l'élément X était un point. Lorsque X est une courbe qui n'est à priori donnée ni de forme ni de grandeur, il faudra presque toujours construire la courbe extrémale. C'est ce que nous allons faire pour le problème des isopérimètres qui s'énonce ainsi: quelle est, de toutes les courbes planes fermées, de même longueur, celle qui enferme la plus grande aire, ou encore quel est de tous les domaines plans de même aire celui qui a le plus petit périmètre? ¹⁾

Le problème des isopérimètres peut, comme l'on sait, être ainsi posé: tracer un domaine pour lequel le rapport $\frac{L^2}{S}$, du carré du périmètre à l'aire du domaine, soit le plus petit possible. C'est sous cette forme que je l'envisagerai.

J'admets démontré, ce qui est facile, que la solution de ce problème ne peut être donnée que par un domaine convexe. Le contour convexe qui limite un tel domaine, étant supposé parcouru dans le sens direct, admet parallèlement à toute direction une et une seule tangente dirigée, en entendant par tangente au contour une droite qui a des points communs avec le contour,

¹⁾ Le texte qui suit est paru sous le titre: Sur les problèmes des isopérimètres et sur les domaines de largeur constantes, dans les *Comptes rendus des séances de la Société mathématique de France*, 1914, p. 72.

mais aucun point intérieur au domaine. Un contour convexe est défini par l'ensemble de ses tangentes, ou, ce qui revient au même, par un ensemble dénombrable de tangentes correspondant à des directions denses dans tout angle. Si l'on compte les directions à partir d'une origine quelconque, et si α désigne un arc incommensurable avec π , toutes les tangentes parallèles aux directions $m\alpha$, où m est entier, suffiraient à déterminer le contour. Les directions $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ étant choisies pour les tangentes, chacune des tangentes correspondantes dépend d'un paramètre, par exemple sa distance à un point fixe. Le problème des isopérimètres, problème du calcul des variations, est remplacé par un problème de minimum pour une fonction de ces paramètres en nombre infini. C'est là une transformation purement formelle et très banale, mais elle mérite cependant d'être signalée parce que, ici, on peut raisonner sur les paramètres comme s'ils étaient indépendants. Je veux dire que l'on peut déterminer chaque paramètre par la condition que le rapport $\frac{L^2}{S}$ considéré comme fonction de ce paramètre, supposé seul variable, soit minimum.

Soit C un contour convexe solution du problème des isopérimètres. Un tel contour, à supposer qu'il existe, n'est déterminé qu'à une similitude près; mais peu importe, raisonnons sur un contour C déterminé. Soient T_1, T_2, T_3, \dots les tangentes à ce contour de directions $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$

Considérons le polygone Π_p convexe limité par les tangentes dirigées $T_1, T_2, T_3, \dots, T_p$. Je suppose ce polygone fini, c'est-à-dire ne s'étendant pas à l'infini, ce qui est vrai dès que $p = 3$ si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont bien choisis. Le polygone Π_p admet p côtés ou du moins, s'il admet moins de p côtés et s'il n'admet pas, par exemple, de côté porté par T_k , c'est que T_k passe par un de ses sommets et que ce sommet est un point de C , sans quoi T_k ne serait pas tangente à C . On peut donc toujours dire que Π_p a p côtés, à condition, peut-être, de considérer des côtés infiniment petits. Ceci va se préciser de suite: passons de Π_p à Π_{p+1} en coupant Π_p par T_{p+1} ; on sait à l'avance que les côtés de Π_p qui seront coupés par T_{p+1} sont ceux qui, dans la rose des directions, comprennent la direction α_{p+1} . Soient AB, AC ces deux côtés, qui sont finis ou infiniment petits, peu importe; la tangente T_{p+1}

coupe certainement AB entre A et B et AC entre A et C , mais elle peut passer par A , par B ou par C . Dans tous les cas, pour passer de Π_p à Π_{p+1} , on enlève de Π_p un triangle et non un polygone plus compliqué; c'est la remarque essentielle.

Ce triangle, enlevé pour passer de Π_p à Π_{p+1} , est de grandeur inconnue, mais il est connu à une homothétie près. Si L_p et S_p sont la longueur et l'aire de Π_p et si l'on coupe Π_p par une parallèle à T_{p+1} qui passe entre A et B et entre A et C , on remplace Π_p par Π_{p+1} et L_p et S_p respectivement par $L_p - kl$, $S_p - k^2s$, l et s étant des nombres qu'on peut calculer dès que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{p+1}$ sont donnés. Par suite $\frac{(L_{p+1})^2}{S_{p+1}}$ est au moins égal au minimum de $\frac{(L_p - kl)^2}{S_p - k^2s}$; cherchons ce minimum. On l'obtient pour:

$$\frac{2l}{L_p - kl} = \frac{2ks}{S_p - k^2s}$$

ou

$$\frac{L_p - kl}{S_p - k^2s} = \frac{kl}{k^2s} = \frac{L_p}{S_p} \quad (1)$$

et ce minimum est

$$\frac{(L_p - kl)^2}{S_p - k^2s} = \frac{L_p}{S_p} \left[L_p - kl \right] = \frac{L_p^2}{S_p} \left[1 - \frac{l}{s} \frac{S_p}{L_p} \frac{l}{L_p} \right] = \frac{L_p^2}{S_p} - \frac{l^2}{s} \quad (2)$$

Ainsi, quand on passe de Π_p à Π_{p+1} , on gagne au plus $\frac{l^2}{s} = \varepsilon_p$, quantité connue à l'avance et ne dépendant que de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p+1}$; et l'on ne gagne cette quantité que si l'égalité (1) est vérifiée par la tangente T_p . Cette égalité s'interprète géométriquement d'une façon très simple: $\frac{2S_p}{L_p}$ est le rayon d'un cercle inscrit dans un polygone de longueur L_p et d'aire S_p ; $\frac{2k^2s}{kl}$ est le rayon du cercle exinscrit dans le triangle enlevé pour passer de Π_p à Π_{p+1} et inscrit dans l'angle A de ce triangle, c'est-à-dire dans celui des angles de Π_p dont le sommet n'est pas sommet de Π_{p+1} .

Si donc Π_p est un polygone circonscriptible et si l'on gagne $\frac{l^2}{s} = \varepsilon_p$ en passant de Π_p à Π_{p+1} , Π_{p+1} est circonscrit au même cercle que Π_p .

Ceci étant, et supposant, comme précédemment, que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2$, soient choisis de manière que Π_3 soit un triangle, soit m le rapport $\frac{L^2}{S}$ pour ce triangle; m est connu, puisque le triangle est connu à une homothétie près. Le rapport $\frac{L^2}{S}$ pour Π_{p+1} sera au moins

$$m - \varepsilon_3 - \varepsilon_4 - \dots - \varepsilon_p$$

et il ne sera égal à cette quantité que si la condition (1) est constamment remplie, c'est-à-dire si $\Pi_4, \Pi_5, \dots, \Pi_{p+1}$ sont circonscrits au cercle inscrit dans Π_3 . Si cette condition n'était pas remplie par Π_{k+1} ayant été remplie par $\Pi_4, \Pi_5, \dots, \Pi_k$, $\frac{L^2}{S}$ serait au moins

$$m - \varepsilon_3 - \varepsilon_4 - \dots - \varepsilon_{k-1} - \varepsilon_{k+1} - \dots - \varepsilon_p - \eta$$

avec $\eta < \varepsilon_k$. Et ce « manque à gagner » $\varepsilon_k - \eta$ ne pourrait jamais être rattrapé dans la suite.

$\frac{L^2}{S}$ pour le contour C étant la limite du rapport correspondant pour les polygones Π_m , on voit que le cas où C est un cercle est une solution du problème des isopérimètres et que c'est la seule solution.

Chemin faisant, nous avons vu que le minimum de $\frac{L^2}{S}$ pour un polygone dont les côtés ont des directions données est toujours fourni par un polygone circonscriptible. Signalons encore une quantité de curieuses expressions, savoir toutes celles qui résultent de la formule

$$4\pi = m - \varepsilon_3 - \varepsilon_4 - \varepsilon_5 - \dots;$$

inutile de les expliciter ici.¹⁾

1) La suite de la communication est relative aux domaines de largeur constante; il en sera question plus loin (voir p. 247, note 3).

Dans un livre auquel auront avantage à se reporter tous ceux qui s'intéressent au problème des isopérimètres et aux questions analogues: *Sur le problème des isopérimètres et le problème des isépiphanes* (collection des monographies sur la théorie des fonctions, Gauthier-Villars, 1930), M. T. Bonnessen a dit que la démonstration précédente était la seule démonstration élémentaire qu'il connaissait avant d'avoir construit les siennes. Elle est facile à suivre et, en ce sens, mérite bien, je crois, le qualificatif d'élémentaire. Mais, si l'on se reporte à la signification donnée au mot géométrie élémentaire par les Grecs et si l'on cherche ce qui caractérise les procédés de cette géométrie, on sera conduit, je pense, à noter en premier lieu l'absence de considérations sur l'infini. Ce n'est pas qu'à y regarder de près, on ne rencontre la notion d'infini à chaque pas puisque les êtres mêmes sur lesquels on raisonne, point, droite, etc..., sont conçus comme résultant d'une suite indéfinie de simplifications faites sur des objets du monde réel; les considérations du troisième livre sur les rapports, ainsi que celles sur les aires et volumes, introduisent bien aussi des passages à la limite, donc des considérations de suite infinie. Pourtant là encore l'infini n'intervient que pour arriver aux notions premières, aux définitions, on évite son emploi dans les raisonnements. A cet égard, la démonstration qui vient d'être donnée n'est pas élémentaire: on y construit la circonférence extrémale à l'aide d'une suite infinie de ses tangentes. L'emploi de l'infini dans les problèmes d'extremum est pour ainsi dire de règle; aucune de ces questions n'est vraiment élémentaire.

Prenons par exemple le problème simple suivant:

de tous les quadrilatères ABCD ayant quatre côtés de longueur donnée a, b, c, d, quel est celui de plus grande aire?

L'aire a pour expression

$$\frac{1}{2} ad \sin A + \frac{1}{2} bc \sin C. \quad (1)$$

Les angles A et C sont liés par la relation

$$a^2 + d^2 - 2ad \cos A = b^2 + c^2 - 2bc \cos C. \quad (2)$$

La méthode des dérivées donne alors

$$\frac{\frac{1}{2}ad \cos A}{2ad \sin A} = \frac{\frac{1}{2}bc \cos C}{-2bc \sin C}$$

d'où

$$tg A + tg C = 0$$

Le maximum de l'aire ne peut donc être atteint que pour un quadrilatère inscriptible. Mais il faudra s'assurer qu'il existe un tel quadrilatère et qu'il donne effectivement le maximum. Ce dernier point conduira au calcul de la dérivée seconde. Faisons-le immédiatement: en considérant C comme fonction de A , la dérivation des relations (2) et (1) donne

$$C' = \frac{ad \sin A}{bc \sin C},$$

$$2S' = ad \cos A + bc \cos C \cdot C'$$

$$= \frac{ad}{\sin C} (\cos A \sin C + \sin A \cos C)$$

$$= ad \frac{\sin (A + C)}{\sin C}.$$

$$2S'' = \frac{ad}{\sin^2 C} [\cos (A + C) \sin C (1 + C') - \sin (A + C) \cos C \cdot C']$$

$$= \frac{ad}{\sin^2 C} \left[\cos (A + C) \sin C - \frac{ad \sin^2 A}{bc \sin C} \right].$$

Donc, pour $A + C = \Pi$, S'' est négatif, ce sera bien un maximum que l'on obtiendra. Quant à l'existence d'un quadrilatère inscrip-

tible de côtés a, b, c, d , elle résultera de l'existence des racines de l'équation

$$a^2 + d^2 - 2ad \cos A = b^2 + c^2 + 2bc \cos A. \quad (3)$$

Les conditions de possibilité s'obtiendront en écrivant que la valeur de $\cos A$ tirée de cette équation n'est pas extérieure à l'intervalle $-1, +1$. On verra facilement que ces conditions sont vérifiées si chacune des quatre longueurs est plus petite que la somme des trois autres, donc dans le cas que nous considérons où, avec les longueurs de ces côtés, on peut construire un quadrilatère.

Les considérations sur l'infini sont tout entières cachées à la fin de l'étude précédente, au moment où nous utilisons, sans le dire explicitement, ce théorème de Weierstrass: une fonction continue d'une ou plusieurs variables considérée dans un domaine borné y atteint sa borne inférieure, sa borne supérieure et toutes les valeurs comprises entre ces deux bornes. C'est seulement grâce à ce théorème que nous avons pu conclure à l'existence du quadrilatère dès que nous avons été assurés que l'équation (3) donne pour $\cos A$ une valeur non extérieure à l'intervalle $-1, +1$. Or ce théorème de Weierstrass se démontre et ne peut être démontré que grâce à la considération de l'infini.

Je rappelle qu'on utilise généralement ce qu'on appelle le théorème de Bolzano-Weierstrass, savoir: tout ensemble infini de points distincts ou confondus et situés dans un domaine borné admet au moins un point-limite. On peut le démontrer ainsi: partageons le domaine en un nombre fini de domaines partiels; l'un d'eux contiendra nécessairement une infinité de points. Partageons de nouveau celui-ci en une infinité de domaines partiels; parmi ces nouveaux domaines, l'un contiendra nécessairement une infinité de points, etc... En prenant convenablement ces subdivisions, on aura une suite infinie de domaines emboîtés les uns dans les autres et tels qu'il n'existe qu'un seul point P intérieur à tous. Il est clair que, dans tout voisinage de P , il y aura une infinité de points distincts ou confondus de l'ensemble primitif. Donc P est l'un de ces points-limites dont il s'agissait de prouver l'existence.

Puisque les raisonnements d'aspect élémentaire sont aussi bien que les autres basés sur la considération de l'infini, utilisons franchement de telles considérations, et reprenons par exemple le problème du quadrilatère.

Considérons une suite infinie de quadrilatères $Q_1, Q_2, \text{etc...}$ ayant les côtés donnés a, b, c, d et dont les aires tendent vers la borne supérieure. Plaçons tous ces quadrilatères de façon, par exemple, qu'ils aient les côtés AB confondus. Nous aurons une infinité de positions distinctes ou confondues de C , d'où au moins un point-limite C_0 pour ces points C . Choisissons dans la famille des quadrilatères Q_1, Q_2, \dots une suite partielle $Q'_1, Q'_2 \dots$ pour lesquels les points C tendent vers C_0 . Les sommets D de ces quadrilatères ont au moins un point-limite D_0 . Prenons enfin une suite $Q''_1, Q''_2 \dots$ tels que C et D tendent vers C_0 et D_0 . Il est clair que le quadrilatère ABC_0D_0 a les côtés donnés et qu'il a pour aire la borne supérieure de l'aire. Ainsi, sans utiliser les dérivées, nous venons de démontrer l'existence d'un quadrilatère extrémal et de prouver que le maximum de l'aire est atteint. Si maintenant nous appliquons au quadrilatère trouvé ABC_0D_0 la méthode des dérivées, il nous suffira de reprendre le commencement du calcul fait précédemment pour être certain que ce quadrilatère extrémal est inscriptible.

Si on nous avait donné n longueurs $a, b, c, d, \dots l$, pour les côtés successifs d'un polygone et qu'on nous ait demandé de rechercher s'il existe un polygone donnant le maximum de l'aire, nous aurions démontré l'existence du polygone extrémal et prouvé que le maximum de l'aire est atteint exactement de la même manière. Sachant alors qu'il existe un polygone extrémal donnant le maximum, prenons quatre des sommets de ce polygone, soient M, N, P, Q . Je dis que $MNPQ$ est inscriptible. En effet s'il ne l'était pas et si $mnpq$ était le quadrilatère inscriptible de mêmes côtés, l'aire de $mnpq$ serait supérieure à celle de $MNPQ$. Transportons les arcs du périmètre du polygone extrémal Π sous-tendus par les diagonales MN, NP, PQ, QM , de manière que leurs extrémités viennent en mn, np, pq, qm . Le nouveau polygone obtenu serait d'aire plus grande que celle de Π et aurait les mêmes côtés; ce qui est absurde. Donc $MNPQ$ est inscriptible. Il est vrai que j'ai admis que le nouveau polygone

formé avait un contour qui ne se recoupait pas lui-même, de sorte que ce que l'on doit appeler son aire apparaît clairement. Mais s'il se recoupait lui-même ou s'il était concave, en effectuant un certain nombre de fois l'opération qui consiste à remplacer deux côtés consécutifs JK , KL par leurs symétriques par rapport à JL , on le rendrait convexe et l'aire de ce polygone convexe serait plus grande que celle de Π . Ainsi le problème consistant à trouver un polygone de côtés donnés et d'aire maximum a une solution sous la seule condition qu'avec les longueurs données on puisse effectivement construire un polygone, et le polygone-solution est inscriptible.

Pour achever l'étude de ce problème, il reste seulement à montrer que le polygone est bien déterminé par ce qui a été trouvé, c'est-à-dire qu'il n'existe qu'un polygone convexe inscriptible ayant les côtés successifs de longueurs a , b , c , ..., l .

Nous déterminerons le rayon du cercle circonscrit à un tel polygone par l'équation

$$\varphi_a + \varphi_b + \dots + \varphi_l = \pi, \quad (4)$$

dans laquelle les φ sont les moitiés des angles sous lesquels les côtés sont vus du centre, ce qui donne des relations telles que

$$2R \sin \varphi_a = a.$$

Il faudra, ou prendre tous les φ aigus (centre à l'intérieur du polygone) ce qui donnera l'équation (4'), ou prendre l'angle sous lequel on voit le plus grand côté obtus et les autres aigus, ce qui donnera l'équation (4''). $2R$ est au moins égal aux plus grandes longueurs données, soit la longueur a . Substituons dans les premiers membres de (4') et (4'') une valeur R que nous ferons croître

de $\frac{a}{2}$ à ∞ . Alors le premier membre de (4') décroît constamment jusqu'à zéro, (4') ne peut donc donner qu'une solution et en donne une si la valeur de départ est au moins égale à π ; cela arrive en particulier si plusieurs longueurs données sont égales

à a , car alors, au départ, plusieurs φ sont égaux à $\frac{\pi}{2}$. Le premier membre de (4'') part de la même valeur que celui de (4'), mais pour $R = \infty$, il atteint la valeur π . Il l'atteint d'ailleurs en décroissant car la dérivée par rapport à R de ce premier membre est $\sum \varphi'_i$, avec $\varphi'_i = -\frac{i}{2R^2 \cos \varphi_i}$. C'est donc $-\frac{1}{2R^2} \sum \frac{i}{\cos \varphi_i}$. Pour $R = \infty$ la somme \sum se réduit à $a+b+\dots+l$, quantité positive, donc la dérivée du premier membre de 4'' est négative. Pour une valeur de R annulant cette dérivée, la dérivée seconde est

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2R^2} \sum \frac{i \sin \varphi_i}{\cos^2 \varphi_i} \varphi'_i &= \frac{1}{4R^4} \sum \frac{i^2 \sin \varphi_i}{\cos^3 \varphi_i} = \frac{1}{8R^5} \sum \frac{i^3}{\cos^3 \varphi_i} \\ &= \frac{1}{8R^5} \left[\left(\frac{a}{\cos \varphi_a} \right)^3 + \left(\frac{b}{\cos \varphi_b} \right)^3 + \dots + \left(\frac{l}{\cos \varphi_l} \right)^3 \right] \\ &= \frac{1}{8R^5} \left\{ - \left[\frac{b}{\cos \varphi_b} + \dots + \frac{l}{\cos \varphi_l} \right]^3 + \right. \\ &\quad \left. \left[\left(\frac{b}{\cos \varphi_b} \right)^3 + \dots + \left(\frac{l}{\cos \varphi_l} \right)^3 \right] \right\} < 0; \end{aligned}$$

le premier membre de (4'') ne peut donc pas avoir de minimum et par suite il a au plus un maximum. Ceci étant, quand on fait varier R de $\frac{a}{2}$ à ∞ , le premier membre de (4'') part, si (4') a donné une solution, d'une valeur au moins égale à π pour finir avec la valeur π et (4'') ne donne pas de solution; si (4') n'a pas donné de solution, le premier membre de (4'') part d'une valeur inférieure à π pour décroître à la fin vers la valeur π , donc dans ce cas (4'') donne une solution et une seule.

Ainsi, si a, b, c, \dots, l , sont les côtés successifs d'un polygone plan, il existe un polygone inscritible de côtés successifs a, b, c, \dots, l et c'est lui qui, de tous les polygones admettant des côtés ayant les mêmes longueurs et dans le même ordre, donne le maximum de l'aire. Le même polygone donnerait d'ailleurs aussi le maximum de l'aire si l'ordre des côtés n'était pas imposé; on obtient

en effet tous les ordres différents par la répétition de la permutation de deux longueurs consécutives. Or, le remplacement des côtés PQ et QR du polygone inscriptible convexe relatif au premier ordre considéré, par exemple, par leurs symétriques relativement à la médiatrice de PR , donne un polygone inscriptible convexe sans modification de l'aire et sans que soit changée la valeur du rayon du cercle circonscrit; ce qui explique que, dans l'équation (4), l'ordre des longueurs données n'intervient pas.

Il est facile de démontrer à partir de là le théorème des isopérimètres: *tout domaine plan \mathcal{D} de périmètre L et non circulaire a une aire A inférieure à l'aire $\frac{L^2}{4\pi}$ du domaine circulaire de même périmètre.*

En effet, on peut inscrire dans le contour de \mathcal{D} un quadrilatère $ABCD$ non inscriptible dans une circonférence. Si, sans changer les longueurs des côtés de $ABCD$, on rendait ce quadrilatère inscriptible, son aire subirait un accroissement, un gain g . Tout polygone plan Π ayant quatre sommets suffisamment voisins de $ABCD$ éprouverait, si on le rendait inscriptible sans changement des côtés, un gain d'aire au moins égal à $\frac{g}{2}$. Choisissons Π comme il suit: prenons d'abord un polygone Π_0 inscrit dans le contour de \mathcal{D} et d'aire supérieure à $A - \frac{g}{2}$; puis modifions Π_0 de manière à satisfaire à ces trois conditions évidemment compatibles:

1° son aire est supérieure à $A - \frac{g}{2}$;

2° ses côtés sont au plus égaux à ceux de Π_0 et ont une partie aliquote commune;

3° le nouveau polygone est un polygone Π .

En partageant, grâce à la partie aliquote commune, les côtés de Π en segments égaux, si n est le nombre total de ces segments,

l'aire de Π est au plus égale à $\frac{1}{2} nR^2 \sin \frac{2\pi}{n}$

$$\text{avec } 2nR \sin \frac{\pi}{n} < L.$$

Donc on a

$$A - \frac{g}{2} \leq n \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} \left(\frac{L}{2n \sin \frac{\pi}{n}} \right)^2 = \frac{L^2}{4n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}} < \frac{L^2}{4\pi},$$

ce qui démontre le théorème.

On vient en somme de compléter certains modes de démonstration du théorème des isopérimètres. On pourrait les compléter tous de façon analogue, sans modifier en réalité leur simplicité, mais en faisant un usage non masqué de considérations sur l'infini.

Comment ces considérations, qui viennent de nous servir pour l'étude des polygones, peuvent-elles être caractérisées? Ce qui frappe, c'est qu'elles donnent, sans recourir aux équations qui proviendraient de la méthode des dérivées, l'existence de l'élément extrémal; c'est seulement ensuite que les équations interviennent pour déterminer l'élément extrémal dont l'existence est déjà acquise. C'est le fait analogue qui caractérise ce qu'on appelle la méthode directe du calcul des variations, aussi j'appellerai *méthode directe tout traitement d'un problème d'extremum dans lequel l'existence de l'élément extrémal sera prouvée tout d'abord, la détermination de cet élément ne venant qu'après*. On voit que ce qualificatif direct se justifie parfaitement à un certain point de vue, bien qu'à un autre, comme on l'a dit au début, il ne convient guère.

Il y a des cas où le recours à la méthode directe semble obligatoire. Soit à trouver le maximum de $y = x^2 - 2x + 3$ dans l'intervalle $(-2, +2)$; la dérivée seconde étant toujours positive, ce maximum ne peut être obtenu par la méthode des dérivées; mais la méthode directe — qui se réduit ici à la démonstration du théorème de Weierstrass — montre cependant l'existence de l'élément extrémal. Celui-ci ne pouvant être obtenu par la méthode des dérivées est nécessairement l'une des extrémités de l'intervalle; c'est -2 et le maximum est 11.

Soit encore à trouver le minimum de l'aire d'un quadrilatère dont les côtés successifs ont pour longueurs a, b, c, d , telles,

naturellement, que de pareils quadrilatères existent. Les calculs de dérivation que nous avons faits montrent que l'élément extrémal ne peut être obtenu par ces calculs et cependant les considérations qui nous ont servi pour l'étude du maximum de l'aire nous donneraient encore une figure ABC_0D_0 limite de quadrilatères ayant les côtés voulus et dont les aires tendent vers la borne inférieure des aires. Puisque le calcul des dérivées ne peut être appliqué à cette figure ABC_0D_0 , c'est que l'angle A par exemple ne peut varier dans les deux sens, en croissant et en décroissant, à partir de la valeur qu'il a dans ABC_0D_0 . Ceci exige donc que, pour l'une de ces variations, la figure cesse d'appartenir à la famille de nos quadrilatères; en d'autres termes deux côtés de ABC_0D_0 doivent se recouvrir partiellement. L'élément extrémal ABC_0D_0 est donc à la frontière, peut-on dire, de la famille de quadrilatères considérés et ce n'est plus un véritable quadrilatère; l'aire qu'on est conduit à attribuer à ABC_0D_0 est celle d'un triangle ayant pour côtés deux des longueurs consécutives données et pour troisième côté la différence des deux autres longueurs.

Les problèmes justiciables de la méthode des dérivées et de son analogue dans le calcul des variations sont dits *réguliers*. Tous les autres sont dits *irréguliers*; ceux-ci sont bien entendu de natures très variées; il arrive que, pour eux, l'élément extrémal n'appartienne plus à la famille d'éléments considérés, mais soit seulement à la frontière de cette famille; c'est déjà ce que nous avons rencontré dans la recherche de la courbe joignant A à B , ayant en A une tangente déterminée, et de longueur minimum.

CHAPITRE III

Sur quelques questions de minimum relatives aux courbes orbiformes et sur leurs rapports avec le Calcul des variations

Pour les problèmes irréguliers, la méthode directe s'impose. On trouvera de tels problèmes dans le mémoire reproduit plus bas, et en particulier la démonstration de ce théorème : *de toutes les orbiformes de même longueur, c'est l'orbiforme équilatérale qui a la plus petite aire*. J'avais énoncé ce théorème, sans le démontrer, à la séance du 1^{er} avril 1914 de la Société Mathématique de France (voir *Comptes rendus*, année 1914, page 45); je l'avais démontré à la séance du 24 juin 1914 et c'est le résumé de cette démonstration qui constituait la fin de l'article précédemment reproduit¹⁾. Ces publications ne parurent que pendant la guerre et ne purent pénétrer en Allemagne que vers 1919; aussi c'est tout à fait indépendamment que M. Blaschke s'était posé pendant la guerre cette même question de minimum et qu'il avait obtenu le même résultat, lequel a été quelquefois appelé théorème de M. Blaschke²⁾.

Dans l'article « Théorème sur les courbes et les surfaces fermées », paru en 1914 dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, M. R. Bricard traitait la question suivante : « Quel est le plus petit rayon R que l'on puisse choisir tel que tout ensemble, formé de points d'un plan dont les distances mutuelles soient au plus égales à un nombre donné D , puisse être enfermé dans une circonférence de rayon R ». En d'autres termes, supposons que, dans un morceau de carton, par exemple, nous découpons un cercle, quel rayon faudra-t-il donner à ce cercle pour qu'avec le « couvercle », ainsi obtenu, nous puissions recouvrir tous les ensembles considérés, que l'on appelle les ensembles de largeur D .

1) Pages 233 à 236.

2) Le texte qui suit est paru sous le titre : Sur quelques questions de minimum relatives aux courbes orbiformes et sur leurs rapports avec le calcul des variations dans le *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 8^e série, t. IV, 1921, pp. 271-300.

Cette question ainsi que son analogue relative à l'espace est résolue très simplement par M. Bricard; elle avait été traitée antérieurement par M. H. Jung dans deux articles du *Journal de Crelle*, Bd 129 et 137. Elle a fait depuis l'objet d'une courte Note de M. J. Pál (*Nouvelles Annales*, 1915).

L'article de M. Bricard appela mon attention sur la question, qui me fournit la matière de la communication, sorte de petite conférence, que je fis à la Société mathématique, le 1^{er} avril 1914, à l'occasion de la réunion à Paris de la Conférence internationale de l'Enseignement mathématique¹⁾. La rédaction de cette conférence, faite à l'époque, constitue les douze premiers numéros de ce Mémoire²⁾; ce qui explique le mode d'exposition de certains paragraphes. J'y ai ajouté le développement d'une autre communication faite peu après à la Société mathématique³⁾. J'avais d'abord eu l'intention de réunir ces remarques avec d'autres analogues concernant des questions qui présentent ce caractère commun de relever du Calcul des variations et de n'appartenir cependant pas aux types de problèmes étudiés dans ce calcul; celles que je considère ici suffiront pour faire comprendre de quels problèmes il s'agit. Les méthodes classiques, convenablement modifiées, s'y appliquent beaucoup plus souvent qu'on ne serait tenté de le croire⁴⁾; c'est un point qui ne ressortira pas de ce Mémoire où je traite les questions surtout par des procédés de géométrie élémentaire, mais que je tiens à indiquer pour que le lecteur ne croie pas que l'analyse classique le laisse complètement désarmé en face des problèmes que je vais indiquer.

Revenons au problème de M. Bricard et considérons un ensemble E de largeur D ; le plus petit couvercle qui lui convienne a un rayon $R(E)$, fonction de l'ensemble E . C'est le maximum de $R(E)$ qu'il faut chercher; et il suffit évidemment de considérer le cas où l'ensemble E est une courbe convexe C de largeur D . Nous avons donc à rechercher le maximum d'une fonction de ligne, $R(C)$, d'une fonctionnelle comme on dit maintenant.

1) *Comptes rendus des séances de la Société Mathématique de France*, année 1914, pp. 249-250.

2) C'est-à-dire, l'article reproduit ici, pp. 246-276.

3) C'est la fin de la communication reproduite ici pages 233 à 236.

4) Ceci deviendra plus fréquent encore quand on utilisera les résultats du travail fondamental de M. TONELLI: Sur une méthode directe du Calcul des variations (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. XXXIX).

Seulement, cette fonctionnelle ne s'exprime pas à l'aide d'une intégrale comme celles auxquelles on se borne dans le Calcul des variations,

$$J = \int f[x, y(x), y'(x)] dx,$$

par exemple. Quelle que soit l'importance des fonctionnelles du type J , on voit que des questions très simples conduisent à en considérer d'autres.

Après les fonctionnelles du type J , celles qui se présentent de suite à l'esprit sont celles qu'on obtiendrait en prenant une fonction ordinaire composée à l'aide d'intégrales J ; un produit ou un quotient d'intégrales, par exemple. Je ne crois pas que les problèmes de ce type aient été encore abordés, bien que M. Fréchet ¹⁾ se soit occupé avec succès de la différentiation des fonctionnelles les plus générales. La méthode que j'indique pour traiter le problème des isopérimètres, traduite analytiquement, apparaît comme la recherche du minimum d'une expression $\frac{J^2}{J_1}$; elle

s'appliquerait aussi à la recherche du minimum d'autres expressions, très particulières à la vérité, formées à l'aide d'intégrales.

Dans le problème de M. Bricard, la fonction $R(C)$ dont on a à chercher le maximum ne s'exprime d'aucune manière à l'aide d'intégrales J ; je montre qu'elle n'est cependant pas nouvelle. Si, en effet, $p(\varphi)$ est la distance de l'origine à la tangente à C de direction φ , $R(C) - \frac{D}{2}$ est la meilleure approximation, au sens de Tchebycheff, de $p(\varphi)$ par une expression

$$A \cos \varphi + B \sin \varphi + D.$$

Et la recherche du maximum de $R(C)$ est celle de la limite supérieure de la meilleure approximation pour la classe des fonctions $p(\varphi)$ considérées. Il s'agit donc d'une question analogue à celles qui ont fait récemment l'objet des études de MM. Dunham Jackson, Serge Bernstein, de la Vallée Poussin.

¹⁾ Sur la notion de différentielle d'une fonction de lignes (*Trans. of the Am. Math. Sc.*, 1914).

Seulement, nous avons à calculer ici une limite exacte de l'approximation et non pas seulement l'ordre de grandeur de cette approximation; cette question d'approximation conduit donc à rechercher le minimum d'une fonctionnelle qui n'est pas une intégrale J^1).

Dans la recherche de ce maximum, on peut se borner à la considération de certaines courbes convexes C , déjà rencontrées par Euler, qui jouissent de la propriété curieuse d'avoir la même largeur dans toute direction, c'est-à-dire que chacune de leurs normales est normale double.

Ces orbiformes, comme on les appelle, ont toutes la même longueur que la circonférence de même largeur. Les orbiformes de largeur D ayant toutes la même longueur πD , on est naturellement conduit à comparer les aires de ces orbiformes; c'est, on le sait à l'avance, l'orbiforme circulaire qui a l'aire maximum; mais quelle est l'orbiforme d'aire minimum? Cette fois nous avons à rechercher le minimum d'une fonctionnelle de la forme J ; mais, tandis qu'il s'agit d'une intégrale dont le calcul des variations classique nous fournirait le maximum, c'est du minimum dont nous nous occupons. On est donc certain à l'avance que ce minimum sera obtenu pour une fonction frontière du champ fonctionnel envisagé; mais cette remarque est très insuffisante.

Quand il s'agit d'une fonction de points, de $f(x, y, z)$, par exemple, savoir que le minimum est obtenu sur la frontière du domaine, c'est savoir que le problème est d'un degré moins difficile puisqu'on se trouve ramené à la recherche du minimum d'une fonction $\varphi(u, v)$ des deux variables définissant un point de la surface frontière.

Quand il s'agit d'une fonctionnelle $J(C)$, définie dans les champs que l'on considère ordinairement et auxquels s'applique l'analyse classique, on a un résultat de même nature; car le calcul de la variation de J montre que C ne peut être extrémale que si, sur chacun de ses arcs, si petit qu'il soit, on aperçoit que c'est une courbe frontière. Par exemple, si le champ fonctionnel

¹) Comparer avec les questions d'approximation traitées dans mon article: Sur la représentation trigonométrique approchée des fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz (*Bull. de la Soc. math. de France*, 1910).

est défini par

$$f(x, y, y', y'') \geq 0,$$

on devra avoir en tout point

$$f(x, y, y', y'') = 0;$$

et y est à choisir dans une famille de fonctions dépendant de constantes arbitraires; nous avons affaire à un problème de minimum d'une fonction de plusieurs variables.

Dans le cas actuel on a encore cette propriété que la courbe extrémale C est frontière du champ fonctionnel, en chaque point si je puis dire ¹⁾. Et le minimum s'en déduit facilement; il est donné par l'orbiforme équilatérale, c'est-à-dire par la courbe formée par les trois arcs de circonférences décrits des trois sommets d'un triangle équilatéral comme centres, chacun d'eux étant sous-tendu par le côté opposé à son centre.

On voit que la géométrie conduit tout naturellement à la recherche de maximum et minimum qui sont obtenus pour les courbes ou fonctions qui sont, en tout point, à la frontière du domaine fonctionnel considéré.

Sans sortir de l'ordre de questions considérées ici, voici deux problèmes du même genre. Quelle est, parmi toutes les orbiformes de largeur D qui admettent un couvercle circulaire de rayon ρ , celle qui a la plus petite aire? La solution du problème de M. Bricard montre qu'il faut supposer ρ compris entre

$\frac{D}{2}$ et $\frac{D}{\sqrt{3}}$; la solution est alors donnée par l'orbiforme construite

de la façon suivante: Prenons trois points A, O, A' en ligne droite, $AO = D - \rho$, $OA' = \rho$, $AA' = D$ et, de A' comme centre, décrivons un arc de cercle AB qui sera tel que $OB = OA'$,

vu de O sous un angle φ inférieur à $\frac{\pi}{3}$. Puis, de O comme centre,

traçons deux arcs de cercle aA, Bb , vus de O sous l'angle $\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{3} - \varphi \right)$. La courbe $aABb$ formée de trois arcs de cercle est le

¹⁾ C'est là une propriété que l'on pourrait obtenir grâce à des modifications assez profondes de l'analyse classique et que je démontrerai ici par des artifices géométriques. Je compte revenir ailleurs sur ce point.

sixième de l'orbiforme cherchée, laquelle admet Oa et Ob pour axes de symétrie ¹⁾).

Guidé par ce qui suit, on démontrera facilement ce résultat; voici une autre question dont, au contraire, j'ignore la solution. On peut la formuler comme il suit. Dans le problème de M. Bricard, on se demande quel est le plus petit couvercle, parmi ceux qui conviennent à la fois à tous les ensembles de largeur D , et qui sont de forme donnée: la forme circulaire. Plus généralement demandons-nous quel est, de tous les couvercles de forme arbitraire qui conviennent pour tous les ensembles de largeur D , celui de plus petite aire ou de plus petit périmètre ²⁾).

1. Considérons un ensemble E de points; si P et Q sont deux points de E , l'ensemble des distances PQ a une borne supérieure: cette borne s'appelle *l'élongation* ou le *diamètre* de l'ensemble E . Quand ce diamètre est fini, E est dit borné.

Nous nous proposons de trouver la plus petite valeur de R , telle que tout ensemble plan de diamètre D puisse être enfermé dans une circonférence de rayon R . On entend par là que tous les points de E doivent être, soit à l'intérieur de cette circonférence, soit sur elle.

Pour éviter des précautions de langage, sans cela nécessaires, nous supposerons que E est fermé, c'est-à-dire tel que tout point limite de points de E appartienne aussi à E . Si l'ensemble donné E n'était pas fermé, en lui ajoutant ses points limites, on aurait un ensemble fermé de même diamètre que E .

Si l'on considère un nombre $f(P)$ fonction de la position d'un point P d'un ensemble fermé E , la continuité de cette fonction se définit comme pour le cas où E est un segment fini de droite ou un domaine borné du plan ou de l'espace. On démontre, comme dans le cas classique, qu'une fonction continue des points d'un ensemble fermé borné atteint sa limite supérieure et sa limite inférieure.

¹⁾ Dans une lettre qu'il m'écrivait peu de temps avant sa mort prématurée, le regretté T. Bonnessen m'a signalé que cet énoncé était inexact; il ajoutait ne pas savoir comment le corriger. Il m'a fait aussi des objections, parfaitement fondées, sur le paragraphe 15, dont j'ai ici modifié entièrement la rédaction.

²⁾ Sur cette question, on pourra consulter un article de M. Julius PAL: Ueber ein elementares Variationsproblem (*Det Kgl. Danske Vidensk. Selskab-Mat. fys.*, t. III, 2; 1920). Dans une très courte Note (*Actes de la Société helvétique des Sciences naturelles*, t. II, 1914), M. le D^r KOLLROS traite aussi d'un problème en rapport avec les questions étudiées ici.

Soient E un ensemble plan, fermé et borné, A un point de son plan, P un point quelconque de E . La distance AP est une fonction continue du point P de E , elle atteint sa limite supérieure $\rho(A)$ pour une position P_0 de P . Soit B un autre point du plan, on a évidemment $\rho(B) \geq BP_0$, donc

$$\rho(A) - \rho(B) \leq |AP_0 - BP_0| \leq AB.$$

Puisque A et B sont deux points quelconques du plan, nous pouvons conclure

$$|\rho(A) - \rho(B)| \leq AB,$$

et la fonction $\rho(A)$ est continue. D'ailleurs, quand A s'éloigne à l'infini, $\rho(A)$ grandit indéfiniment, donc la fonction $\rho(A)$ atteint sa limite inférieure ρ pour une position au moins de A .

Cette limite inférieure ne peut d'ailleurs pas être atteinte pour deux positions de A ; si, en effet, elle était atteinte pour les positions A_1 et A_2 , E serait enfermé dans la partie commune aux deux cercles égaux de rayon ρ et de centres A_1 et A_2 , donc dans le cercle décrit sur la corde commune à ces deux cercles comme diamètres. Or, ce dernier cercle serait de rayon plus petit que ρ , ce qui est impossible.

Donc, *parmi toutes les circonférences qui entourent un ensemble donné E , il y en a toujours une qui a un rayon plus petit que toutes les autres.* Nous l'appellerons circonférence circonscrite à E .

2. Relativement à cette circonférence circonscrite, je démontrerai, avec M. Bricard, le théorème suivant:

Pour qu'une circonférence C , enfermant un ensemble fermé E , soit la circonférence circonscrite, il faut et il suffit que les points communs à E et à C n'appartiennent pas tous à un même arc de cercle C' plus petit qu'une demi-circonférence.

La condition est suffisante: Si elle est remplie, en effet, toute autre circonférence Γ , contenant E , doit contenir un arc C' au moins égal à la moitié de C ; donc Γ a un rayon plus grand que C .

La condition est nécessaire: Supposons, en effet, que tous les points communs à C et à E soient sur un arc $\alpha\beta\gamma$ de C , inférieur à la moitié de C , et soit $\alpha'\beta'\gamma'$ un arc de C , supérieur à la moitié

de C , et n'ayant aucun point commun avec $\alpha\beta\gamma$. Faisons passer par α' et γ' un cercle C' voisin de C et de rayon un peu inférieur. Les seuls points du plan qui soient intérieurs à C sans être intérieurs à C' sont des points voisins de $\alpha'\beta'\gamma'$. Comme il n'y a pas de points de E voisins de $\alpha'\beta'\gamma'$, si C' est très peu différent de C , C' contient E et C n'est pas la circonférence circonscrite à E .

3. La proposition de M. Bricard étant obtenue, la recherche du nombre R est presque achevée. Pour un ensemble E de diamètre D , la circonférence circonscrite C , de rayon ρ , doit avoir en commun avec D des points n'appartenant pas tous à la même moitié de C . Soient α et β deux points communs à E et C , soient α' , β' les points de C diamétralement opposés à α et β . Si α' ou β' appartient à E , alors $2\rho = D$. S'il n'en est pas ainsi, ou bien il y a sur l'arc $\alpha'\beta'$ au moins un point γ de E et un tel point forme avec α et β un triangle acutangle, ou bien il y a des points de E à la fois sur $\alpha\beta'$ et sur $\alpha'\beta$.

Dans ce dernier cas, soient λ le dernier de ces points rencontré en allant de α vers β' et μ le dernier rencontré en allant de β vers α' . L'arc $\lambda\beta'\alpha'\mu$ est inférieur ou au plus égal à une demi-circonférence, car il ne contient pas de points de E . Donc, ou $\lambda\mu = 2\rho = D$, ou le triangle $\lambda\mu\alpha$ est acutangle. Si donc on n'a pas $2\rho = D$, on est certain de trouver un triangle acutangle $\alpha\beta\gamma$, ou $\alpha\lambda\mu$, formé de points de E et inscrit dans C ¹⁾. Un tel triangle, s'il n'est pas équilatéral, a un de ses côtés au moins supérieur au côté du triangle équilatéral inscrit; donc on a alors

$$D \geq \rho \sqrt{3}.$$

Dans tous les cas on a donc

$$\rho \leq \frac{D}{\sqrt{3}}.$$

¹⁾ Je n'ai pas voulu admettre sans démonstration que si l'on a un ensemble de points d'une circonférence, fermé et qui peut être enfermé dans une demi-circonférence, il y a trois points de cet ensemble qui forment un triangle acutangle ou deux points qui sont diamétralement opposés, parce que le fait analogue pour l'espace ne me paraît nullement évident. Aussi, pour le cas de l'espace, le raisonnement de M. Bricard aurait besoin, il me semble, d'être complété.

Par suite on a

$$R = \frac{D}{\sqrt{3}},$$

cette valeur minimum étant d'ailleurs atteinte, par exemple, pour le cas où E est un triangle équilatéral de côté D .

4. Les définitions et les raisonnements des nos 1 et 2 s'appliquent de suite, moyennant des modifications de mots évidentes, au cas des ensembles de l'espace ordinaire. Si l'on appelle « ensemble de l'espace à n dimensions » les ensembles de systèmes de n nombres x_1, x_2, \dots, x_n , ces définitions et raisonnements s'appliquent encore facilement. Il faudra naturellement y remplacer la considération des circonférences par celle des hypercirconférences qui sont les variétés à $n-1$ dimensions définies par des équations de la forme

$$(X_1 - x_1)^2 + (X_2 - x_2)^2 + \dots + (X_n - x_n)^2 = R^2$$

dans lesquelles les X sont les coordonnées courantes, les x les coordonnées du centre; le premier membre est le carré de la distance des deux points X, x ; le second membre est le carré du rayon.

Une telle variété est la frontière du domaine correspondant au cercle; ce domaine, un hypercercle, est donc défini par l'inégalité

$$(X_1 - x_1)^2 + (X_2 - x_2)^2 + \dots + (X_n - x_n)^2 \leq R^2.$$

Les théorèmes des nos 1 et 2 étant acquis pour le cas général, pour achever la détermination du rayon R_n des plus petits hypercercles égaux dans lesquels on puisse enfermer tous les ensembles de diamètre D de l'espace à n dimensions, il va falloir imiter le raisonnement du n° 3. Le triangle équilatéral ou régulier sera remplacé par l'hypertriangle régulier, c'est-à-dire, si l'on veut, la figure formée par $n-1$ points situés deux à deux à la distance D . Si l'on désigne par h_n la hauteur d'un hypertriangle régulier et ρ_n le rayon de l'hypercirconférence circonscrite, on voit facilement que l'on a

$$\rho_n = \frac{n}{n+1} h_n, \quad \rho_{n-1}^{-2} + h_n^2 = D^2$$

d'où puisque

$$\rho_2^2 = \frac{D^2}{3} = \frac{2^2}{3^2} \left[1 - \frac{1^2}{2^2} \right] D^2 = \frac{2^2 - 1^2}{3^2} D^2$$

$$\rho_3^2 = \frac{3^2}{4^2} \left[1 - \frac{2^2}{3^2} \left[1 - \frac{1^2}{2^2} \right] \right] D^2 = \frac{3^2 - 2^2 + 1^2}{4^2} D^2$$

$$\rho_4^2 = \frac{4^2}{5^2} \left[1 - \frac{3^2}{4^2} \left[1 - \frac{2^2}{3^2} \left[1 - \frac{1^2}{2^2} \right] \right] \right] D^2 = \frac{4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2}{5^2} D^2.$$

La sommation donne finalement

$$\rho_n^2 = \frac{n}{2(n+1)} D^2.$$

L'hypertriangle régulier étant un ensemble de largeur D , on a

$$R_n \geq \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}} D.$$

Je vais démontrer que, pour n quelconque comme pour $n = 2$, c'est le signe $=$ qui convient. Pour cela, il suffira de prouver, ce qui a été fait au n° 3 pour $n = 2$, que si l'on a sur une hypercirconférence un ensemble fermé de points qui ne peut être enfermé dans une moitié de cette hypercirconférence, il y a deux de ces points dont la distance est égale ou supérieure au côté de l'hypertriangle régulier inscrit. Le raisonnement est un raisonnement de proche en proche, il suffira d'indiquer comment on passe de $n = 2$ à $n = 3$.

Remarquons d'abord que, si l'on a sur une sphère un ensemble fermé E de points, les théorèmes des nos 1 et 2 s'appliquent à la recherche de la plus petite calotte sphérique contenant E .

Ceci étant, soit, sur une sphère S de rayon ρ , un ensemble fermé e de points, ensemble qui ne peut être tout entier enfermé dans une moitié de la sphère S . Soient a, b deux points de e

dont la distance d ait la valeur la plus grande possible; on a évidemment $\rho\sqrt{2} \leq d \leq 2\rho$. Le petit cercle de S , qui passe par b et qui admet a pour pôle, a un rayon égal à

$$\frac{d \sqrt{4\rho^2 - d^2}}{2\rho}.$$

Ce petit cercle partage S en deux zones, dont l'une Z , la plus grande, contient e , l'autre ne contenant aucun point de e . Soit γ la frontière de la plus petite zone contenant e , laquelle, étant contenue dans Z et contenant une demi sphère, a un rayon au moins égal à

$$\frac{d \sqrt{4\rho^2 - d^2}}{2\rho}.$$

Sur γ , d'après 3, il y a deux points de e qui sont distants au moins de

$$\frac{d \sqrt{4\rho^2 - d^2}}{2\rho} \sqrt{3}$$

et l'on doit avoir

$$\frac{d \sqrt{4\rho^2 - d^2}}{2\rho} \sqrt{3} \leq d,$$

d'où

$$\sqrt{\frac{8}{3}} \rho \leq d.$$

Finalement on a donc

$$\sqrt{\frac{8}{3}} \rho \leq d \leq 2\rho,$$

les limites extrêmes étant atteintes dans le cas où des points de e sont sommets d'un tétraèdre régulier et dans le cas où des points de e sont diamétralement opposés.

Finalement il est ainsi prouvé que

$$R_3 = \sqrt{\frac{3}{8}} D.$$

Le passage de n à $n+1$ se fait exactement de même, l'inégalité précédente devient

$$\frac{d \sqrt{4\rho^2 - d^2}}{2\rho} \sqrt{\frac{2(n+1)}{n}} \leq d,$$

d'où

$$4\rho^2 [2(n+1) - n] \leq 2(n+1) d^2,$$

$$\rho \leq \sqrt{\frac{n+1}{2(n+2)}} d.$$

5. Nous bornant au cas des ensembles plans, nous allons traiter la même question d'une façon moins simple et moins rapide, mais qui nous montrera le lien intime qui lie le problème posé à celui de la meilleure approximation avec laquelle on peut représenter une fonction continue par une série limitée de Fourier, problème considéré d'abord par Tchebycheff.

Notre point de départ sera une utilisation plus systématique de cette remarque: il n'y a pas besoin de considérer le cas de tous les ensembles de diamètre D , on peut se borner à certains d'entre eux. Ceci nous a déjà permis de ne considérer que les ensembles fermés.

Nous dirons qu'un ensemble E de diamètre D est *complet* s'il est impossible de lui adjoindre des points tout en lui laissant le même diamètre D . Nous allons démontrer que *tout ensemble de diamètre D fait partie d'un ensemble complet de diamètre D .*

Soit E un ensemble fermé de diamètre D ; s'il n'est pas complet, nous pouvons, sans modifier son diamètre, lui ajouter des points. Soient A l'un deux, B le point de E le plus voisin de A , ou l'un des plus voisins. Soient C_1 et C_2 les points de rencontre des cercles de rayon D décrits de A et B comme centres. Soient enfin AMB , ANB les arcs de cercle de rayon D décrits de C_1 et C_2 comme centres. Tous les points compris entre AMB et ANB peuvent être ajoutés à E sans changer le diamètre D de l'ensemble. Certains de ces points font peut-être déjà partie de l'ensemble E , mais les points du segment AB n'en font pas partie et comme E est fermé nous voyons que si d'un point de AB comme centre, on décrit un cercle assez petit,

tous les points de ce cercle, dont aucun ne faisait partie de E , peuvent être ajoutés à E .

Ceci étant, soit E un ensemble de diamètre D ; je lui ajoute ses points limites. Si l'ensemble obtenu e n'est pas complet, je lui ajoute le plus grand cercle λ ¹⁾ qu'il soit possible de lui ajouter sans augmenter son diamètre; s'il y a plusieurs tels cercles, j'ajoute l'un quelconque choisi d'après une loi que chacun prendra à sa volonté et qu'il serait puéril de préciser une fois pour toutes.

Si l'ensemble $e + \lambda$ ainsi obtenu n'est pas complet, je lui ajoute le plus grand cercle possible λ_1 , etc.

Si l'on est arrêté au bout d'un nombre fini d'opérations, le théorème est démontré pour l'ensemble E considéré; sinon, je dis que l'ensemble fermé obtenu en ajoutant à $e + \lambda + \lambda_1 + \dots$ ses points limites, qui est évidemment de diamètre D , est complet. En effet, s'il ne l'était pas, on pourrait lui ajouter les points d'un cercle A et $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ devraient être tous au moins aussi grands que A . Or cela est impossible, car ils sont sans points communs deux à deux et tous intérieurs à une circonférence de rayon D décrite d'un point quelconque de E comme centre.

6. Ainsi, pour trouver le maximum du rayon de la circonférence circonscrite aux ensembles de largeur D , nous pouvons nous borner à la considération des ensembles complets de largeur D . Etudions ces ensembles.

La distance d'un point quelconque M à un point C d'un segment AB étant plus petite que la plus grande des deux distances MA, MB , si deux points A et B font partie d'un ensemble complet, tous les points du segment AB en font aussi partie. Donc les ensembles complets sont des domaines convexes, c'est-à-dire l'ensemble des points d'un contour convexe et des points intérieurs à un tel contour. Un contour convexe qui limite un domaine constituant un ensemble complet, s'appelle une *courbe orbiforme*.

Soit A un point d'une orbiforme Γ . Γ est tout entière à l'intérieur de la circonférence de rayon D et de centre A . Je dis

1) Il peut y avoir des points frontière de λ qui appartiennent à e , mais aucun point intérieur à λ ne doit appartenir à e . J'ometts la preuve du fait que les rayons des cercles qu'on peut ajouter à e atteignent leur limite supérieure.

que cette circonférence a un point commun au moins avec Γ ; sans quoi, en effet, la plus grande distance de A aux points de Γ serait inférieure à D , soit $D-\varepsilon$. En ajoutant au domaine Δ limité par Γ les points du cercle de rayon ε et de centre A , et certains de ces points sont extérieurs à Δ , on aurait encore un ensemble de largeur D ; donc Δ ne formerait pas un ensemble complet, Γ ne serait pas une orbiforme.

Ainsi la circonférence de rayon D et de centre A touche l'orbiforme en un point B , la circonférence égale de centre B passe par A . Ces deux circonférences se coupent en C_1 , C_2 et Γ est dans le fuseau limité par les arcs C_1AC_2 , C_2BC_1 .

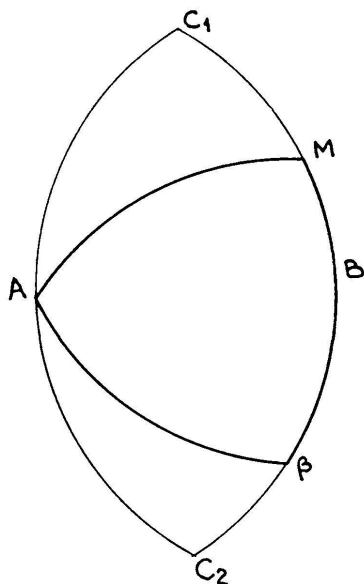


Fig. 7

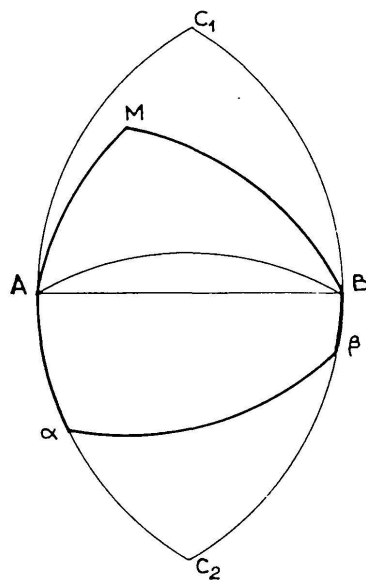


Fig. 8

Soit M un autre point de Γ ; supposons-le situé dans le triangle curviligne ABC_1 . M ne peut être entre la corde AB et l'arc AB de centre C_2 , car tous les points de cette région, étant distants de moins de D de tous les points du fuseau, sont intérieurs à Γ . Il résulte de là que la circonférence de rayon D décrite de M coupe l'arc AC_2 en un point α et l'arc BC_2 en un point β . Γ est tout entière dans le triangle curviligne $C_1\alpha\beta$, $\alpha\beta$ contient d'ailleurs des points de Γ , car M est distant de moins de D de tous les points intérieurs au triangle $C_1\alpha\beta$ et des points des côtés $C_1A\alpha$, $C_1B\beta$ (α et β exclus).

Traçons les arcs de rayon D et de centres α et β joignant respectivement BM et AM . Nous obtenons un pentagone Π limité par les arcs AM , MB , $B\beta$, $B\alpha$, αA .

Si l'arc $\alpha\beta$ fait tout entier partie de Γ , Γ ne peut pas avoir de points extérieurs à Π ; d'ailleurs, Π étant évidemment une courbe orbiforme, Γ ne diffère pas de Π . Si certains points de $\alpha\beta$ ne font pas partie de Γ , l'ensemble complet limité par Γ pourra, au voisinage de M , sortir de Π ; mais, en ce voisinage, il contiendra tous les points de Π et tous les points intérieurs à Π .

Pour énoncer les résultats obtenus, rappelons que l'on appelle *tangente* (ou droite d'appui) d'un contour convexe en un point P toute droite passant par P et ne passant par aucun point intérieur au contour. Une perpendiculaire en P à une tangente en P est une *normale* en P .

Les tangentes en A et B aux arcs C_1AC_2 , C_1BC_2 sont des tangentes à Γ ; AB est donc une normale double à Γ et sa longueur est D . Les tangentes à Γ en M sont tout ou partie des tangentes à Π en M , de même pour les normales. C'est dire que les normales en M à Γ rencontrent toutes l'arc $\alpha\beta$. Donc aucune ne passera par A , à moins que α ne soit en A , donc que M soit sur BC_1 . Dans ce cas particulier, Π devient un triangle curviligne Π_1 constitué par trois arcs égaux de rayon D , décrits respectivement des trois sommets, A , M , β d'un triangle équilatéral pour centres, et sous tendus par les côtés de ce triangle. Γ se réduit à Π_1 si tous les points de $A\beta$ font partie de Γ . Si tous n'en font pas partie, Γ diffère de Π_1 ; mais, en tout cas, Γ contient l'arc MB puisque les points de MB ne sont pas à une distance supérieure à D d'aucun des points du triangle $C_1A\beta$.

En résumé, si, de A , on abaisse une normale AB de pied B , $AB = D$ et AB est aussi normale en A : *Toute normale à une orbiforme est normale double, la distance des deux points d'incidence est la largeur de la courbe.*

De A on peut toujours abaisser une telle normale puisque la ou les normales en A répondent à la question. Si l'on a deux normales AB et AM , toutes les droites intermédiaires sont aussi normales et l'orbiforme se réduit, entre B et M , à un arc de cercle de centre A .

A une courbe convexe quelconque on peut toujours mener une tangente dirigée unique; pour une orbiforme on peut dire, de plus, qu'elle a un seul point de contact. Si, en effet, elle touchait la courbe en A et B , les normales AA' et BB' , de lon-

gueur D , feraient connaître deux points A' et B' de l'orbiforme. Ce qui est absurde, car AB' est plus grand que D . *Les tangentes et normales à une orbiforme sont donc déterminées par leur inclinaison et varient de façon continue avec elle.*

7. Considérons une orbiforme Γ analytique, ou à laquelle du moins s'applique la théorie des développées. En chaque point de Γ , le rayon de courbure compté vers l'intérieur de Γ sera compris entre zéro et D , les valeurs extrêmes pouvant être atteintes. La développée Δ de Γ sera une courbe à distance finie, à laquelle, parallèlement à chaque droite, on ne pourra mener qu'une tangente. En d'autres termes, les tangentes à Δ de directions α et $\alpha + \pi$ seront confondues, quel que soit α . Δ sera donc une courbe ayant un nombre impair de points de rebroussements, trois au moins ¹⁾).

Prenons, par exemple, pour Δ , une hypocycloïde à trois rebroussements; et soit Γ une de ses développantes. Soient ω un point décrivant Δ , ωt la tangente en ω affectée d'un sens variant de façon continue avec ω . Quand ω a parcouru tout Δ , ωt ne revient pas à sa position primitive, mais dans le prolongement de cette position primitive, le sens étant différent.

Quant au point M de ωt qui décrit Γ , il vient, après cette révolution, dans une position M_1 ; un calcul immédiat montre que M et M_1 sont symétriques par rapport au point de ωt qui décrit celle des développantes de Δ qui est une hypocycloïde.

Quand ω a décrit deux fois Δ , ωt revient exactement à sa position primitive et Γ se ferme. Γ a donc pour normale double toute tangente à Δ , c'est une courbe parallèle à elle-même; c'est une courbe doublement parallèle à l'hypocycloïde dont Δ est la développée. Si donc Γ est convexe, Γ est une orbiforme.

On comprend ainsi qu'Euler ait été conduit à la notion de courbe orbiforme par l'étude des développantes des courbes triangulaires, c'est-à-dire des courbes, analogues à l'hypocycloïde à trois rebroussements, formées par trois arcs de courbes convexes raccordés par des points de rebroussement de première espèce.

¹⁾ J'ometts les démonstrations rigoureuses; les faits énoncés dans les n^{os} 7 et 8 ne seront pas utilisés, ils sont donnés pour familiariser avec la notion d'orbiforme.

L'étude des courbes parallèles aux courbes triangulaires, ou à 5, 7, ... points de rebroussement, y conduirait aussi.

Déformons une courbe triangulaire de façon que les trois arcs qui la composent diffèrent de moins en moins des côtés du triangle des rebroussements et prenons chaque fois la plus petite développante orbiforme; si le triangle des rebroussements est équilatéral, nous obtiendrons à la limite l'orbiforme équilatérale, que nous avons déjà rencontrée et que nous avons désignée par Π_1 . Pour Π_1 , ce qui joue le rôle de la développée, c'est le triangle $AM\beta$. Pour Π , ce serait la figure, limite d'une courbe à cinq rebroussements, formée par les droites $AB, B\alpha, \alpha M, M\beta, \beta A$.

Si l'on imagine que, dans les déformations dont il vient d'être parlé, les longueurs des arcs des courbes développées, triangulaire par exemple, sont conservées, on peut établir une correspondance entre les points ω de ces différentes développées transformées. Et si l'on imagine que, dans la déformation d'une développée A , chaque tangente ωt emporte le segment ωM qui va du point ω de A au point M de sa développante Γ , on établit aussi une correspondance précise entre les diverses développantes. En particulier, dans le cas où A est triangulaire, les différentes développantes triangulaires des A déformées se correspondent. Or, transformons A en un triangle ABC , ce qui est toujours possible, car entre les trois arcs a, b, c , on a évidemment des inégalités telles que $a < b + c$. La développante triangulaire, dans le cas du triangle ABC , est constituée par trois arcs de cercles de centres A, B, C et tangents entre eux. Les points de contact de ces cercles sont les points de contact avec AB, BC, CA , du cercle inscrit dans ABC . De sorte que les points de rebroussements de cette développante partagent les arcs de la développée en morceaux de longueurs connues $p - a, p - b, p - c$.

Ce que je veux faire remarquer surtout, c'est que l'orbiforme équilatérale est la plus petite courbe convexe qui soit parallèle à la courbe triangulaire formée de trois arcs de cercles égaux. De même, Π est la plus petite courbe convexe parallèle à une courbe à cinq rebroussements formée par cinq arcs de cercle de rayons égaux.

8. Ce n'est pas seulement par la géométrie analytique que la notion de courbe orbiforme s'est imposée aux mathématiciens;

si les courbes parallèles aux courbes à 3, 5, ... points d'inflexions et très voisines de ces courbes ont reçu une application mécanique, car ce sont les formes de rails qu'on peut adopter pour qu'en parcourant la voie ainsi construite, une locomotive se trouve retournée bout pour bout¹⁾, les courbes convexes parallèles à ces courbes-là sont aussi utiles industriellement.

Pour transformer un mouvement circulaire en mouvement rectiligne, on emploie quelquefois une came agissant sur une pièce P , dont le mouvement rectiligne est guidé par l'un ou l'autre des deux bords parallèles d'une entaille faite dans P , entaille entre les bords de laquelle la came peut tourner. On voit de suite que, si l'on veut que le mouvement puisse avoir lieu dans les deux sens, auquel cas la came doit toucher constamment les deux bords de l'entaille et si le mouvement de la came doit être révolutif complet, il faut que cette came soit limitée par une orbiforme.

C'est surtout à l'occasion de probabilités géométriques que les orbiformes ont été étudiées. La plus simple des questions de probabilités géométriques est celle de l'aiguille de Buffon: *On jette au hasard une aiguille sur un plancher, quelle est la probabilité pour qu'elle rencontre une raie du plancher?* Convenons d'attribuer à un coup le poids n si l'aiguille rencontre n fois les raies du plancher, soit parce que l'aiguille est très longue par rapport à la largeur des lames du parquet, soit parce que l'aiguille est courbe. Dans tous les cas on peut partager l'aiguille en éléments de même longueur assez petite pour que chaque élément puisse être regardé comme rectiligne et soit moindre que l'écartement des raies du plancher. La probabilité pour qu'un élément déterminé rencontre les raies est alors la même pour tous les éléments et la probabilité pour tous les éléments et la probabilité pour l'aiguille tout entière, étant la somme de ces probabilités élémentaires, est proportionnelle à la longueur de l'aiguille²⁾.

1) Et cela, parce que quand ω parcourt une fois Λ , ωt ne revient à sa position primitive qu'au sens près, n° 7.

2) Cette remarque capitale est due à Barbier qui a le premier établi la relation entre les questions de probabilités et les propriétés des orbiformes (*Journal de Math.*, 1860). Je tire cette référence d'un petit livre: *Contribution à l'étude des courbes convexes fermées*, publié à la librairie Hermann par MM. Ch. JORDAN et R. FIEDLER, dans lequel le lecteur trouvera des renseignements intéressants concernant les orbiformes

D'autre part, la probabilité pour que l'aiguille, supposée tombée dans une orientation déterminée, rencontre les raies ne dépend que de l'écartement des tangentes à l'aiguille qui sont parallèles aux raies.

Or, si l'aiguille est une orbiforme, cet écartement est indépendant de l'orientation de l'aiguille, c'est le diamètre de l'orbiforme et par suite l'étude de cette forme d'aiguille s'imposait. Pour une aiguille orbiforme, la probabilité ne dépend que du diamètre.

En rapprochant cela de ce qui précède, on voit que toutes les orbiformes de même diamètre ont même longueur.

Nous retrouverons cela plus tard. Je reviens maintenant à la question de M. Bricard.

9. Soit A un point du plan d'une orbiforme Γ de diamètre D . Soit C_A le plus petit cercle de centre A contenant Γ , soit R_A son rayon. C_A a au moins un point commun avec Γ , sans quoi on pourrait rapetisser C_A ; soit B un point commun à C_A et à Γ . AB étant normale à Γ en B est aussi normale à Γ en un autre point C , situé sur la demi-droite indéfinie BA d'origine B , à la distance D de B .

Si A est intérieur à Γ , ces points ont la disposition BAC et $R_A < D$; si A est extérieur, on a la disposition BCA et $R_A > D$. Plaçons-nous dans la première hypothèse, puisque nous voulons chercher le minimum de R_A , pour A variable. Dans ce cas, le cercle c_A de centre A et passant par C , dont le rayon r_A égale $D - R_A$ est le plus grand cercle de centre A qui soit intérieur à Γ . La recherche du plus petit cercle C_A est équivalente à la recherche du plus grand cercle c_A ou encore, puisque $R_A + r_A = D$, à la recherche du minimum de $R_A - r_A$. Nous allons interpréter cette différence.

Soit A la circonférence de centre A et de rayon ρ . Etablissons sur A et Γ le même sens de parcours direct, les tangentes à A et à Γ sont par là-même dirigées. Etablissons entre A et Γ une correspondance par tangentes dirigées parallèles et soit ε le maximum de l'écartement des tangentes correspondantes de A et de Γ . Si l'on a $\rho > R_A$, on a évidemment $\varepsilon = \rho - r_A > R_A - r_A$; si l'on a $\rho < r_A$, on a

$$\varepsilon = R_A - \rho > R_A - r_A.$$

Enfin, pour $R_A > \rho > r_A$, la valeur de ε est le plus grand des deux nombres $R_A - \rho$ et $\rho - r_A$. Il résulte de tout cela que le minimum de ε est $\frac{R_A - r_A}{2}$, qui est atteint pour $\rho = \frac{R_A + r_A}{2} = \frac{D}{2}$.

Si A est extérieur à Γ , le minimum de ε est supérieur à $\frac{D}{2}$ et il est obtenu encore pour $\rho = \frac{D}{2}$, comme on le voit facilement.

Donc, trouver le minimum de R_A revient à trouver le minimum de ε c'est-à-dire à trouver la circonférence qui diffère le moins de Γ quand on établit une correspondance par tangentes parallèles dirigées entre Γ et cette circonférence. C'est un problème à la Tchebycheff.

Représentons la courbe Γ par ses tangentes, comme on le fait toujours quand il s'agit d'une courbe convexe. Soit

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0 \quad (1)$$

l'équation de la tangente dirigée à Γ de direction $\varphi + \frac{\pi}{2}$. p est une fonction $f(\varphi)$ bien déterminée et continue. Si l'origine des coordonnées est intérieure à Γ , p est constamment positif. Dans tous les cas, l'équation $p = f(\varphi)$ peut être considérée comme l'équation de Γ .

Dans le même système de coordonnées polaires tangentielles, l'équation d'un cercle de rayon R est

$$p = R + a \cos \varphi + b \sin \varphi, \quad (2)$$

a et b étant deux constantes. Pour ce cercle A , la valeur de ε est le maximum de la différence

$$|f(\varphi) - (R + a \cos \varphi + b \sin \varphi)| = |\delta(\varphi, R, a, b)|. \quad (3)$$

Donc la recherche du minimum de ε est exactement équivalente à la recherche de la meilleure approximation avec laquelle la fonction $f(\varphi)$ peut être représentée par une expression de la forme (2).

C'est le problème même de Tchebycheff.

10. Tchebycheff a surtout considéré le cas de l'approximation d'une fonction continue par un polynôme. Ses raisonnements ont

été simplifiés et précisés par MM. Kircherberger et Borel¹⁾. Le cas de l'approximation par des suites trigonométriques finies a été considéré par M. J.-W. Young²⁾ et par M. Fréchet³⁾. Mais il sera plus simple ici de prouver directement les quelques résultats qu'on utilisera.

Remarquons d'abord que l'on a

$$f(\varphi + \pi) + f(\varphi) = D, \quad (4)$$

en supposant l'origine intérieure à Γ , ce que nous réaliserons toujours. Donc

$$\delta(\varphi, R, a, b) + \delta(\varphi + \pi, R, a, b) = D - 2R$$

Si donc, quand φ varie, a, b, R étant fixes, $\delta(\varphi, R, a, b)$ atteint la limite supérieure m , il a pour limite inférieure $-n = D - 2R - m$. Et par suite, en prenant $2R = D$, nous rendons aussi petit que possible le plus grand des deux nombres m et n . En d'autres termes, pour a, b fixes, c'est-à-dire le centre A d'un cercle Λ étant fixe, on obtient le minimum du maximum μ de $|\delta(\varphi, R, a, b)|$, c'est-à-dire la circonférence Λ différant le moins de Γ au sens précédemment indiqué, en prenant $R = \frac{D}{2}$ et alors δ varie entre $-\mu$ et $+\mu$. Résultat déjà obtenu et, en somme, par le même raisonnement.

Prenons ainsi R , et faisons varier a et b . Si l'un d'eux, ou tous deux, augmentent indéfiniment en valeur absolue, μ augmente indéfiniment. Donc le minimum de μ , pour a, b variables, s'obtient pour des valeurs finies de a et b .

Cette valeur minimum de μ est positive, sans quoi $f(\varphi)$ serait de la forme (2) et Γ serait une circonférence, cas que l'on peut laisser de côté. Alors donc, pour les valeurs minimisantes de a et b , δ varie entre μ et $-\mu$ et l'on a

$$\delta(\varphi + \pi) + \delta(\varphi) = 0.$$

1) Voir l'exposition qu'en a donnée M. BOREL dans ses *Leçons sur les fonctions de variables réelles* et aussi la manière originale grâce à laquelle M. DE LA VALLÉES POUSSIN retrouve et complète les résultats de Tchebycheff (*Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 1910, p. 809 et suiv.).

2) *Transactions of the American mathematical Society*, 1907

3) *Annales de l'École Normale supérieure*, 1908.

Soient deux valeurs, α et $\alpha + \pi$, de φ annulant δ . Dans $(\alpha, \alpha + \pi)$ δ atteint soit la valeur μ , soit la valeur $-\mu$, ceci est évident; je dis qu'en réalité, il atteint les deux. Supposons en effet que δ varie entre μ et $-m$, avec $m < \mu$, et modifions a et b de façon à remplacer $a \cos \varphi + b \sin \varphi$ par $a \cos \varphi + b \sin \varphi + \lambda \sin (\varphi - \alpha)$; δ deviendra

$$\delta - \lambda \sin (\varphi - \alpha) = \delta'$$

et δ' varie entre μ' et m' avec $\mu' < \mu$, $m < m' < \mu$, si λ est positif et assez petit. Ainsi μ n'aurait pas sa valeur minimum pour les valeurs considérées de a et b , ce qui est contraire à l'hypothèse.

Traduisons le résultat en disant que, pour les valeurs minimisantes a et b , $\delta (\varphi)$ atteint ses valeurs extrêmes $+\mu$ et $-\mu$ dans tout intervalle $(\theta, \theta + \pi)$ d'étendue π .

La réciproque est vraie: si $\delta (\varphi)$ atteint ses valeurs extrêmes $+m$ et $-m$ dans tout intervalle $(\theta, \theta + \pi)$, pour tout autre système de valeurs de a et b , $|\delta (\varphi)|$ atteint des valeurs plus grandes que m . En effet, modifier a et b revient toujours à remplacer $\delta (\varphi)$ par une expression de la forme

$$\delta (\varphi) + \lambda \sin (\varphi - \alpha) = \delta' (\varphi),$$

et puisque $\delta (\varphi)$ atteint $+m$ et $-m$ dans $(\alpha, \alpha + \pi)$, dans cet intervalle δ' atteindra des valeurs supérieures à m si λ est positif, des valeurs inférieures à $-m$ si λ est négatif.

Nous pouvons conclure: *Il existe toujours une circonférence Λ qui, dans la correspondance par tangentes parallèles dirigées, diffère moins que toute autre d'une orbiforme donnée Γ . La circonférence C_A concentrique à Λ est la plus petite de toutes celles qui enferment Γ , nous l'avons appelée la circonférence circonscrite; la circonférence c_A concentrique à Λ est la plus grande des circonférences intérieures à Γ , c'est la circonférence inscrite. Si l'on considère deux moitiés correspondantes de C_A et c_A [c'est-à-dire données par les mêmes valeurs $(\alpha, \alpha + \pi)$ de φ], il y a toujours sur chacune de ces demi-circonférences des points de Γ .*

11. Ces propositions correspondent exactement à celles des nos 1 et 2; elles sont un peu plus complètes, mais s'appliquent seulement aux orbiformes. Quant à la similitude des raisonne-

ments, qui va souvent jusqu'à l'identité, il est inutile d'y insister davantage.

Soit l'équation d'une tangente en A à une orbiforme Γ

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0; \quad (1)$$

soit

$$-x \sin \varphi + y \cos \varphi - q = 0, \quad (5)$$

l'équation de la normale correspondante. p et q sont des fonctions continues de φ (n° 6). La tangente voisine est

$$x \cos (\varphi + \delta\varphi) + y \sin (\varphi + \delta\varphi) - p - \delta p = 0 \quad (6)$$

le point commun à (1) et (6) est aussi sur la droite

$$-x \sin \varphi + y \cos \varphi - p \frac{1 - \cos \delta\varphi}{\sin \delta\varphi} - \frac{\delta p}{\sin \delta\varphi} = 0 \quad (7)$$

Faisons tendre $\delta\varphi$ vers zéro, le point commun aux deux tangentes doit tendre vers A , c'est-à-dire vérifier (5), donc $\frac{\delta p}{\delta\varphi}$ tend vers q .

Ainsi: la fonction $p=f(\varphi)$ définissant une courbe orbiforme est continue et a une dérivée continue.

Cette fonction doit vérifier la condition

$$f(\varphi + \pi) + f(\varphi) = D \quad (4)$$

et une autre condition qui exprimera la convexité de l'enveloppe de (1).

Les coordonnées du point A sont

$$x = p \cos \varphi - p' \sin \varphi, \quad y = p \sin \varphi + p' \cos \varphi;$$

donc, le segment OA projeté sur la direction ψ donne

$$p \cos (\varphi - \psi) - p' \sin (\varphi - \psi),$$

et, pour la convexité, on doit avoir

$$p(\psi) > p(\varphi) \cos (\psi - \varphi) + p'(\varphi) \sin (\psi - \varphi). \quad (8)$$

Pour la commodité, posons $D = 2r$, $p = h+r$ et représentons $h(\varphi)$ par une courbe L comme si h et φ étaient deux coordonnées

cartésiennes rectangulaires. Supposons, de plus, que 0 est le centre du cercle circonscrit à Γ , alors h varie entre $+\mu$ et $-\mu$.

La condition (8) exprime alors que la courbe L est tout entière au-dessus de chaque sinussoïde de la forme

$$h = A \sin \varphi + B \cos \varphi - r, \quad (8')$$

qui lui est tangente. Et, comme conséquence de (4) et (8), on voit que L est tout entière au-dessous de chaque sinussoïde de la forme

$$h = A \sin \varphi + B \cos \varphi + r, \quad (8'')$$

qui lui est tangente ¹⁾.

Soient α un point où $h(\varphi) = 0$, β la plus petite valeur supérieure à α où $h(\varphi) = \pm\mu$ et supposons que $h(\beta) = +\mu$. L'arc de L correspondant à $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ est au-dessus de la sinussoïde (8') qui lui est tangente au point $\varphi = \beta$, on a donc

$$h(\varphi) \geq (r + \mu) \cos(\varphi - \beta) - r,$$

d'où, en faisant $\varphi = \alpha$,

$$\cos(\beta - \alpha) \leq \frac{r}{r + \mu}.$$

Appelons $\cos \theta$ le second membre, θ étant aigu. On a $\beta - \alpha \geq \theta$.

Soit γ la plus petite valeur supérieure à β et telle que $\varphi(\gamma) = -\mu$. Quand on passe de β à γ , h passe de $+\mu$ à 0, puis de 0 à $-\mu$; en utilisant comme on vient de le faire la sinussoïde (8') et de façon analogue (8''), on trouve que $\gamma - \beta \geq 2\theta$. Nous savons que γ est inférieur à $\alpha + \pi$. Je dis qu'entre γ et $\alpha + \pi$ il y a encore un point δ où $h(\delta) = +\mu$. Sans quoi en effet il n'y aurait pas de tel point entre $\gamma - \theta$ et $\gamma + \pi$ soit dans un intervalle d'étendue supérieure à π , ce qui est impossible. δ existe donc et l'on a

$$\delta - \gamma \geq 2\theta, \quad \alpha + \pi - \delta \geq \theta;$$

d'où

$$\alpha + \pi - \alpha \geq 6\theta, \quad \theta \leq \frac{\pi}{6}.$$

¹⁾ Ceci revient à dire que si l'on connaît un point A et une normale dirigée en A d'une orbiforme Γ de diamètre D , on en déduit le second pied B de la normale AB et Γ est située entre les tangentes en A et B et aussi entre les circonférences de rayon D et de centres A et B . Comparer avec le n° 6.

Donc

$$r \geq (r + \mu) \cos \frac{\pi}{6} = (r + \mu) \frac{\sqrt{3}}{2}$$

d'où pour le rayon $r + \mu$ du cercle circonscrit :

$$r + \mu \leq \frac{2r}{\sqrt{3}} = \frac{D}{\sqrt{3}}$$

Le plus grand cercle circonscrit est donc de rayon $\frac{D}{\sqrt{3}}$; mais cette valeur n'est atteinte que si toutes les inégalités précédentes se changent en égalité, auquel cas L est formée de sinusoides (8') et (8''). Donc, en prenant $\alpha = 0$, on a

$$p(\varphi) = \frac{D}{\sqrt{3}} \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{6} \right), \text{ de } 0 \text{ à } \frac{\pi}{3} ;$$

$$p(\varphi) = -\frac{D}{\sqrt{3}} \sin \varphi + D, \text{ de } \frac{\pi}{3} \text{ à } \frac{2\pi}{3} ;$$

$$p(\varphi) = -\frac{D}{\sqrt{3}} \cos \left(\varphi - \frac{5\pi}{6} \right), \text{ de } \frac{2\pi}{3} \text{ à } \pi ;$$

.....

les valeurs non écrites de $p(\varphi)$ résultant de suite de la condition (4). Or on reconnaît la définition de $p(\varphi)$ pour l'orbiforme équilatérale. C'est donc pour elle et pour elle seule que le maximum du cercle circonscrit est atteint.

12. On pourrait traiter de même le cas des ensembles de l'espace, les modifications à apporter à ce qui précède sont banales. Seules les considérations du numéro précédent doivent subir des modifications assez notables. Mais je ne veux pas traiter à nouveau la question de la sphère circonscrite, je dis seulement quel sera ici le problème d'approximation de Tchebycheff.

L'équation (1) sera remplacée par

$$x \cos \varphi \sin \theta + y \sin \varphi \sin \theta + z \cos \theta - p = 0$$

où p sera une fonction continue de θ, φ , à dérivées partielles du premier ordre continues. Et nous aurons à représenter au mieux cette fonction $p(\varphi, \theta)$ par une expression de la forme

$$R - [A \cos \varphi \sin \theta + B \sin \varphi \sin \theta + C \cos \theta].$$

Je signale encore la nouvelle forme que prendra la relation (4) : si l'on suppose que $p(\varphi, \theta)$ est définie pour $0 \leq \varphi \leq \pi$ et quel que soit θ ,

$$p(\varphi, \theta) + p(\varphi, \theta + \pi) = D.$$

Cette relation montre que le contour apparent en projection d'une surface orbiforme est une courbe orbiforme. De là il résulte que ce contour apparent en projection est de longueur indépendante de la direction des projetantes. Minkowski¹⁾, dans un ingénieux petit Mémoire, a démontré la réciproque. C'est le seul travail que je connaisse sur les surfaces orbiformes. Au point de vue géométrique, celles de ces surfaces qui sont analytiques doivent mériter d'être étudiées. Leur surface des centres doit être bien curieuse; la correspondance qui existe entre leurs lignes de courbure doit aussi être l'origine de faits géométriques intéressants. J'ai dit que le problème du maximum du rayon de la sphère enveloppante se traitait comme le problème plan analogue; il y a cependant une différence à signaler:

Il existait une seule forme de courbe orbiforme donnant au rayon du cercle circonscrit sa valeur maximum; dans l'espace, il existe une infinité de surfaces orbiformes inégales donnant au rayon de la sphère circonscrite sa valeur maximum. En voici la raison: une courbe orbiforme de diamètre D est entièrement déterminée quand on l'assujettit à passer par les trois sommets d'un triangle équilatéral de côté D ; au contraire une surface orbiforme de diamètre D n'est pas définie par la seule condition de passer par les sommets d'un tétraèdre régulier d'arête D .

13. Nous avons déjà remarqué que toutes les orbiformes de même largeur D ont la même longueur. Comme parmi ces orbiformes se trouve la circonférence de diamètre D , elles ont toutes

¹⁾ Œuvres, t. II, p. 277.

une longueur égale à πD . Du théorème des isopérimètres, il résulte alors que la circonférence de diamètre D est, de toutes les orbiformes de même largeur, celle qui a la plus grande aire, $\frac{\pi D^2}{4}$; cette remarque conduit naturellement à rechercher quelle est l'orbiforme de largeur D qui a la plus petite aire.

Pour traiter ce problème, j'emploierai ici une méthode purement géométrique qui nous permettra de démontrer à nouveau que toutes les orbiformes D ont même longueur que celle de ces orbiformes qui est circulaire et qu'elles ont une aire plus petite qu'elle.

Soient $\alpha_1 = 0, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ un ensemble dénombrable de nombres, positifs et inférieurs à π , partout dense dans $(0, \pi)$; je pose $\alpha'_i = \alpha_i + \pi$. A chaque entier i , j'attache les deux tangentes T_i, T'_i , de directions α_i et α'_i , d'une orbiforme donnée. Cette orbiforme sera parfaitement déterminée par la connaissance de cette infinité dénombrable de tangentes; sa longueur et son aire peuvent être considérées comme des fonctions des nombres α_i . Les problèmes de Calcul des Variations relatifs aux orbiformes peuvent ainsi être considérés comme des questions de minimum pour des fonctions des variables α_i . Cette transformation banale est ici avantageuse.

Nous allons, pour une orbiforme quelconque, calculer L et S comme limites des nombres analogues relatifs au polygone circonscrit Π_p formé par les tangentes $T_1, T'_1, T_2, T'_2, \dots, T_p, T'_p$. On passe de Π_p à Π_{p+1} en enlevant de Π_p deux triangles; pour préciser, supposons que α_{p+1} soit compris entre les deux nombres α_g et α_k de la suite $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha'_1$.

Les tangentes T_g et T'_g , distantes de la largeur D de l'orbiforme et les deux tangentes T_k et T'_k , distantes aussi de D , forment un losange dont les points A et A' de rencontre de T_g et T_k , de T'_g et de T'_k sont deux sommets opposés. De sorte que AA' est la bissectrice de T_g et de T_k , de T'_g et de T'_k dont la direction est

$$\left(\frac{\alpha_g + \alpha_k}{2} + \frac{\pi}{2} \right).$$

Si T_{p+1} rencontre T_g en M et T_k en N et si, de même, T'_{p+1} rencontre T'_g et T'_k en M' et N' , MM' et NN' sont les bissec-

trices extérieures des angles $AMN, A'M'N'$; $ANM, A'N'M'$. Les deux triangles $AMN, A'M'N'$ sont donc homothétiques, le centre d'homothétie étant le centre à la fois du cercle exinscrit dans AMN , suivant le côté MN , et du cercle analogue relatif à $A'M'N'$.

La longueur $MN + M'N'$ est la base $N'm$ d'un triangle semblable à la fois à OMN et à $OM'N'$ et dont la hauteur est la somme D des hauteurs de ces triangles. $MN + M'N'$ a donc une valeur que l'on peut calculer dès que l'on connaît $\alpha_g, \alpha_{p+1}, \alpha_k$ et qui est indépendante de celle des orbiformes de largeur D que l'on considère.

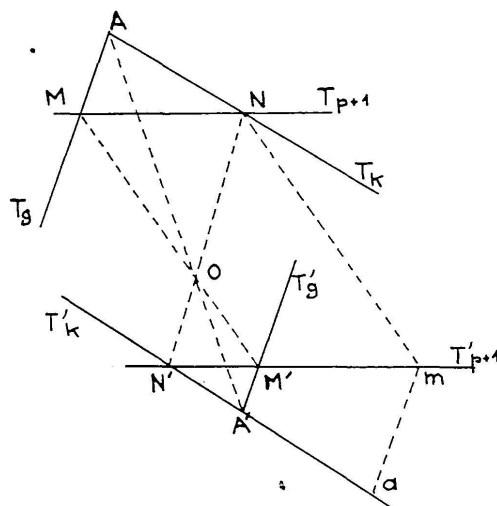


Fig. 9

De même $AM + A'M'$ et $AN + A'N'$ ont des valeurs connues, celles des longueurs des côtés am, aN' d'un triangle θ_p semblable à AMN et de base $MN + M'N'$. Donc, quand on passe de Π_p à Π_{p+1} , on diminue le périmètre du polygone circonscrit d'une longueur bien déterminée $D\varepsilon_p$. La longueur de Π_p est donc égale à

$$\text{longueur de } \Pi_2 - D(\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_{p-1});$$

elle est donc la même pour toutes les orbiformes de largeur D et, par suite, celles-ci ont toutes même longueur; résultat déjà connu.

14. Evaluons de même la différence entre les aires de Π_{p+1} et Π_p ; c'est-à-dire la somme des aires des triangles $AMN, A'M'N'$. Cette somme est égale à l'aire du triangle θ_p déjà considérée, semblable à AMN et de base $MN + M'N'$, multi-

pliée par $\lambda_p^2 + (1 - \lambda_p)^2$ si λ_p est le rapport $\frac{MN}{MN + M'N'}$.

Le triangle θ_p est indépendant de l'orbiforme considérée; c'est-à-dire de la forme particulière du polygone Π_p ; il en est de même de son aire. La seule quantité qui varie d'une orbiforme à l'autre c'est la grandeur de la quantité λ_p qui peut varier de 0

à 1. Or, le multiplicateur $[\lambda_p^2 + (1 - \lambda_p)^2]$ est minimum pour $\lambda_p = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $MN = M'N'$ et maximum pour $\lambda_p = 0$, ou 1, c'est-à-dire MN ou $M'N'$, égal à zéro. Les deux limites entre lesquelles peut varier l'aire de Π_p sont donc, en désignant par η_p l'aire de θ_p .

$$\text{aire de } \Pi_2 - \frac{1}{2}(\eta_2 + \eta_3 + \dots + \eta_{p-1})$$

et

$$\text{aire de } \Pi_2 - (\eta_2 + \eta_3 + \dots + \eta_{p-1})$$

Et puisque l'aire de l'orbiforme est la limite de l'aire de Π_p , les maximum et minimum de cette aire seront

$$\text{aire de } \Pi_2 - \frac{1}{2}(\eta_2 + \eta_3 + \dots)$$

et

$$\text{aire de } \Pi_2 - (\eta_2 + \eta_3 + \dots);$$

du moins s'il existe bien des orbiformes pour lesquelles ces limites sont atteintes.

Le maximum est atteint pour une orbiforme telle que l'on ait constamment $MN = M'N'$; alors les deux triangles AMN , $A'M'N'$ sont égaux et les deux circonférences de centre O exinscrites respectivement dans AMN et $A'M'N'$ étant de même rayon, sont confondues. Le point O est donc également distant de $T_g, T'_g, T_k, T'_k, T_{p+1}, T'_{p+1}$; par suite, en raisonnant de proche en proche, on voit qu'il existe un point O également distant de toutes les tangentes à l'orbiforme qui est donc une circonférence. Résultat connu.

15.¹ Pour appliquer à la recherche du minimum de l'aire le procédé qui vient de nous donner son maximum, il faut d'abord qu'un choix convenable des premiers nombres de la suite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$, nous conduise à un polygone Π , le même, à la position près, pour toutes les orbiformes de longueur D ; il faut ensuite que, à partir du passage de Π au polygone suivant, la condition du minimum $MN.M'N' = 0$ soit constamment remplie dans chaque passage de Π_p à Π_{p+1} .

1) La rédaction de ce paragraphe 15 n'est pas celle qui est parue dans le *Journal de mathématiques pures et appliquées*, mais une rédaction nouvelle. Voir la note 1) de la page 251.

Prenons $\alpha_1 = \varphi$, $\alpha_2 = \varphi + \frac{\pi}{3}$, $\alpha_3 = \varphi + \frac{2\pi}{3}$; Π_3 est un hexagone $ABCDEF$ dont tous les angles sont de 120° et qu'on obtient, par exemple, en coupant le losange Π_2 , formé de deux triangles équilatéraux accolés par leurs bases AD , par des parallèles à AD . De là résulte que $AB = CD$, et, plus généralement, que les côtés de rangs 1, 3, 5 de Π_3 savoir AB, CD, EF sont égaux; de même les côtés de rang pair sont égaux.

Si, pour $\varphi = \varphi_0$, Π_3 n'est pas un hexagone régulier, c'est, par exemple, que les côtés de rang impair sont plus grands que ceux de rang pair. Faisons varier φ de façon continue de φ_0 à $\varphi_0 + \frac{\pi}{3}$. Pour $\varphi_0 + \frac{\pi}{3}$, nous retrouvons le même Π_3 , mais les côtés qui étaient de rang impair sont devenus de rang pair, et inversement; de sorte que ce sont maintenant les côtés de rang pair qui sont les plus grands. Il y a donc entre φ_0 et $\varphi_0 + \frac{\pi}{3}$ une valeur de φ pour laquelle Π_3 est l'hexagone régulier dont l'apothème est la moitié de D . C'est cette valeur φ que nous choisissons; le polygone Π_3 est alors le polygone Π que nous cherchions.

Si, dans le passage de $\Pi_3 \equiv \Pi$ à Π_4 , la condition $MN.M'N' = 0$ est réalisée, c'est que l'une des tangentes T_4 ou T'_4 passe par l'un des sommets de Π_3 ; soit par A . Alors A appartient à l'orbiforme, AB et AF sont deux tangentes en A à cette courbe; les normales correspondantes AE, AC nous fournissent deux autres points E et C de l'orbiforme. Celle-ci est donc l'orbiforme équilatérale formée des arcs de cercle de centres A, C, E et soutendus par CE, EA, AC . D'ailleurs, pour cette courbe, de deux tangentes parallèles, l'une passe nécessairement par A, C , ou E , donc la condition du minimum est remplie dans le passage de Π_p à Π_{p+1} à partir de $p = 3$. C'est donc l'orbiforme équilatérale et celle seule qui donne le minimum de l'aire ¹⁾.

1) Dans le texte publié dans le *Journal de mathématiques pures et appliquées*, il était affirmé inexactement que la condition du minimum pouvait être remplie dès le passage de Π_2 à Π_3 . En se reportant à ce texte, on verra que la phrase qui le résumait dans le *Compte rendu de la Société mathématique de France* du 24 juin 1914 ne m'avait pas paru claire. Mais les explications que j'avais ajoutées étaient inopérantes et ne rendaient mon erreur que plus tangible. La correction que m'avait indiquée Bonnessen était un peu moins simple, mais peu différente en somme de celle utilisée ici.

Ainsi l'orbiforme d'aire minimum est l'orbiforme équilatérale; son aire est: $D^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^1$.

16. Présenté sous la forme précédente, l'artifice paraît très spécial et basé entièrement sur le fait que toute normale à une orbiforme est une normale double. On peut lui donner une forme qui le rend utilisable dans des cas assez variés.

Supposons que nous ayons à chercher le minimum d'une fonction de contour $F(c)$, qui conserve la même valeur pour deux contours homothétiques et dont le minimum ne puisse être atteint que par un contour convexe. Il sera alors tout naturel de déterminer ces contours par leurs tangentes de direction $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, les α_p étant des nombres donnés partout denses dans $(0, 2\pi)$. Les p premières tangentes forment un polygone Π_p ; le passage à Π_{p+1} fera passer la fonction de $F(\Pi_p)$ à $F(\Pi_{p+1})$ et, grâce à la condition d'homothétie, il arrivera souvent que le gain, $F(\Pi_p) - F(\Pi_{p+1})$, le meilleur qui puisse se réaliser, soit indépendant de Π_p ; on déterminera donc alors facilement les tangentes successives, donc le contour minimisant.

Pour retrouver ce que nous avons fait précédemment, il suffit de rechercher, pour les orbiformes, le maximum et le minimum du quotient $\frac{L^2}{S}$, du carré de la longueur à la surface; dans ce cas, pour tenir compte de la définition de l'orbiforme, on déterminera toujours simultanément les tangentes de directions α_p et $\alpha_p + \pi$.

J'ai montré, dans la Note citée, qu'ainsi présenté, l'artifice réussit très bien pour le problème des isopérimètres, problème qu'il faut ici énoncer comme étant encore la recherche du minimum de $\frac{L^2}{S}$; mais cette fois pour toutes les courbes possibles.

On voit, qu'en somme, on trouve avantage à ne pas raisonner sur une intégrale, comme on le fait ordinairement dans le calcul des variations, mais à raisonner sur une expression construite à l'aide de plusieurs intégrales.

1) Le calcul effectif de ε et η fournit des identités intéressantes, mais qui ne diffèrent pas de celles que donnent les calculs classiques de Π .

CHAPITRE IV

Sur la plus courte distance entre deux points d'une surface développable

Le cas des problèmes réguliers semble le plus simple; remarquons que, cependant, la méthode des dérivées ou son équivalent pour le calcul des variations, ne fournit pas en général la solution cherchée sans ambiguïté.

S'agit-il d'avoir le minimum de $F(X)$ pour $a \leq X \leq b$. Si l'on a trouvé X_0 dans (a, b) et tel que $F'(X_0) = 0$, $F''(X_0) > 0$, on sera certain que X_0 donne un minimum, mais ce ne sera peut-être qu'un minimum local ou, comme l'on dit, relatif. Il reste à comparer ces minima locaux. L'habitude est de considérer les recherches nécessaires comme accessoires, encore qu'elles soient parfois fort délicates; leur examen a conduit, dans le calcul des variations, aux conditions de Legendre et de Jacobi, ce qui montre bien qu'elles ont en réalité une importance qu'on néglige.

Comme tout problème du calcul des variations peut être simplifié jusqu'à prendre un aspect très élémentaire, j'avais, il y a quelques années, bâti par une telle transformation, un exercice destiné à montrer aux élèves de Sèvres la nature des études complémentaires que réclame le traitement complet d'un problème d'extremum. Voici cet énoncé débarrassé de certains artifices destinés à guider les élèves et à donner à l'énoncé l'aspect de leurs problèmes de concours.

Exercice relatif au plus court chemin tracé sur la surface d'un cube et joignant deux points donnés M et N , de cette surface.

1. Montrer que ce plus court chemin

a) vérifie à chaque traversée d'arête une condition que l'on énoncera,

- b) ne passe par aucun sommet si ni M , ni N n'est sur une arête,
- c) ne passe pas deux fois dans la même face.

En conclure que le plus court chemin cherché est à choisir parmi des chemins dont chacun est fourni par une des suites de faces joignant M à N ; suites qui sont en nombre fini. Montrer qu'une construction simple permet, pour chaque suite de faces, de reconnaître s'il lui correspond ou non un chemin utile à considérer et de fournir ce chemin.

Quelles modifications devraient être apportées aux faits constatés s'il s'était agi, au lieu d'un cube, d'un polyèdre convexe quelconque, puis d'un polyèdre quelconque.

2. A, B, C, D , étant les sommets successifs d'une face, A', B', C', D' , étant symétriques de A, B, C, D , par rapport au centre du cube, on supposera M dans la face $ABCD$ et, pour fixer les idées, tel que les distances de M à AB et à AD soient respectivement le $1/5$ et les $2/5$ du côté du cube.

Montrer que l'on peut effectuer les comparaisons exigées au n° 1 d'un seul coup et quelle que soit la position de N , en opérant ainsi: on fend la surface du cube suivant les 8 plus courts chemins de M aux 8 sommets du cube puis on développe la surface ainsi fendue, par exemple sur le plan de la face $A'B'C'D'$ laissée fixe. Tous les chemins à considérer deviennent rectilignes. Appliquer au cas où N est le symétrique de M par rapport au centre du cube. Décrire le polygone développement Π obtenu pour le choix spécial du point M ; indiquer en quelques mots comment il varie quand M varie et à quels moments il subit des variations importantes.

3. Démontrer que le polygone Π peut être partagé en 8 polygones partiels dont chacun est constitué par les images des points N dont les plus courts chemins à M sont représentés sur Π par des segments rectilignes aboutissant à l'un déterminé des 8 transformés de M . Caractériser les côtés et les sommets de ces polygones partiels par rapport aux transformés de M .

En déduire qu'il est possible de pratiquer dans la surface du cube 8 coupures respectant cette fois la face $ABCD$ et permettant, en laissant cette face immobile, un développement sur lequel

tous les plus courts chemins MN sont transformés en segments issus de M . Tracer ce nouveau développement Π_1 pour la position spéciale indiquée pour M .

Le problème précédent est loin d'épuiser l'étude du plus court chemin entre deux points d'un cube; c'est dire combien on laisse de questions de côté quand on se borne, dans un problème d'extremum, aux parties qui sont susceptibles d'un traitement uniforme.

L'exemple du cube est cependant l'un des plus simples; il n'y en a en réalité qu'un autre qui soit plus simple, celui du tétraèdre à arêtes opposées égales. Si l'on pose un tel tétraèdre sur un plan, puis qu'on le fasse pivoter autour de diverses arêtes pour amener chaque fois une face en contact avec le plan support, la correspondance ponctuelle réalisée entre la surface du tétraèdre et le plan est univoque dans le sens plan-tétraèdre. Cela simplifie bien des questions relatives aux tétraèdres à arêtes opposées égales.

Le cas le plus simple après celui de la plus courte distance entre deux points de la surface d'un polyèdre est celui de la plus courte distance entre deux points d'une surface développable. Nous entendons par là, suivant l'habitude en géométrie différentielle, qu'il s'agit de surfaces enveloppes de plans dépendant d'un seul paramètre et données par des fonctions dont toutes les dérivées utilisées dans les calculs sont continues ¹⁾.

Ces surfaces se partagent naturellement suivant les propriétés de leurs génératrices en cylindres, cônes et surfaces lieux des tangentes à une courbe gauche. On a admis de très bonne heure qu'elles sont applicables sur le plan comme les surfaces polyédriques dont elles sont les limites. On rencontre encore dans les géométries élémentaires un raisonnement de ce genre à l'occasion de l'étude de l'hélice. Mais si une telle preuve est notoirement insuffisante, il est facile de la transformer. Je le ferai en me bornant aux surfaces lieux des tangentes à une courbe gauche; les autres se traitent de façon analogue, mais plus simplement encore.

Repérons chaque point M d'une développable Δ par deux coordonnées curvilignes. La première l est la mesure du seg-

¹⁾ Le texte qui suit est extrait de notes préparatoires à un cours sur les applications géométriques de l'analyse, professé à la Sorbonne de 1910 à 1921.

ment mM porté sur la génératrice de Δ , m étant le point de contact de cette génératrice avec l'arête de rebroussement Γ de Δ ; Γ et ses tangentes sont orientées, l a donc un signe. La seconde s est l'abscisse curviligne de m sur Γ . Alors, en réservant les notations x, y, z ; $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$; r, s pour les coordonnées, les cosinus directeurs des tangentes et normales principales, le rayon de courbure de Γ en m et l'arc de cette courbe, et en désignant par de grandes lettres ce qui est relatif à M , on a trois relations du type

$$X = x + \alpha l,$$

d'où

$$dX = \alpha(ds + dl) + l \frac{\alpha'}{r} ds,$$

$$dS^2 = (ds + dl)^2 + \frac{l^2}{r^2} ds^2.$$

Si donc entre les points M et M_1 de deux développables Δ et Δ_1 , on établit une correspondance ponctuelle par l'emploi des mêmes coordonnées curvilignes l et s , cette correspondance laissera invariante la longueur des courbes pourvu que les deux arêtes de rebroussement Γ et Γ_1 aient la même équation intrinsèque $r =$ fonction de s . On vérifie d'ailleurs immédiatement que la transformation conserve aussi les angles. On a donc réalisé l'application de Δ sur Δ_1 .

Or, on peut prendre pour Δ_1 la développable d'arête de rebroussement Γ_1 donnée par:

$$x_1 = \int_{s_0}^s \cos \int_{s_1}^s \frac{ds}{r} ds, \quad y_1 = \int_{s_0}^s \sin \int_{s_1}^s \frac{ds}{r} ds, \quad z_1 = 0;$$

c'est-à-dire le plan de $x_1 y_1$; nous avons donc réalisé l'application de Δ sur ce plan, ou plus exactement sur la partie Π_1 de ce plan balayée par les tangentes à la courbe convexe Γ_1 .

L'applicabilité sur le plan des surfaces développables est ainsi démontrée, on sait même la réaliser et l'on voit que, dans cette application, la courbure de l'arête de rebroussement est conservée.

Quant au problème du plus court chemin entre deux points de Δ il devient, grâce à l'application, celui du plus court chemin entre deux points de Π_1 , quand on n'a pas le droit de sortir de Π_1 , ou d'autres problèmes analogues, comme on va le voir. Soient deux points M et \bar{M} de Δ ; supposons qu'ils appartiennent à la même nappe de Δ ; alors tout chemin allant de M à \bar{M} , ou ne change pas de nappe, ou en change un nombre pair de fois. Son image joignant M_1 à \bar{M}_1 , ou ne rencontre pas Δ_1 , ou rencontre cette courbe et passe un nombre pair de fois de l'une à l'autre des deux régions Π_1 et Π'_1 du plan x_1y_1 qui se recouvrent.

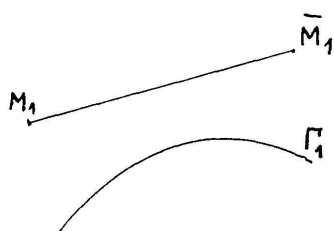


Fig. 10

Supposons que le segment $M_1\bar{M}_1$ ne rencontre pas Γ_1 (fig.10); alors la courbe $M\bar{M}$ correspondante est le plus court chemin de M à \bar{M} ; cette courbe est appelée une *géodésique*. Les droites du plan x_1, y_1 sont caractérisées par l'équation différentielle

$$\frac{\frac{d^2 X_1}{ds^2}}{\frac{dX_1}{ds}} = \frac{\frac{d^2 Y_1}{ds^2}}{\frac{dY_1}{ds}}, \quad \text{avec } X_1 = x_1 + \alpha_1 l,$$

d'où

$$\frac{\left(\frac{d^2 l}{ds^2} - \frac{l}{r}\right)\alpha_1 + \left[\frac{1}{r} + \frac{d}{ds}\left(\frac{l}{r}\right)\right]\alpha'_1}{\left(1 + \frac{dl}{ds}\right)\alpha_1 - \alpha'_1 \frac{l}{r}} = \frac{\left(\frac{d^2 l}{ds^2} - \frac{l}{r}\right)\beta_1 + \left[\frac{1}{r} + \frac{d}{ds}\left(\frac{l}{r}\right)\right]\beta'_1}{\left(1 + \frac{dl}{ds}\right)\beta_1 - \beta'_1 \frac{l}{r}},$$

$x_1, y_1, \alpha_1, \beta_1, \alpha'_1, \beta'_1$ étant relatifs à l'arête de rebroussement plane Γ_1 de Δ_1 . En tenant compte des relations $\alpha'_1 = -\beta_1$, $\beta'_1 = \alpha_1$, $\alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1$, on a l'équation différentielle des géodésiques. Au lieu de simplifier cette équation, écrivons-la sous une forme plus compliquée mais qui contiendra symétriquement

les trois coordonnées; pour cela désignons par $\alpha_1'' = 0$, $\beta_1'' = 0$, $\gamma_1'' = 1$ les cosinus directeurs de la binormale de Γ_1 . Ceux de Γ seront représentés par α'' , β'' , γ'' et le rayon de torsion par τ . Alors l'équation trouvée exprime qu'est nul le déterminant dont la première ligne est:

$$\left| \frac{d^2 X_1}{ds^2}, \frac{d X_1}{ds}, \alpha_1'' \right| = 0.$$

Pour Γ l'équation analogue est:

$$\left| \alpha \left(\frac{d^2 l}{ds^2} - \frac{l}{r} \right) + \alpha' \left[\frac{1}{r} + \frac{d}{ds} \left(\frac{l}{r} \right) \right] - \frac{\alpha'' l}{\tau}, \alpha \left(1 + \frac{dl}{ds} \right) + \alpha' \frac{l}{r}, \alpha'' \right| = 0,$$

En décomposant celle-ci en colonnes partielles, on aura des déterminants dont seuls seront différents de zéro ceux dont les colonnes proviendront de termes multipliés respectivement par α , α' , α'' ; β , β' , β'' ; γ , γ' , γ'' . Donc on a:

$$\left(\frac{d^2 l}{ds^2} - \frac{l}{r} \right) \frac{l}{r} - \left[\frac{1}{r} + \frac{d}{ds} \left(\frac{l}{r} \right) \right] \left(1 + \frac{dl}{ds} \right) = 0;$$

c'est l'équation déjà trouvée des géodésiques, équation indépendante de τ ; les géodésiques sont donc conservées dans les applications des surfaces Δ , ce que nous savions déjà, mais nous avons de plus une définition géométrique simple des géodésiques, car notre déterminant exprime que la tangente à la géodésique, la normale principale à cette courbe, la normale à la développable sont dans un même plan. *Les géodésiques sont donc les courbes dont les plans osculateurs sont en chaque point normaux à la développable.*

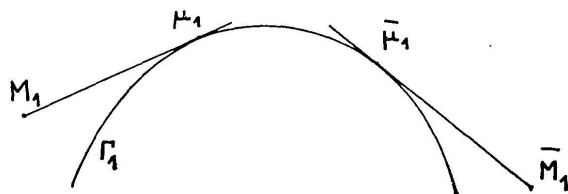


Fig. 11

Supposons maintenant que M et \bar{M} étant toujours sur la même nappe de Δ , le segment $M_1 \bar{M}_1$ rencontre Γ (fig. 11). Le trajet le plus court de M_1 à \bar{M}_1 dans Π_1 (ou Π'_1) doit envelopper

le contour convexe formé par les deux tangentes $M_1\mu_1$, $\bar{M}_1\bar{\mu}_1$ menées de M_1 et \bar{M}_1 à Γ_1 , et l'arc $\mu_1\bar{\mu}_1$ de Γ_1 . C'est donc ce tracé lui-même qui constitue le plus court chemin. Ainsi le plus court chemin de M à \bar{M} est constitué par les deux portions de géodésiques $M\mu$ et $\bar{M}\bar{\mu}$ et par l'arc $\mu\bar{\mu}$ de l'arête de rebroussement. Mais il y a une grande différence à faire entre les deux arcs géodésiques $M\mu$ et $\bar{M}\bar{\mu}$: la nappe de Δ contenant M et \bar{M} est formée de demi-tangentes à Γ ; si μM est une de ces demi-tangentes, $\bar{\mu}\bar{M}$ n'en est pas une et inversement, de sorte que le plus court chemin de M à \bar{M} se compose d'un segment de génératrice, d'un arc de Γ et d'une courbe géodésique (prises dans cet ordre ou dans l'ordre inverse suivant les cas).

Dans ce qui précède, j'ai supposé que la courbe Γ ne se fermait pas; si Γ avait été une courbe fermée, le raisonnement précédent aurait donné deux chemins localement plus courts entre lesquels il eût fallu choisir.

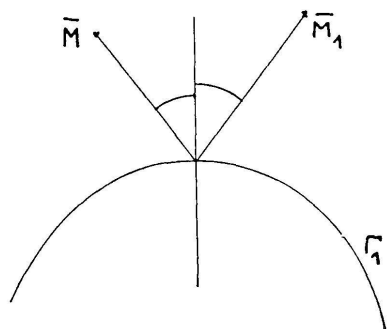


Fig. 12

Si M et \bar{M} appartiennent aux deux nappes différentes de Δ , le segment $M_1\bar{M}_1$ pourra ou non rencontrer Γ_1 . S'il ne rencontre pas Γ_1 , le chemin le plus court de M_1 à \bar{M}_1 sans sortir de Π_1 (ou Π'_1) et rencontrant Γ_1 est constitué de deux segments aboutissant au même point de Γ_1 et constituant le trajet d'un rayon lumineux qui irait de M_1 à \bar{M}_1 en se réfléchissant sur Γ_1 (fig. 12); ceci résulte de l'emploi des dérivés, ou, ce qui est équivalent, des raisonnements sur les coniques qui nous ont servi dans la toute première question dont nous nous sommes occupés dans ce volume. A ce plus court trajet, que je suppose déterminé, correspond le plus court chemin cherché allant de M à \bar{M} ; il est constitué par deux portions de géodésiques situées respecti-

vement sur l'une et l'autre nappe de Δ et se réfléchissant sur Δ à la façon des rayons lumineux.

Si $M_1\bar{M}_1$ rencontre Γ_1 , nous avons déjà dit quel était le plus court chemin de M_1 à \bar{M}_1 en restant dans Π_1 (ou Π'_1); il lui correspond, à condition de l'interpréter comme tracé sur les régions Π_1 et Π'_1 convenables, le plus court chemin de M à \bar{M} . Celui-ci est par suite formé de deux arcs géodésiques tracés sur deux nappes différentes de Δ et d'un arc de Γ ; seulement cette fois, les deux arcs géodésiques sont, ou tous deux des segments de génératrices, ou tous deux des arcs de courbes géodésiques.

Naturellement le choix prévu précédemment pour le cas où Γ est fermée est à considérer aussi, quand M et \bar{M} sont sur les deux nappes de Δ .

Nota: Je me suis borné suivant l'habitude à la considération des courbes données par des fonctions plusieurs fois dérivables, mais les résultats s'étendent à toutes les courbes tracées sur nos développables.

La longueur d'une courbe est en effet, la limite de la somme de segments $M\bar{M}$ petits; or, en posant $\delta u = \bar{u} - u$, en désignant par u_m une valeur voisine de u et \bar{u} , d'ailleurs variable d'une ligne à l'autre, et par ε des infiniments petits, en employant les symboles S de Lamé, (sommes relatives aux trois coordonnées), on a:

$$\begin{aligned} M\bar{M} &= \sqrt{S(\Delta X)^2} = \sqrt{S(\bar{x} + \bar{\alpha}l - x - \alpha l)^2} = \sqrt{S(\delta x + \bar{\alpha}\delta l + l\delta\alpha)^2} \\ &= \sqrt{\delta s^2 + \delta l^2 + 2\delta l S \bar{\alpha}\delta x + 2l S \delta x\delta\alpha + 2l\delta l S \bar{\alpha}\delta\alpha + l^2 S \delta\alpha^2} \end{aligned}$$

avec

$$2\delta l S \bar{\alpha}\delta x = 2\delta l\delta s S \bar{\alpha}\alpha_m = 2\delta l\delta s + \mu\varepsilon,$$

où l'on peut prendre μ inférieur à $\delta l\delta s$;

$$2l S \delta x\delta\alpha = 2l\delta s^2 S \alpha_m \frac{\alpha'_m}{r_m} = \mu\varepsilon, \mu \text{ étant inférieur à } l\frac{\delta s^2}{r};$$

$$2l\delta l S \bar{\alpha}\delta\alpha = 2l\delta l\delta s S \bar{\alpha} \frac{\alpha'_m}{r_m} = \mu\varepsilon, \mu \text{ étant inférieur à } \frac{l\delta l\delta s}{r},$$

$$l^2 S \delta\alpha^2 = l^2\delta s^2 S \left(\frac{\alpha'_m}{r_m}\right)^2 = l^2\frac{\delta s^2}{r^2} + \mu\varepsilon, \mu \text{ étant inférieur à } \frac{l^2\delta s^2}{r^2}.$$

Donc on a :

$$M\bar{M} = \sqrt{(\delta s + \delta l)^2 + l^2 \frac{\delta s^2}{r^2} + v\varepsilon},$$

le reste $v\varepsilon$ étant infiniment petit relativement à la partie principale de l'expression si δs et δl sont infiniment petits; ainsi la longueur d'une courbe quelconque se présente comme la limite d'une somme d'expressions

$$\sqrt{(\delta s + \delta l)^2 + l^2 \left(\frac{\delta s}{r}\right)^2}$$

qui ne diffèrent de celles qui nous avaient servi que par le remplacement des différentielles par des différences.

Nous pouvons donc conclure, comme précédemment, que la correspondance ponctuelle établie entre deux développables Δ et Δ_1 dont les arêtes de rebroussement ont la même première équation intrinsèque, $r =$ fonction de s , conserve la longueur des courbes, de toutes les courbes. Nos résultats sur le plus court chemin entre deux points d'une développable restent valables quand on envisage toutes les courbes de cette développable.

Nous voici ainsi arrivés à ce qui est le problème primordial du calcul des variations: *trouver le plus court chemin entre deux points donnés d'une surface ou plus généralement d'une variété.*

En ce qui regarde ce problème, deux surfaces sont équivalentes quand il existe entre leurs points une correspondance conservant la longueur des courbes, c'est-à-dire quand les deux surfaces sont applicables l'une sur l'autre. Ceci établit un lien entre le problème d'extremum considéré et celui de l'applicabilité des surfaces. Je me permets de profiter de ce lien, quelque fragile qu'il soit, pour sortir des limites strictes de mon sujet et donner un autre extrait de mon cours sur les applications géométriques de l'Analyse. Celui-ci n'a pas eu l'heureuse fortune échue à l'extrait précédent et dont les parties principales ont trouvé place dans les écrits de mes élèves. Pourtant je lui

attache une certaine importance que je vais d'abord expliquer. Par souci d'élégance, mais aussi parfois pour éviter de longs calculs pratiquement inexécutables, les géomètres ont pris l'habitude d'user continuellement de procédés ingénieux; l'un sert pour une équation, puis on l'abandonne et c'est un autre qui permet d'aller au-delà. Regarder certains exposés de géométrie supérieure, c'est assister au tirage d'un véritable feu d'artifice. Il devient alors bien difficile au débutant émerveillé de suivre une pensée; il lui arrive (du moins ce fut parfois mon cas) de méconnaître qu'une analyse simple et méthodique — peut-être fastidieuse et interminable — doive certainement conduire aux mêmes résultats, car la puissance de pensée des hommes ne peut aller au-delà de cette analyse simple. C'est pourquoi il m'a semblé de quelque intérêt de tirer d'une même analyse, presque enfantine, des faits qu'on n'obtient généralement pas par un procédé unique.

Soient S et s deux surfaces applicables l'une sur l'autre, c'est-à-dire telles qu'il existe entre elles une correspondance ponctuelle conservant la longueur des courbes. Nous supposons que ces surfaces sont analytiques ainsi que la correspondance qui définit l'application, ou que, tout au moins, les fonctions intervenant dans la question ont assez de dérivées continues pour que nous puissions utiliser les développements en série illimités ou limités.

Soient O et o deux points homologues de S et s ; rapportons nos deux surfaces respectivement à des axes rectangulaires dont les axes OZ , oz sont les normales à S et s . Nos deux surfaces ont pour équations

$$S \quad Z = \frac{1}{2!} (RX^2 + 2SXY + TY^2) + \dots,$$

$$s \quad z = \frac{1}{2!} (rx^2 + 2sxy + ty^2) + \dots,$$

et la transformation est définie par

$$X = ax + bx + \frac{1}{2!} (cx^2 + 2exy + fy^2) + \frac{1}{3!} (gx^3 + 3hx^2y + 3kxy^2 + ly^3) + \dots$$

$$Y = a'x + b'y + \frac{1}{2!}(c'x^2 + 2e'xy + f'y^2) + \frac{1}{3!}(g'x^3 + 3h'x^2y + 3k'xy^2 + l'y^3) + \dots$$

Nous avons à écrire l'identité

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

identité en dx, dy, x, y ; car, grâce à nos formules, tout s'exprime à l'aide de ces quatre variables.

L'expression de $dx^2 + dy^2 + dz^2$ est la plus simple; c'est

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 + (pdx + qdy)^2 = \\ dx^2 + dy^2 + [dx(rx + sy + \dots) + dy(sx + ty + \dots)]^2. \end{aligned}$$

Mais pour $dX^2 + dY^2 + dZ^2$, il faut, dans l'expression analogue, remplacer dX, dY, X, Y , en fonction de dx, dy, x, y . Pour avoir des calculs simples, nous identifierons séparément les termes en $dx^2, dx dy, dy^2$, en nous bornant d'abord aux termes de degré 0 en x, y , puis à ceux de degré 1, etc...

Les expressions de p et q contiennent x et y au degré 1 au moins, donc aussi celles de P, Q ; quand nous nous occupons de termes de degré 0 ou 1, il suffit de considérer $dx^2 + dy^2$ et $dX^2 + dY^2$ puisque dz^2 et dZ^2 donneraient des termes de degré 2. Des expressions

$$\begin{aligned} dX &= dx \left[a + \frac{1}{1!}(cx + ey) + \frac{1}{2!}(gx^2 + 2hxy + ky^2) + \dots \right] \\ &+ dy \left[b + \frac{1}{1!}(ex + fy) + \frac{1}{2!}(hx^2 + 2kxy + ly^2) + \dots \right], \\ dY &= dx \left[a' + \frac{1}{1!}(c'x + e'y) + \frac{1}{2!}(g'x^2 + 2h'xy + k'y^2) + \dots \right] \\ &+ dy \left[b' + \frac{1}{1!}(e'x + f'y) + \frac{1}{2!}(h'x^2 + 2k'xy + l'y^2) + \dots \right], \end{aligned}$$

nous devons pour le degré 0 ne conserver que les multiplicateurs constants a, b, a', b' de dx et dy ; donc cela nous donne comme identification:

$$\begin{aligned} \text{pour } dx^2 & \quad 1 = a^2 + a'^2, \\ \text{pour } dx dy & \quad 0 = 2ab + 2a'b', \\ \text{pour } dy^2 & \quad 1 = b^2 + b'^2. \end{aligned}$$

Cela exprime que a, a', b, b' , sont les cosinus directeurs de deux directions rectangulaires; donc si l'on choisit convenablement les directions de OX, OY dans leur plan et l'orientation de l'angle XOY , nous aurons

$$a = 1, \quad a' = 0, \quad b = 0, \quad b' = 1;$$

c'est ce que nous supposerons dorénavant.

La possibilité de ce choix montre que l'application conserve les angles; en transportant XOY sur xoy , on fait, en effet, coïncider deux angles en O et o correspondants quelconques.

Pour le degré 1 nous prendrons:

$$\text{à la place de } dX \quad \left[1 + \frac{1}{1!}(cx + ey) \right] dx + \left[\frac{1}{1!}(ex + fy) \right] dy,$$

$$\text{à la place de } dY \quad \left[\frac{1}{1!}(c'x + e'y) \right] dx + \left[1 + \frac{1}{1!}(e'x + f'y) \right] dy;$$

mais, bien entendu, dans dX^2 et dY^2 on ne tiendra compte que des termes du premier degré; donc cela nous donne comme identification:

$$\begin{aligned} \text{pour } dx^2 & \quad 0 = 2c & \quad 0 = 2e \\ \text{pour } dx dy & \quad 0 = 2e + 2c' & \quad 0 = 2f + 2e' \\ \text{pour } dy^2 & \quad 0 = 2e' & \quad 0 = 2f' \end{aligned}$$

$$\text{Ou encore:} \quad c = e = f = c' = e' = f' = 0; \quad \text{ainsi:}$$

$$X = x + \frac{1}{3!}(gx^3 + 3hx^2 y + 3kxy^2 + ly^3) + \dots$$

$$Y = y + \frac{1}{3!}(g'x^3 + 3h'x^2 y + 3k'xy^2 + l'y^3) + \dots \quad 1)$$

1) Ce résultat était évident, puisqu'on devait avoir $dx^2 + dy^2 \equiv dX^2 + dY^2$ aux termes du second degré près.

Si donc on considère une courbe quelconque issue de o

$$x = \alpha t + \beta t^2 + \dots, \quad y = \alpha' t + \beta' t^2 + \dots,$$

il lui correspond la courbe:

$$X = \alpha t + \beta t^2 + \dots, \quad Y = \alpha' t + \beta' t^2 + \dots$$

c'est-à-dire que les courbes x, y, X, Y correspondantes ont respectivement en o et O la même courbure.

Comme on appelle *courbure géodésique* en un de ses points o d'une courbe de s la courbure en o de la projection de cette courbe sur le plan tangent en o à la surface s , le résultat précédent s'exprime ainsi: *l'applicabilité conserve la courbure géodésique.*

Pour le second degré, il faut prendre

$$\begin{aligned} dX &= dx \left[1 + \frac{1}{2!} (gx^2 + 2hxy + ky^2) + \dots \right] \\ &+ dy \left[\frac{1}{2!} (hx^2 + 2kxy + ly^2) + \dots \right], \\ dY &= dx \left[\frac{1}{2!} (g'x^2 + 2h'xy + k'y^2) + \dots \right] \\ &+ dy \left[1 + \frac{1}{2!} (h'x^2 + 2k'xy + l'y^2) + \dots \right]. \end{aligned}$$

De plus il y a lieu de tenir compte de dz et dZ . On prendra:

$$\text{à la place de } dz, \quad (rx + sy) dx + (sx + ty) dy,$$

$$\text{à la place de } dZ, \quad (RX + SY) dX + (SX + TY) dY,$$

c'est-à-dire en réalité:

$$(Rx + Sy) dx + (Sx + Ty) dy.$$

L'identification des termes du second degré donne par conséquent:

$$\text{pour } dx^2 \quad r^2 = R^2 + g, \quad 2rs = 2RS + 2h, \quad s^2 = S^2 + k,$$

$$\text{pour } dxdy \quad 2rs = 2RS + 2h + g', \quad 2rt + 2s^2 = 2RT + 2S^2,$$

$$2st = 2ST + l + k'$$

$$\text{pour } dy^2 \quad s^2 = S^2 + h', \quad 2st = 2ST + 2k', \quad t^2 = T^2 + l'.$$

Ce tableau nous donne, quant aux formules de transformation, les conditions

$$g' = h, \quad h' = k, \quad k' = l,$$

conditions du troisième ordre dont nous ne nous occupons pas davantage; d'autre part il nous donne pour la première fois une condition relative à s et S . La comparaison des trois formules de la seconde diagonale du tableau fournit en effet la relation:

$$rt - s^2 = RT - S^2$$

que nous allons interpréter. Il suffit pour cela de se rappeler que les rayons de courbure principaux de s en o sont les racines de l'équation:

$$\left(r - \frac{1}{R}\right)\left(t - \frac{1}{R}\right) = s^2 \quad 1)$$

ou

$$\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R}(r+t) + rt - s^2 = 0;$$

$rt - s^2$ est donc le produit des inverses des rayons de courbure principaux en o . Ce produit a été appelé par Gauss la courbure totale de s en o ; donc *l'applicabilité conserve la courbure totale* ²⁾.

1) On l'obtiendra, par exemple, par l'emploi de la méthode que j'ai dite être la plus directe et naturelle au début de cette suite de remarques et de citations sur les maxima et minima.

2) Ceci était complété par l'examen de conditions suffisantes pour que deux surfaces soient applicables; mais cela m'entraînerait ici tout à fait hors du cadre de notre étude. Au reste, dans les cours élémentaires sur les applications de l'Analyse à la Géométrie, on se contente le plus souvent d'établir les résultats partiels que je viens de donner.

CHAPITRE V

La méthode classique du calcul des variations

Avant de donner une idée plus précise de la méthode directe dans le calcul des variations (Chap. VI), je dois, puisqu'il s'agit de comparer deux procédés, parler du calcul des variations classique. C'est par lui que je commence parce qu'il a été le point de départ et le procédé unique tant qu'on n'en avait pas reconnu les lacunes. L'exposé que je vais en donner, peu différent de celui des traités, est extrait des notes préliminaires d'un cours que j'ai fait au Collège de France « sur les problèmes en marge du calcul des variations ». Certains étudiants, frappés des difficultés rencontrées dans les applications en apparence les plus simples du calcul des variations, déclaraient alors, avec la belle intransigeance de la jeunesse: « Le calcul des variations classique n'existe pas ». C'est pourquoi j'ai tenu à exposer tout d'abord la méthode de Lagrange et Euler afin de montrer que, malgré ses lacunes logiques et toutes ses imperfections, elle joue dans les problèmes de son ressort le même rôle que la méthode de Fermat pour les problèmes d'extremum algébrique. Certes une méthode complète reste à trouver, mais ni le procédé classique, ni le procédé direct ne la donne; il paraît probable qu'ils interviendront conjointement dans la constitution de la méthode désirée.

a et b étant deux nombres fixes donnés, $F(x, u, v)$ une fonction donnée, on considère l'intégrale

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx,$$

dans laquelle y est une fonction à trouver, définie de a à b , continue ainsi que sa dérivée première. Pour F , on suppose que c'est une fonction à dérivées première et seconde continues, définies

pour toutes les valeurs de x , u , v , nécessaires à considérer. Il faut trouver $y(x)$ de façon que $I(y)$ atteigne l'un de ses extrema, disons son minimum pour fixer le langage.

L'idée mise en œuvre est remarquablement simple. Soit $y_0(x)$ la fonction, supposée existante, donnant le minimum; pour toute fonction de deux variables $y(x, t)$ telle que l'on ait $y(x, 0) \equiv y_0(x)$, $t = 0$ donnera le minimum de la fonction $I[y(x, t)]$ dépendant de la seule variable t . La méthode de Fermat appliquée à la recherche de ce minimum donnera une relation que devra vérifier $y_0(x)$ et qui jouera le rôle de l'équation dérivée ordinaire.

Cette relation contient la fonction $y(x, t)$ à laquelle il convient de laisser, sinon toute sa généralité, du moins une grande généralité, car il est clair que $y_0(x)$ peut donner le minimum cherché pour $I[y(x, t)]$ sans le donner pour $I[y(x)]$. Peut-on du moins espérer qu'il suffira d'envisager une famille restreinte de $y(x, t)$? Non, car supposons seulement qu'il s'agisse du minimum de la fonction de deux variables $\varphi(t, t_1) = I[y(x, t, t_1)]$, $y(x, t, t_1)$ étant donnée. La méthode classique revient à écrire d'abord que $t = t_1 = 0$, par exemple, donne le minimum pour $y(x, t, 0)$ et $y(x, 0, t_1)$. Mais supposons même que le point $0, t = t_1 = 0$, donne le minimum pour toute droite issue de O , donc pour toute fonction $y(x, t, kt)$, k fixe quelconque; il n'en résulte nullement que 0 donnera le minimum de $\varphi(t, t_1)$. Prenons en effet deux circonférences tangentes intérieurement en O ; à l'extérieur de la circonférence extérieure C_1 et sur cette circonférence, prenons pour $\varphi(t, t_1)$ une fonction continue ayant son minimum en O , $\varphi(t, t_1) = \sqrt{t^2 + t_1^2}$ par exemple; à l'intérieur de la circonférence intérieure C_2 et sur elle, faisons de même, les deux fonctions étant égales en O , par exemple, encore $\varphi = \sqrt{t^2 + t_1^2}$; entre C_1 et C_2 , prenons pour φ une fonction continue se raccordant avec les deux autres sur C_1 et C_2 , mais n'ayant pas l'origine pour minimum, par exemple, sur chaque droite issue de O et coupant C_1 et C_2 en A_1 et A_2 , φ linéaire de A_1 et de A_2 jusqu'au milieu B de $A_1 A_2$ et égale en B à $-OB$. Ainsi, la considération de droites passant par O ne suffit pas; ni celle des coniques, il suffirait en effet de remplacer C_1 et C_2 par deux courbes entre lesquelles ne passe aucune conique; ni celle des courbes analytiques, car

il suffirait de remplacer C_1 et C_2 par deux courbes qui, au voisinage de O , soient

$$y = e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad y = 2e^{-\frac{1}{x^2}}. \quad 1)$$

On reconnaîtra facilement qu'il suffirait de se borner à la considération des courbes $x(\theta)$, $y(\theta)$ données par deux fonctions monotones, mais c'est là une famille très vaste de courbes et il faudrait définir $\varphi(t, t_1)$ pour toutes ces courbes.

Ainsi, la méthode des dérivées qui ne suffit pas pour obtenir le minimum d'une fonction d'une seule variable à coup sûr, qui ne fournit que des conditions nécessaires, est encore moins satisfaisante quand le nombre des variables augmente. Mais le problème devenant alors plus compliqué, les renseignements qu'elle fournit conservent à peu près la même valeur relative. Quand nous passons au calcul des variations, il en est de même, l'emploi des dérivées ne fournit que des conditions nécessaires, les compléments indispensables s'accroissent, mais vu la difficulté accrue des questions, l'intérêt des résultats fournis par l'emploi des dérivées reste du même ordre.

Il faut donc conserver à $y(x, t)$ sa généralité; mais alors la relation que donne la dérivée de $I(t)$ contient $y(x, t)$ et l'on ne sait l'utiliser. Au contraire, chaque fonction $y(x, t)$ construite algébriquement à partir de $y_0(x)$ et de t donnera une relation intégral-différentielle en $y_0(x)$ que l'on peut espérer employer. Le cas le plus favorable serait naturellement celui où l'on aurait une équation différentielle; c'est précisément ce à quoi Lagrange était parvenu dans des cas particuliers et Euler dans le cas général.

On choisit $y(x, t)$ linéaire en t :

$$y(x, t) = y_0(x) + t\Delta y(x),$$

$\Delta y(x)$ étant une fonction ayant les mêmes continuité et dérivabilité que $y_0(x)$; les fonctions de x données par $y(x, t)$

1) Cet artifice peut de même servir à prouver qu'une fonction peut être en un point O continue sur chaque droite ou sur chaque courbe analytique passant par O sans être continue par rapport à l'ensemble des variables dont elle dépend.

pour les diverses valeurs de t constituent en somme une droite de l'espace fonctionnel $y(x)$.

L'analogie avec le cas des fonctions de variables se poursuit donc. Avec ce choix, on aura une relation intégrô-différentielle; pour avoir une équation différentielle, il faut ne faire intervenir qu'une valeur de x , d'où l'idée de prendre $\Delta y(x) \equiv 0$ sauf au voisinage de cette valeur de x . (Je m'écarterai quelque peu ici des considérations classiques. Cette modification comme toutes celles de cet article a pour but, en utilisant des considérations particulières élémentaires, de permettre de mieux suivre l'ensemble des idées, depuis les principes jusqu'aux résultats, tandis que des considérations plus générales, obligeant à recourir à des résultats techniques, masquent quelque peu la suite des raisonnements, précisément parce que les résultats techniques proviennent eux-mêmes d'un raisonnement. Par contre, cela permet des démonstrations plus brèves. Comme le disait Bouquet: « Les démonstrations courtes ont un avantage: être courtes; les démonstrations longues ont un avantage: être longues. »)

Nous prendrons $\Delta y(x)$ comme ayant la forme indiquée par la figure:

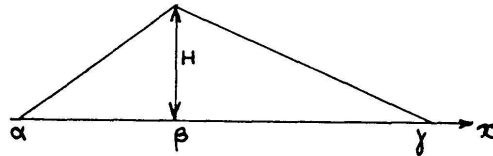


Fig. 13

Cette forme entraîne pour $\frac{d}{dx} \Delta y(x) = \Delta y'(x)$ des points de discontinuité de première espèce; cela n'est nullement gênant. Soit $\delta y \equiv \Delta y$ en dehors d'un petit intervalle $\alpha - \alpha_0, \alpha + \alpha_0$ et à l'intérieur de cet intervalle tel que δy et $\delta y'$ soient continus partout et uniformément bornés. Alors:

$$\begin{aligned} I(y + \Delta y) &= \\ I(y + \delta y) + \int_{\alpha - \alpha_0}^{\alpha + \alpha_0} [F(x, y + \Delta y, y' + \Delta y') - F(x, y + \delta y, y' + \delta y')] dx \\ &= I(y + \delta y) + 2\theta\alpha_0 \mathcal{M}, \quad |\theta| < 1, \end{aligned}$$

\mathcal{M} étant facilement majorable; ainsi $I(y + \Delta y)$ et $I(y + \delta y)$ peuvent se remplacer dans la recherche du minimum.

On peut faire tendre Δy vers zéro de bien des manières.

1. Prenons d'abord $H = th$, $\alpha = \beta - h$, $\gamma = \beta + h$, h étant fixe.

Pour $h = 0$, $\frac{\partial I(y_0 + \Delta y)}{\partial t} = 0$, et pour $h \neq 0$, on doit avoir cette même égalité pour $t = 0$. Or :

$$I(y_0 + \Delta y) = \int_a^{\beta-h} F(x, y_0, y'_0) dx + \int_{\beta-h}^{\beta} F[x, y_0 + t(x - \beta + h), y'_0 + t] dx \\ + \int_{\beta}^{\beta+h} F[x, y_0 + t(\beta + h - x), y'_0 - t] dx + \int_{\beta+h}^b F(x, y_0, y'_0) dx.$$

$$\frac{\partial}{\partial t} I(y_0 + \Delta y) = \int_{\beta-h}^{\beta} \left[(x - \beta + h) \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y'} \right] dx \\ + \int_{\beta}^{\beta+h} \left[(\beta + h - x) \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y'} \right] dx.$$

Dans la première intégrale, les variables sont :

$$x, y_0 + t(x - \beta + h), y'_0 + t,$$

dans la seconde

$$x, y_0 + t(\beta + h - x), y'_0 - t,$$

y et y' étant naturellement prises pour la valeur de x considérée. Pour $t = 0$, ces valeurs sont x, y_0, y'_0 ; donc on doit avoir pour ces valeurs :

$$\int_{\beta-h}^{\beta} \left[\frac{\partial F}{\partial y} (x - \beta + h) + \frac{\partial F}{\partial y'} \right] dx + \int_{\beta}^{\beta+h} \left[\frac{\partial F}{\partial y} (\beta + h - x) - \frac{\partial F}{\partial y'} \right] dx = 0,$$

quel que soit h . La dérivée du premier membre par rapport à h est donc aussi identiquement nulle. Or, grâce aux hypothèses

faites sur la continuité et la dérivabilité de la fonction donnée F , elle s'écrit :

$$\int_{\beta-h}^{\beta+h} \frac{\partial F}{\partial y_0} dx - \frac{\partial F(\beta-h, y_0, y'_0)}{\partial y'_0} + \frac{\partial F(\beta+h, y_0, y'_0)}{\partial y'_0} = 0,$$

ou

$$\int_{\beta-h}^{\beta+h} \frac{\partial F}{\partial y_0} dx + \frac{\partial F(\beta+h, y_0, y'_0)}{\partial y'_0} = \int_{\beta-h}^{\beta+h} \frac{\partial F}{\partial y_0} dx + \frac{\partial F(\beta-h, y_0, y'_0)}{\partial y'_0}.$$

D'où la condition nécessaire :

$$\int \frac{\partial F}{\partial y_0} dx + \frac{\partial F(x, y_0, y'_0)}{\partial y'_0} = \text{constante},$$

ou

$$\frac{\partial F}{\partial y_0} + \frac{d}{dx} \frac{\partial F(x, y_0, y'_0)}{\partial y'_0} = 0;$$

car $\frac{\partial F}{\partial y_0}$ existant et la dérivée d'une constante étant nulle, $\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_0}$ existe bien.

Nous venons d'obtenir *l'équation différentielle d'Euler*, pour pouvoir la développer, supposons que la fonction donnée F admette des dérivées secondes continues. Alors

$$\frac{\partial F[x+h, y_0(x+h), y'_0(x+h)]}{\partial y'_0} - \frac{\partial F[x, y_0(x), y'_0(x)]}{\partial y'_0} =$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'_0} + \frac{\partial^2 F}{\partial y_0 \partial y'_0} \frac{\Delta y}{h} + \frac{\partial^2 F}{\partial y'_0{}^2} \frac{\Delta y'}{h},$$

le second membre étant pris pour une valeur $x + \theta h$ comprise entre x et $x+h$. Faisons tendre h vers zéro; tous les termes du second membre, sauf peut-être le dernier, tendent vers des limites. Donc celui-ci $\frac{\partial^2 F}{\partial y'_0{}^2} \frac{\Delta y'}{h}$ a aussi une limite. Ceci peut se produire de deux façons :

ou bien $\frac{\partial^2 F}{\partial y_0'^2}$ est nulle pour la valeur x , ou bien $\frac{\Delta y'}{h}$ a une limite qui est y_0'' . Donc: *en tout point, qui n'est pas à la frontière du champ de variation des variables x, y, y' , de la courbe $y = y_0(x)$ donnant le minimum, on a soit:*

$\frac{\partial^2 F}{\partial y_0'^2} = 0$, soit l'équation d'Euler développée

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y_0'} + \frac{\partial^2 F}{\partial y_0 \delta y_0'} y_0' + \frac{\partial^2 F}{\partial y_0'^2} y_0'' = 0.$$

2. Conservons les mêmes notations, mais intervertissons les rôles de t et de h ; t sera fixe et h variable; h ne pouvant devenir négatif, nous aurons seulement à écrire que $\frac{\partial I}{\partial h}$ est positif ou nul pour $h = 0$. Or

$$\frac{\partial I}{\partial h} = -F(\beta - h, y_0, y_0')$$

$$+ \left\{ F(\beta - h, y_0, y_0' + t) + \int_{\beta - h}^{\beta} t \frac{\partial F[x, y_0 + t(x - \beta + h), y_0' + t]}{\partial y_0} dx \right\}$$

$$+ \left\{ F(\beta + h, y_0, y_0' - t) + \int_{\beta}^{\beta + h} t \frac{\partial F[x, y_0 + t(\beta + h - x), y_0' - t]}{\partial y_0} dx \right\}$$

$$- F(\beta + h, y_0, y_0').$$

D'où, en faisant $h = 0$, on a, quel que soit t ,

$$F(\beta, y_0, y_0' + t) + F(\beta, y_0, y_0' - t) - 2F(\beta, y_0, y_0') \geq 0.$$

Ainsi, en tout point, qui n'est pas à la frontière du champ de variation des variables, de la courbe $y = y_0(x)$ donnant le minimum, la fonction $F(x, y_0, y')$ de la variable y' est une fonction concave.

En particulier, si F est analytique ou possède assez de dérivées, la première des dérivées $\frac{\partial^p F}{\partial y_0'^p}$ non nulle doit être positive

et fournie par une valeur paire de p . Si l'on se borne aux dérivées secondes, *on ne peut conclure à l'existence du minimum que si* $\frac{\partial^2 F}{\partial y_0'^2}$ *est positif ou nul; c'est la condition de Legendre.*

Par une extension du qualificatif extrémal, on appelle toute solution de l'équation d'Euler une courbe extrémale. Lorsque le long d'une telle courbe $\frac{\partial^2 F}{\partial y_0'^2}$ est positif, la courbe est la seule pouvant donner le minimum strict. Si le long de l'extrémale $\frac{\partial^2 F}{\partial y_0'^2}$ est positif ou nul, on ne peut plus affirmer que cette courbe est la seule pouvant donner localement le minimum. C'est le cas du minimum large. Legendre appelle réguliers les problèmes où $\frac{\partial^2 F}{\partial y_0'^2}$ garde un signe constant. Il y a les problèmes réguliers positifs où l'équation d'Euler sert à la recherche des minima et les problèmes réguliers négatifs où elle sert à la recherche des maxima. On voit à quel point se poursuit l'analogie avec le cas des fonctions de variables.

3. Combinons les deux modes précédents de choix en posant $\alpha = \beta - h$, $H = ht$, $\gamma = \beta + \frac{ht}{q}$; t et q devront être de même signe, supposons-les positifs pour fixer les idées, le cas où ils seraient négatifs se traiterait de même.

Il nous faut écrire que $\frac{\partial I}{\partial t}$ est positif ou nul, pour $t = 0$, à droite; il suffira donc d'écrire que cette quantité est positive ou nulle pour t tendant vers zéro en décroissant. Or

$$I = \int_a^{\beta-h} F(x, y_0, y_0') dx + \int_{\beta-h}^{\beta} F\left[x, y_0 + t(x - \beta + h), y_0' + t\right] dx$$

$$+ \int_{\beta}^{\beta + \frac{ht}{q}} F\left[x, y_0 + t\left(\beta + \frac{ht}{q} - x\right), y_0' - t\right] dx + \int_{\beta + \frac{ht}{q}}^b F(x, y_0, y_0') dx,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial t} &= \int_{\beta-h}^{\beta} (x-\beta+h) \frac{\partial F [x, y_0 + t(x-\beta+h), y'_0 + t]}{\partial y_0} dx \\ &\quad + \int_{\beta-h}^{\beta} \frac{\partial F [x, y_0 + t(x-\beta+h), y'_0 + t]}{\partial y'_0} dx \\ &\quad + \int_{\beta}^{\beta + \frac{ht}{q}} \left(\beta + \frac{2ht}{q} - x \right) \frac{\partial F \left[x, y_0 + t \left(\beta + \frac{ht}{q} - x \right), y'_0 - q \right]}{\partial y_0} dx \\ &\quad + \frac{h}{q} F \left(\beta + \frac{ht}{q}, y_0, y'_0 - q \right) - \frac{h}{q} F (\beta, y_0, y'_0); \end{aligned}$$

d'où, pour $t = 0$,

$$\begin{aligned} &\int_{\beta-h}^{\beta} (x-\beta+h) \frac{\partial F (x, y_0, y'_0)}{\partial y_0} dx + \int_{\beta-h}^{\beta} \frac{\partial F (x, y_0, y'_0)}{\partial y'_0} dx \\ &\quad + \frac{h}{q} F (\beta, y_0, y'_0 - q) - \frac{h}{q} F (\beta, y_0, y'_0) \geq 0. \end{aligned}$$

Pour $h = 0$, ceci est identiquement nul, nous pouvons donc écrire que, pour $t = h = 0$, $\frac{\partial^2 I}{\partial t \partial h}$ est positif ou nul. Or

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 I}{\partial t \partial h} &= \int_{\beta-h}^{\beta} \frac{\partial F (x, y_0, y'_0)}{\partial y_0} dx + \frac{\delta F (\beta-h, y_0, y'_0)}{\delta y'_0} \\ &\quad + \frac{1}{q} F (\beta, y_0, y'_0 - q) - \frac{1}{q} F (\beta, y_0, y'_0), \end{aligned}$$

donc

$$\frac{\partial F}{\partial y'_0} (\beta, y_0, y'_0) + \frac{1}{q} F (\beta, y_0, y'_0 - q) - \frac{1}{q} F (\beta, y_0, y'_0) \geq 0,$$

ou, en multipliant par q , en posant $y'_0 - q = p$ et $\beta = x$,

$$E(x, y_0, y'_0, p) = F(x, y_0, p) - F(x, y_0, y'_0) - (p - y'_0) F'_{y'_0}(x, y_0, y'_0) \geq 0.$$

C'est la *condition de Weierstrass*; elle doit être remplie dans les mêmes conditions que les deux autres. Le nombre p qui y figure est quelconque.

Je ne puis continuer à donner ici l'exposé du calcul des variations en somme fort complet qui était le début de mon cours; bien que bref, il nous entraînerait trop loin. Ce qui suit est la réunion de fragments dispersés dans ce cours et relatifs à ce qu'on appelle les conditions suffisantes.

Les Δy qui nous ont servi sont très particuliers. Quelle est la portée des conditions qu'ils nous ont fournies? La condition de Legendre étant une conséquence de celle de Weierstrass, nous ne nous occuperons que de 1 et 3. Dans 1, Δy et $\Delta y'$ tendent simultanément vers zéro, on a affaire à une continuité d'ordre 1; dans 3, $\Delta y'$ ne tend pas vers zéro, on a affaire à une continuité d'ordre 0. Or, toute fonction continue δy à dérivée continue à laquelle on fera jouer le rôle de Δy est infiniment approchée par une somme de Δy à continuité d'ordre 0; donc les conditions d'Euler et de Weierstrass entraînent bien le minimum de $y_0(x) + \lambda \delta y$, c'est-à-dire ce qu'on appelle le minimum de Lagrange. C'est le minimum sur toute droite issue de $y_0(x)$ de l'espace fonctionnel $y(x)$; mais nous avons vu que ce minimum n'entraîne pas nécessairement celui que nous cherchons.

Lorsqu'il s'agit de fonctions algébriques, nous savons que les conditions suffisantes pour le minimum sont obtenues en supposant que les conditions nécessaires sont vérifiées aussi au voisinage des points où elles sont indispensables; ainsi, pour le minimum d'une fonction d'une variable, on suppose $F''_{x^2} \geq 0$ dans tout le voisinage du point pouvant donner le minimum. Nous allons retrouver le fait analogue dans le calcul des variations.

Supposons qu'entre les deux points donnés, il y ait une solution de l'équation d'Euler, et pour qu'il n'y ait aucune ambiguïté relativement à l'extrémale pouvant donner le minimum, supposons qu'il n'y ait qu'une extrémale joignant les deux points ¹⁾. Pour qu'il ne s'agisse pas seulement d'une heureuse chance, supposons que nous soyons dans un champ d'extré-

1) La condition de Jacobi à laquelle il a été fait allusion et qui ne trouvera pas place dans cet exposé est relative à cette ambiguïté.

males, c'est-à-dire dans une région du plan telle que par deux de ses points il passe toujours une solution de l'équation d'Euler et une seule.

Soit $y = y_0(x)$ l'extrémale du champ joignant les deux points donnés. Nous voulons comparer $I(y_0)$ à $I(Y)$, $y = Y(x)$ étant une autre courbe joignant les deux points donnés. Soit la famille d'extrémales $y(x, t)$ telle que $y_0(x) \equiv y(x, 0)$; quels que soient x_1 et x_2 sur $y(x, t)$, on a :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} F[x, y(x, t), y'(x, t)] dx = \\ & = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial F[x, y(x, t), y'(x, t)]}{\partial y} \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial F[x, y(x, t), y'(x, t)]}{\partial y'} \frac{\partial y'(x, t)}{\partial t} \right\} dx \\ & = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{d}{dx} \frac{\partial F[x, y(x, t), y'(x, t)]}{\partial y'} \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial F[x, y(x, t), y'(x, t)]}{\partial y'} \frac{\partial y'(x, t)}{\partial t} \right\} dx \\ & = \left[\frac{\partial F[x, y(x, t), y'(x, t)]}{\partial y'} \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right]_{x_1}^{x_2}. \end{aligned}$$

Partageons (a, b) en intervalles partiels (x_i, x_{i+1}) et désignons par t_i la valeur telle que $y(x_i, t_i) = Y(x_i)$.

On aura :

$$\begin{aligned} I(Y) - I(y_0) &= \sum \int_{x_i}^{x_{i+1}} \{F(x, Y, Y') - F[x, y(x, t_i), y'(x, t_i)]\} dx \\ &+ \sum \int_{x_i}^{x_{i+1}} \{F[x, y(x, t_i), y'(x, t_i)] - F(x, y_0, y'_0)\} dx \end{aligned}$$

D'après ce qui précède, le dernier terme s'écrit encore

$$\begin{aligned} & \sum \int_0^{t_i} \left[\frac{\partial F [x, y(x, t), y'(x, t)]}{\partial y'} \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right]_{x_i}^{x_{i+1}} \\ &= \sum \int_0^{t_i} \frac{\partial F [x_{i+1}, y(x_{i+1}, t), y'(x_{i+1}, t)]}{\partial y'} \frac{\partial y(x_{i+1}, t)}{\partial t} dt \\ & - \sum \int_0^{t_i} \frac{\partial F [x_i, y(x_i, t), y'(x_i, t)]}{\partial y'} \frac{\partial y(x_i, t)}{\partial t} dt \\ &= \sum \int_{y(x_{i+1}, 0)}^{y(x_{i+1}, t_i)} \frac{\partial F [x_{i+1}, y(x_{i+1}, t), y'(x_{i+1}, t)]}{\partial y'} dy \\ & - \sum \int_{y(x_i, 0)}^{y(x_i, t_i)} \frac{\partial F [x_i, y(x_i, t), y'(x_i, t)]}{\partial y'} dy; \end{aligned}$$

t étant cette fois la fonction implicite de x et de y telle que $y(x, t) \equiv y$; nous poserons $\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} = u(x, y)$. Alors, en désignant par ε la contribution de termes extrêmes des sommes précédentes et groupant autrement les termes, les sommes précédentes s'écrivent

$$\varepsilon + \sum \int_{y(x_i, t_i)}^{y(x_i, t_{i-1})} \frac{\partial F(x_i, y, u)}{\partial u} dy.$$

Or, l'intervalle d'intégration est:

$$y(x_i, t_{i-1}) - y(x_i, t_i) = [y(x_i, t_{i-1}) - y(x_{i-1}, t_{i-1})] + [Y(x_{i-1}) - Y(x_i)],$$

d'où par le théorème des accroissements finis, avec un nouvel ε

$$[u(x_i, t_{i-1}) - Y'(x_i) + \varepsilon](x_i - x_{i-1}).$$

Quand on augmente indéfiniment le nombre des intervalles (x_{i-1}, x_i) en les faisant tendre uniformément vers zéro, la limite de l'expression est :

$$- \int_a^b (Y' - u) \frac{\partial F(x, Y, u)}{\partial u} dx$$

et l'on a

$$\begin{aligned} I(Y) - I(y_0) &= \int_a^b \left\{ F(x, Y, Y') - F(x, Y, u) - (Y' - u) \frac{\partial F(x, Y, u)}{\partial u} \right\} dx \\ &= \int_a^b E(x, Y, u, Y') dx. \end{aligned}$$

Ainsi, si dans le voisinage de l'extrémale $y = y_0(x)$, on a constamment $E(x, Y, u, p) \geq 0$, c'est-à-dire si la condition de Weierstrass est remplie dans tout ce voisinage, l'extrémale donne bien un minimum, qui est strict si l'on a toujours affaire à l'inégalité $E(x, Y, u, p) > 0$ ¹⁾.

¹⁾ Il existe de très élégantes démonstrations de cette condition suffisante, celle de M. Hilbert, par exemple. J'ai voulu montrer que les conditions suffisantes peuvent, comme les nécessaires, être déduites d'un calcul patient de $I(Y)$ et $I(y_0)$. Ici, il aurait été plus élégant de se servir de la décomposition de Y déjà utilisée pour les conditions nécessaires; cela est possible, mais je n'ai pas su le faire brièvement.

CHAPITRE VI

La méthode directe du Calcul des Variations

Bien qu'une très faible partie des ressources que fournit la méthode classique du Calcul des Variations ait seule été exposée dans ce qui précède, on a dû comprendre que ces ressources sont bien, comme je l'ai dit, aussi importantes que celles données par les dérivées dans les problèmes de minimum ordinaire. En même temps, on a pu noter que la lacune logique de ces deux méthodes (qu'on peut appeler dans l'un ou l'autre cas : méthodes des dérivées) est la même : la méthode des dérivées détermine, totalement ou partiellement, l'élément qui peut être minimisant, mais ne prouve pas que cet élément donne effectivement un minimum ; la méthode suppose donc acquise à l'avance la preuve que l'extremum envisagé est atteint. Or la méthode directe se propose précisément de construire immédiatement l'élément minimisant, laissant au besoin à plus tard le soin de bien préciser sa détermination. Il semble donc que la réunion des deux méthodes forme un tout logiquement complet. Les choses sont malheureusement moins simples, comme on le verra. Pourtant la méthode directe vient heureusement au secours de la méthode classique.

Il a déjà été parlé des origines lointaines de cette méthode directe. Pour qu'elle prenne une forme précise, il ne faut pas cependant remonter plus haut que les objections faites par Weierstrass à la théorie des fonctions abéliennes de Riemann. Celui-ci s'appuyait sur la solution de ce problème de minimum connu sous le nom de problème de Dirichlet. Il admettait que le minimum est atteint, comme l'avait fait, avant lui, Dirichlet et Gauss. Weierstrass, à cette occasion, introduisit la distinction dont nous avons parlé entre borne inférieure et minimum, et bien qu'il s'agisse là d'un problème du Calcul des Variations, ce lui fut l'occasion de créer la méthode directe, non pour ce calcul,

mais pour les problèmes de minimum ordinaire. Cette méthode, qui nous a déjà quelque peu servi, peut être précisée comme il suit.

Soit une fonction $F(P)$ dépendant d'un point P . Pour en trouver le minimum, on considère une suite de points $P_1, P_2, \text{etc...}$ telle que $F(P_1), F(P_2) \text{etc...}$ tendent vers la borne inférieure des valeurs que puisse prendre $F(P)$ (suite minimisante). On considère un point P_0 , limite des points de la suite. La valeur $F(P_0)$ si F est continue en P_0 est bien la borne inférieure considérée, et par suite le minimum est atteint pour la position P_0 de \mathcal{P} .

La méthode directe pour le Calcul des Variations repose sur un principe correspondant exactement à celui qui vient d'être indiqué. Soit une quantité $F(P)$, P étant maintenant une fonction d'une ou plusieurs variables, ou même un ensemble de fonctions. F est appelée une fonctionnelle d'après une dénomination due à M. Hadamard. On considère une suite de fonctions $P_1, P_2, \text{etc...}$ telle que $F(P_1), F(P_2) \text{etc...}$ tendent vers la borne inférieure des valeurs que prend la fonctionnelle F (suite minimisante). On prend une fonction P_0 limite des fonctions $P_1, P_2, \text{etc...}$. La valeur $F(P_0)$ moyennant une certaine continuité de F en P_0 est bien la borne inférieure considérée, donc le minimum est atteint pour la détermination P_0 de P .

Cette méthode a tout d'abord été indiquée par Arzela dans une note fort remarquable et qui néanmoins passa inaperçue au point que, quand M. Hilbert retrouvant le principe de la méthode directe l'exposa au Congrès de Zurich en 1897, il ne fit en quelque sorte que reproduire la note d'Arzela qu'il ignorait, alors que, possédant des résultats très personnels et profonds sur le problème de Dirichlet, il aurait pu la prolonger. Ce n'est que quelques années plus tard, quand Arzela se décida à signaler modestement à quelques amis sa priorité, que justice put lui être rendue. C'est donc à Arzela et à M. Hilbert qu'il convient de faire remonter la méthode directe du Calcul des Variations. Encore n'est-ce qu'à partir des travaux d'Hilbert, lesquels eurent immédiatement un retentissement considérable, que l'on se mit à étudier comme il le méritait ce procédé nouveau.

Il exige que l'on effectue certaines opérations dont nous allons examiner la possibilité. Il faut d'abord prendre une suite mini-

misante $P_1, P_2, \text{etc...}$ Une telle suite existe toujours. Il faut ensuite considérer un élément-limite P_0 de cette suite. Or existe-t-il un tel élément-limite ? La proposition connue sous le nom de théorème de Bolzano Weierstrass prouve l'existence de P_0 lorsque les P sont des points situés dans une partie bornée de l'espace. Donc la considération de P_0 ne présente pas de difficulté quand il s'agit d'une fonction de points pourvu qu'on ne l'envisage que dans une région bornée. Au contraire, s'il s'agit d'une fonctionnelle, si donc les P désignent des fonctions, une suite infinie de fonctions même bornée dans son ensemble n'a pas nécessairement une fonction-limite. Il en est ainsi par exemple pour $P_n = \sin nx$. Un travail d'Ascoli fournit cependant un résultat à rapprocher du théorème de Bolzano-Weierstrass. On appelle fonctions également continues, par exemple dans le cas d'une variable t , les fonctions $f_1(t), f_2(t), \text{etc...}$ qui, quel que soit ε positif, admettent un η tel que l'on ait

$$|f_i(t+h) - f_i(t)| < \varepsilon$$

dès que l'on a $|h| < \eta$, η étant indépendant de i . Le théorème d'Ascoli s'énonce ainsi: une suite de fonctions également continues et bornées dans leur ensemble admet une fonction-limite. En effet, prenons des valeurs de t en infinité dénombrable et réparties dans tout l'intervalle borné que l'on considère. Soient $t_1, t_2 \text{ etc...}$ ces valeurs. Parmi les f_i , choisissons une suite partielle f'_j telle que les f'_j de t_1 convergent, ce qui est possible puisqu'il s'agit de fonctions bornées dans leur ensemble. Dans la suite des f'_j , prenons une suite partielle f''_k telle que les f''_k de t_2 convergent, etc... et prenons enfin la suite $f_1, f'_1, f''_1 \text{ etc...}$ Il est clair que cette suite converge pour chacun des t_n . Or, soit maintenant une valeur θ de t et prenons un intervalle $\theta - \eta, \theta + \eta$, η étant le nombre correspondant à un ε choisi. Les nombres $f(\theta), f'_1(\theta), \text{etc...}$ diffèrent de moins de ε de la limite de la suite $f_1, f'_1, \text{etc...}$ pour la valeur t_n , cette valeur t_n étant comprise dans l'intervalle $\theta - \eta, \theta + \eta$. Or nous pouvons prendre ε aussi petit que nous voulons, donc la suite $f_1(\theta), f'_1(\theta), \text{etc...}$ converge, et vers une valeur qui diffère de la limite obtenue pour t_n de moins de ε . Donc le théorème d'Ascoli est démontré et l'on voit que la fonc-

tion-limite fait partie de la même famille de fonctions également continues que les fonctions de départ. En particulier, si l'on a affaire à une suite de courbes situées dans une région bornée de l'espace et toutes de longueur au plus égale à un nombre fini S , il suffit de prendre pour paramètre de représentation l'arc s pour que les fonctions définissant la courbe soient également continues et que par suite l'application du théorème d'Ascoli montre que ces courbes ont une courbe-limite de longueur d'ailleurs au plus égale à S . Ainsi, dans le Calcul des Variations, pourvu qu'on introduise les restrictions nécessaires pour être dans le cas d'égale continuité, l'élément-limite P_0 existe et jusqu'ici il n'y a donc pas de différence essentielle entre les deux sortes de problèmes de minimum envisagés.

Il faut ensuite se servir d'une condition de continuité qui doit être remplie en P_0 pour en déduire que $F(P_0)$ est bien la valeur du minimum. Comme sur P_0 , on ne connaît rien d'autre que son existence, il faudra naturellement supposer que la condition de continuité en question est remplie pour chaque choix possible de P . S'il s'agit d'une fonction de points $F(P)$ dans les problèmes de minimum qu'on se propose, F est toujours supposée continue partout et par suite il n'y a aucune difficulté. Mais dans le cas de fonctionnelles, la continuité de la fonctionnelle $F(P)$ est tout-à-fait exceptionnelle, les plus simples exemples le montrent. Ainsi la longueur d'une courbe n'est nullement la limite des longueurs des courbes infiniment voisines. Ceci pourtant n'avait arrêté ni Arzela ni Hilbert, car les propriétés des longueurs sont connues et simples et l'on pouvait, sans invoquer une continuité, conclure que, cherchant le plus court chemin d'un point à un autre sur une surface, la méthode d'Ascoli permettait bien de l'obtenir. Mais, pour les cas un peu plus généraux, il fallait avoir recours à une continuité, laquelle, nous venons de le dire, n'existe pas.

Dans ma thèse (Intégrale-Longueur-Aire; *Annali di Matematica*, 1902), j'ai envisagé une sorte de continuité qui permet de conclure dans bien des cas. Baire avait décomposé la notion de continuité des fonctions d'une variable en deux notions distinctes qu'il appelait semi-continuité inférieure et supérieure. Je n'ai eu qu'à étendre ces notions aux fonctionnelles et, tandis que,

réduites à leur utilisation dans le cas des fonctions de points, elles n'avaient guère qu'un intérêt philosophique, elles se sont révélées d'importance capitale pour la méthode directe.

On dit qu'une fonctionnelle $F(P)$ est semi-continue inférieurement si la plus petite des limites des $F(P)$ quand P tend vers une détermination Π est au plus égale à $F(\Pi)$. Il est clair que, si une fonctionnelle $F(P)$ est semi-continue inférieurement et si P_0 est l'élément limite obtenu précédemment, $F(P_0)$ sera bien égal au minimum. On définit d'une façon analogue la semi-continuité supérieure; elle permet de conclure qu'un maximum est atteint. Dans ma thèse, je me suis borné à ce genre d'indications sans rechercher des cas où une telle semi-continuité existait effectivement, car mon but n'était pas du tout l'étude du Calcul des Variations et je n'en parlais que dans la mesure où cela m'était immédiatement utile. Goursat, puis M. Hadamard montrèrent que la semi-continuité existait dans des cas étendus, puis M. Léonida Tonelli montra que la semi-continuité nécessaire à l'emploi de la méthode directe était réalisée pour tous les problèmes que l'on appelle réguliers, et il réussit à donner une méthode complète pour la résolution du premier problème du Calcul des Variations. C'est là un progrès très important et c'est précisément parce que j'apprécie à un très haut point ces résultats de M. Tonelli que je me suis permis de rappeler la toute petite part qui me revient dans ces progrès: avoir étendu aux fonctionnelles les notions de semi-continuité; ce que plusieurs ouvrages récents attribuent à M. Tonelli. On peut d'ailleurs me rendre justice sans crainte; l'apport de M. Tonelli est si grand qu'il ne sera diminué en rien.

Je voudrais maintenant montrer que ces notions de semi-continuité obtenues par Baire grâce à son esprit profondément critique dans le cas des fonctions de points sont des notions simples et qui vraiment s'imposent dans le cas des fonctionnelles.

Tous mes travaux se rattachent à une plaisanterie de collégien. Au Collège de Beauvais, nous démontrions que, dans un triangle, un côté est égal à la somme des deux autres. Soit ABC un triangle. Si A_1, B_1, C_1 sont les milieux de ses côtés, on a

$$BA + AC = BC_1 + C_1 A_1 + A_1 B_1 + B_1 C.$$

Opérons sur chacun des triangles BC_1A_1 , A_1B_1C comme sur ABC . On trouve une ligne brisée formée de huit segments et égale à $BA + AC$. En continuant ainsi, on a une suite de lignes brisées qui s'écartent de moins en moins du côté BC et qui ont toujours pour longueur la somme des deux autres côtés de notre triangle de départ. Les collégiens de Beauvais en concluaient que le segment BC , limite géométrique de nos lignes brisées, avait pour longueur la somme des deux autres côtés, $BA + AC$. Mes camarades ne voyaient là qu'une bonne plaisanterie. Pour moi, ce raisonnement m'a paru extrêmement troublant, car je ne voyais aucune différence entre lui et les démonstrations relatives aux aires et surfaces des cylindres, cônes, sphères, ou à la longueur de la circonférence. Je finis par me contenter d'observer que, pour cette dernière longueur, on pouvait se servir de polygones inscrits et, lorsqu'on en utilisait d'autres, c'étaient des polygones voisins de ceux-ci et ne présentant nullement les complications accumulées à souhait dans les lignes brisées de notre pseudo-démonstration. Pour les cylindres, cônes et sphères, on avait aussi recours ou l'on pouvait si on le désirait avoir recours à des polyèdres quelque peu inscrits dans les surfaces considérées. Plus tard, je sus démontrer que les polygones inscrits dans une courbe ont effectivement une limite et que cette limite est la longueur de la courbe. J'imaginai bien entendu que l'aire d'une surface pouvait se définir de la même manière quand, en première année d'Ecole Normale, j'appris, par la lettre de Schwarz à Genocchi insérée dans le cours lithographié d'Hermite, que l'aire des polyèdres inscrits dans une surface n'a pas une limite déterminée et que le problème de la définition de l'aire était en somme un problème ouvert. Pour le résoudre, il fallait tout d'abord abandonner l'idée d'utiliser des éléments inscrits, ce qui paraissait bien regrettable puisqu'ils donnaient une définition logique parfaite de la longueur des courbes. Mais il y avait une raison péremptoire pour considérer que cette définition logiquement parfaite était cependant mauvaise à certains égards: c'est qu'une longueur se mesure pratiquement; s'il fallait pour l'avoir prendre nécessairement des points sur la courbe comme sommets des polygones utilisés, la mesure physique serait impossible puisqu'on ne peut distinguer un point d'un point extrême-

ment voisin. Si l'on réfléchit d'ailleurs à la façon dont on s'y prend pour mesurer une courbe, par exemple un chemin avec un mètre à ruban, on en revient à ce que nous avons déjà dit, qu'il s'agit avant tout de supprimer les complications inutiles, en somme de prendre les polygones qui donnent la plus petite valeur possible comme valeur-limite. Si de plus on observe que, par la construction de lignes en dents de scie, il est possible de remplacer les polygones fournissant une certaine limite par d'autres fournissant une limite supérieure choisie à volonté, on voit que la limite inférieure dont nous parlons est vraiment le seul nombre fourni par l'ensemble des polygones s'approchant indéfiniment d'une courbe donnée.

D'où les deux définitions que j'ai posées :

La longueur d'une courbe est la plus petite des limites des longueurs des polygones tendant uniformément vers la courbe.

L'aire d'une surface est la plus petite des limites des aires des surfaces polyédrales tendant uniformément vers la surface.

On voit que ces deux définitions mettent en évidence la semi-continuité inférieure de la longueur et de l'aire. Ce n'est pas par l'introduction de restrictions que la longueur et l'aire sont semi-continues. Leur définition même est basée sur la semi-continuité et l'entraîne.

La méthode directe a donc pour point de départ la distinction élémentaire entre borne inférieure et minimum; elle fait usage d'un procédé de construction simple et qu'on peut dire naturel; elle s'appuie enfin sur une notion de continuité très élémentaire également et qui, à certains égards, s'impose à l'esprit. Il ne faudrait pas croire cependant que, parce qu'il s'agit de considérations n'exigeant presque aucune connaissance mathématique préalable, les principes de la méthode directe sont de ceux qu'on n'oublie pas une fois qu'on les a employés. Par exemple, j'ai eu l'occasion dans l'article qui va être reproduit de montrer que ceux-là même qui avaient attiré l'attention sur la distinction entre borne inférieure et minimum confondaient cependant ces notions dès qu'elles se présentaient sous un aspect un peu nouveau.¹⁾

¹⁾ Le texte qui suit est paru sous le titre: Sur la méthode de Carl Neumann, dans le *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 9^e série, t. XVI, 1937, pp. 205-217 et 421-423.

On sait qu'au début de ses recherches sur les fonctions abéliennes, Riemann résout le problème de Dirichlet par une méthode fautive, car elle suppose que toute quantité variable atteint sa borne inférieure; *il confond borne inférieure et minimum.*

Weierstrass releva la faute. A Weierstrass nous devons la démonstration du fait que toute fonction continue de variables atteint sa borne inférieure et les célèbres conditions suffisantes pour le calcul des variations. Mais le problème de Dirichlet n'était pas résolu par ces recherches; l'existence d'intégrales de première espèce pour une surface de Riemann quelconque, que Riemann avait déduite du problème de Dirichlet, restait en question.

Carl Neumann s'est occupé avec succès de ces questions; il a notamment donné pour la résolution du problème de Dirichlet une méthode restée justement célèbre; Neumann se bornait à l'étude des domaines convexes, Poincaré a justifié la méthode pour des cas étendus de domaines non convexes; les recherches de Fredholm ont fait mieux comprendre encore l'importance de cette méthode et les raisons de son succès. La critique que j'en veux faire ici ne portera que sur sa légitimation classique pour le cas des domaines convexes.

Celle-ci repose en effet sur un lemme géométrique dont la prétendue démonstration donnée est basée uniquement sur la même confusion entre borne inférieure et minimum. Cette faute est de Neumann; mais elle est aussi celle des Auteurs qui opposent Riemann et Neumann; celle des professeurs qui ont exposé le raisonnement de Neumann et de tous ceux qui ont lu ce raisonnement sans protester. Bref, nous avons tous fait cette faute; aussi mérite-t-elle qu'on s'arrête un instant pour l'examiner.

Sans doute, maintenant qu'est faite la distinction entre borne inférieure et minimum, il n'y a plus guère de profit mathématique précis à tirer de cet examen; mais il y a un profit certain, quoique d'un autre ordre, à constater avec quelle facilité nous errons et qu'il suffit d'avoir donné un aspect géométrique à une erreur classique et ancienne pour que personne ne la reconnaisse plus.

Il s'agit bien d'une erreur ancienne; quelque cinquante ans avant l'objection de Weierstrass, Servois opposait la même objection à Argand.

Plus anciennement encore, on avait compris qu'il fallait distinguer quand on étudie la convergence d'une série, entre

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \quad \text{et} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} < \lambda < 1;$$

et, comme la quantité à majorer dans le raisonnement de Neumann est précisément le rapport de deux termes consécutifs d'une série, c'est cette faute de débutant que nous ne reconnaissons pas.

Le lemme est d'ailleurs facile à démontrer rigoureusement en s'aidant de la méthode directe du calcul des variations et de calculs qui remontent à Neumann lui-même. On le démontre ici pour tous les domaines convexes non biétoilés; condition restrictive essentielle pour l'exactitude du lemme, sous quelque forme qu'on l'énonce.

Un *autre* lemme, *nettement différent*, nous permettra d'ailleurs de légitimer les développements en série de Neumann pour tous les domaines convexes, sans aucune espèce de restriction.

1. La méthode de Carl Neuman pour la résolution du problème de Dirichlet est basée, comme l'on sait, sur les propriétés des potentiels de double couche: on recherche la densité $\delta(s)$ d'une double couche répartie sur la frontière F du domaine donné et dont le potentiel se réduise sur cette frontière du côté intérieur au domaine, à la fonction donnée $f(x)$. Ceci conduit à l'équation:

$$[E - A(x)] \delta(x) + \int_F \delta(s) d\theta_x^s = f(x)$$

dans laquelle x et s désignent deux points de la frontière; E , $A(x)$, θ_x^s sont les mesures, faites avec les unités trigonométriques normales, d'angles solides. Pour E , il s'agit de tout l'espace; pour $A(x)$, de l'angle sous lequel on voit le domaine, supposé convexe, du point x ; pour θ_x^s , de l'angle sous lequel, de x , on voit un domaine découpé sur la frontière et parcouru par le point s .

L'intégrale est ce qu'on appelle maintenant une intégrale de Stieltjes.

Sous cette forme, l'équation convient aux domaines convexes les plus généraux; mais cela suppose qu'on a étudié les propriétés des doubles couches réparties sur la frontière de tels domaines; je ne m'y arrêterai pas car mes observations s'appliquent tout aussi bien aux domaines les plus simples, à un polygone et tout spécialement à un quadrilatère. On pourra donc supposer qu'on est dans le plan, interpréter x et s comme des paramètres; E sera 2π , $A(x)$ l'angle du contour F au point x et, si l'on suppose que F n'a qu'un nombre fini de points singuliers, comme le faisait Neumann, l'intégrale se transformera en une intégrale ordinaire; mais on pourra aussi, au contraire, conserver aux symboles leur portée générale.

Pour résoudre l'équation du problème, Neumann l'écrit sous la forme équivalente

$$f(x) = E\delta(x) + \int_F [\delta(s) - \delta(x)] d\theta_x^s,$$

et, par approximations successives, il trouve

$$\delta(x) = v_0(x) + v_1(x) + v_2(x) + \dots$$

avec

$$v_0(x) = \frac{f(x)}{E}, \quad v_i(x) = -\frac{1}{E} \int_F [v_{i-1}(s) - v_{i-1}(x)] d\theta_x^s.$$

Un calcul facile montre que, si la série $\delta(x)$ est majorée par une série convergente de constantes positives, la fonction $\delta(x)$ vérifie bien l'équation et conduit à la solution du problème de Dirichlet. Pour obtenir cette série majorante supposons que, sur tout F , on ait

$$m_i \leq v_i(s) \leq M_i$$

et partageons F en deux parties A_i et B_i lieux des points s tels que:

$$\text{pour } A_i \quad \frac{M_{i-1} + m_{i-1}}{2} \leq v_{i-1}(s) \leq M_{i-1}$$

pour B_i $m_{i-1} \leq v_{i-1}(s) < \frac{M_{i-1} + m_{i-1}}{2}$.

D'où, pour $v_{i-1}(s) - v_{i-1}(x)$, respectivement les limites,

pour s dans A_i $-\frac{M_{i-1} - m_{i-1}}{2}(M_{i-1} - m_{i-1})$,

pour s dans B_i $-(M_{i-1} - m_{i-1})\frac{M_{i-1} - m_{i-1}}{2}$;

et, par suite,

$$\frac{M_{i-1} - m_{i-1}}{E} \left[\int_{A_i} d\theta_x^s + \frac{1}{2} \int_{B_i} d\theta_x^s \right] \leq v_i(x) \leq \frac{M_{i-1} - m_{i-1}}{E} \left[\frac{1}{2} \int_{A_i} d\theta_x^s + \int_{B_i} d\theta_x^s \right].$$

Si donc on prend pour m_i et M_i les bornes exactes de v_i , la différence $M_i - m_i$ qui sera la borne supérieure de $v_i(x) - v_i(y)$, est telle que

$$M_i - m_i \leq (M_{i-1} - m_{i-1}) \Lambda,$$

Λ étant la borne supérieure de

$$\Lambda(x, y, A_i, B_i) = \frac{1}{E} \left\{ \frac{1}{2} \int_{A_i} d\theta_x^s + \int_{B_i} d\theta_x^s + \int_{A_i} d\theta_y^s + \frac{1}{2} \int_{B_i} d\theta_y^s \right\};$$

cette borne supérieure étant relative à tous les choix possibles de x et de y sur F et à tous les partages possibles de F en deux ensembles complémentaires A_i, B_i ¹⁾. D'où $M_i - m_i < k \Lambda^i$, avec une valeur convenable de k , et, puisque $\int_F d\theta_x^s$ ne peut surpasser E ,

$$|v_i(x)| < k \Lambda^{i-1}.$$

Si donc Λ est inférieur à 1, la solution est obtenue.

¹⁾ On pourrait assujettir A_i à être fermé, donc B_i à être ouvert, et à contenir tous deux des domaines, mais, en réalité, il suffit que A_i , donc B_i , soit mesurable afin que les intégrales considérées existent.

2. C'est ici qu'intervient le lemme géométrique dont j'ai parlé; on l'énonce sous des formes diverses. Les intégrales qui figurent dans la définition de Λ sont les angles $A_{i,x}$; $B_{i,x}$; $A_{i,y}$; $B_{i,y}$ sous lesquels les parties A_i et B_i sont vues des points x et y ; de sorte que l'on a, par exemple,

$$\begin{aligned} \Lambda(x, y, A_i, B_i) &= \frac{1}{E} \left[\frac{1}{2} A_{i,x} + B_{i,x} + A_{i,y} + \frac{1}{2} B_{i,y} \right] \\ &= \frac{1}{E} \left[(A_{i,x} + B_{i,x}) + (A_{i,y} + B_{i,y}) - \frac{1}{2} (A_{i,x} + B_{i,y}) \right] \\ &= \frac{1}{E} \left[\frac{1}{2} (A_{i,x} + B_{i,x}) + \frac{1}{2} (A_{i,y} + B_{i,y}) + \frac{1}{2} (A_{i,y} + B_{i,x}) \right] \\ &= \frac{1}{E} \left[(A_{i,x} + B_{i,x}) + \frac{1}{2} (A_{i,y} + B_{i,y}) + \frac{1}{2} (A_{i,y} - A_{i,x}) \right]. \end{aligned}$$

En remarquant que les parenthèses $(A_{i,x} + B_{i,x})$, $(A_{i,y} + B_{i,y})$ sont au plus égales à $\frac{E}{2}$, à ces expressions de Λ correspondent les formes suivantes du lemme:

Il existe un nombre q , indépendant du choix des deux points x et y sur la frontière F et de la division de F en deux parties A_i et B_i tel que l'on ait

(Forme I) $\frac{1}{2} A_{i,x} + B_{i,x} + A_{i,y} + \frac{1}{2} B_{i,y} \leq qE$ avec $q < 1$;

(Forme II) $A_{i,x} + B_{i,y} \geq qE$, avec $q > 0$;

(Forme III) $A_{i,x} + B_{i,y} \leq qE$, avec $q < 1$;

(Forme IV) $A_{i,y} - A_{i,x} \leq qE$, avec $q < \frac{1}{2}$.

La forme II se démontre généralement en disant: $A_{i,x}$ ne peut être nul que si x est le sommet d'une partie conique de F à laquelle A_i appartient; en d'autres termes si A_i est un lieu de segments de droites passant toutes par x , $B_{i,y}$ ne s'annule

que dans des conditions analogues. *Donc la forme II est justifiée pour tous les domaines non biétoilés, c'est-à-dire tels que F ne soit pas formée de deux parties coniques.*

De la forme II la forme III résulte de suite, puisque l'on a

$$A_{i, x} + A_{i, y} + B_{i, x} + B_{i, y} \leq E;$$

cette forme III est celle que Neumann formulé dans son énoncé. On pourrait certes l'atteindre directement sans passer par II, mais c'est par le détour employé ici que Neumann y arrive.

Il est clair que le raisonnement rappelé est inopérant; du fait que

$$\zeta = (A_{i, x} + B_{i, y}) \times \frac{1}{E}$$

est inférieur à 1 pour tout choix de la division A_i, B_i et des points x, y il n'en résulte nullement que sa borne supérieure λ soit aussi inférieure à 1. On ne peut l'affirmer que si l'on a prouvé que la borne supérieure est aussi un maximum, c'est-à-dire est elle-même atteinte pour un choix des A_i, B_i, x, y . *Le raisonnement de Neumann, destiné à remplacer celui de Riemann, est donc fondé exactement sur la même confusion entre borne supérieure et maximum, justement critiquée par Weierstrass.*

Il est tout à fait étonnant que tout le monde, à commencer par Weierstrass, ait admis la validité du raisonnement de Neumann et que nos traités actuels continuent à opposer le raisonnement de Riemann, déclaré faux, à celui de Neumann, proclamé entièrement correct. Et pourtant Neumann attirait l'attention sur le point litigieux dans l'énoncé même de son lemme *Hauptsache*; c'est, en effet, dans l'énoncé qu'il passe du fait, exact, démontré sur ζ à la conclusion fautive relative à la borne supérieure λ de ζ . Il le fait en utilisant la notation (*sic!*) qui ne peut manquer d'attirer l'attention, dans les termes suivants ¹⁾:

« ..., so wird ζ dem spielraum unterworfen sein:

$$0 \leq \zeta < 1$$

(sic!)

¹⁾ *Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential*, par C. NEUMANN, Leipzig, Teubner, 1877, p. 173.

Was von der Variablen ζ gilt, gilt aber nothwendig auch von jedem specialwerth dieser Variablen. Bezeichnet man also den Maximalwerth von ζ mit λ , so folgt aus der vorstehenden Formel sofort:

$$0 \leq \zeta \leq \lambda < 1 \text{ »}.$$

(sic !)

Ainsi Neumann, ayant à majorer le rapport $\frac{v_{n+1}}{v_n}$, fait exactement la faute des élèves qui ne distinguent pas

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \quad \text{de} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} < \lambda < 1;$$

mais il la fait, si je puis dire, d'une façon plus savante, en affirmant que la maximalwerth de ζ est une specialwerth de ζ , c'est-à-dire exactement sous la même forme que Riemann.

3. On ne saurait mettre la confusion qu'il a commise en plus parfaite lumière qu'il ne l'a fait lui-même, mais, si la lacune de la démonstration est claire, comme nous justifions dans un instant le lemme de Neumann, avec l'énoncé de Neumann et en nous restreignant comme lui au cas des domaines non biétoilés, il ne sera pas superflu d'indiquer que, dans cette question du lemme de Neumann, le raisonnement faux de Neumann n'a pas conduit seulement à des résultats exacts mais aussi à des énoncés erronés.

Dans un ouvrage excellent, l'Auteur adopte la forme IV et, raisonnant comme Neumann, il dit: $A_{i,y} - A_{i,x}$ ne peut être égal à $\frac{E}{2}$ que pour $A_{i,y} = \frac{E}{2}$, $A_{i,x} = 0$ et ceci exige que le domaine soit limité par une partie conique A_i et une variété linéaire B_i , on prendra x au sommet du cône, y dans B_i . Ainsi, *il ne sera donc plus nécessaire d'écarter que ces domaines pyramidaux et non tous les domaines biétoilés.*

On notera que c'est bien le seul raisonnement de Neumann qui a été employé, qu'aucune faute nouvelle n'a été surajoutée à celle de Neumann, c'est-à-dire à celle que nous commettons tous quand nous acquiesçons au raisonnement de Neumann, et pourtant, cette fois, la conclusion est fausse; car:

Le lemme de Neumann est faux pour tout domaine biétoilé quelle que soit celle des formes I à IV sous laquelle on l'énonce.

Pour montrer cela il suffira de s'occuper de la forme I puisque les autres ont été obtenues par des majorations des intégrales servant à la définition de Λ . Plaçons-nous d'abord dans le cas du plan, un domaine biétoilé est un quadrilatère, $ABCD$, exceptionnellement un triangle ABC , on placerait alors D sur le côté AC . ε_i étant arbitrairement petit positif, prenons des voisinages de A et de C , tels, pour celui de A , par exemple, que pour chaque point ξ de ce voisinage, les angles BAD , $B\xi D$ diffèrent de moins de ε_i ; prenons ξ dans le voisinage de A et sur AB et faisons subir à l'angle $D\xi B$ une translation dans laquelle ξ se rapproche de A sur BA , arrêtons-nous dans une position telle que la partie du côté AD extérieure à cet angle soit vue du voisinage de C sous un angle inférieur à ε_i ; soient alors x_i la position de ξ , $D\alpha_i$ la partie de DA extérieure à l'angle. De façon analogue nous prendrons η , puis y_i sur CB et $D\gamma_i$ sur DC . B_i sera formée de $A\alpha_i$, $D\gamma_i$, BC ; A_i sera formée de $C\gamma_i$, $D\alpha_i$, AB . On a :

$$\begin{aligned} A_{i, y_i} &> \pi - 2\varepsilon_i, & B_{i, y_i} &> \pi - 2\varepsilon_i, \\ A_{i, x_i} + B_{i, x_i} &= \pi, & A_{i, y_i} + B_{i, y_i} &= \pi; \end{aligned}$$

donc, pour ε_i tendant vers zéro,

$$\frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} A_{i, x_i} + B_{i, x_i} + A_{i, y_i} + \frac{1}{2} B_{i, y_i} \right\}$$

tend vers 1.

Dans le cas d'un domaine biétoilé à plus de deux dimensions, on opérera exactement de même. La frontière F pourra toujours être considérée comme formée de deux parties coniques \mathcal{A} et \mathcal{C} de sommets A et C se coupant suivant une certaine variété BD ; sur \mathcal{A} on choisira une génératrice le long de laquelle il existe un élément tangent et sur cette génératrice un point ξ dans un certain voisinage de A d'où l'on voit la variété BD sous un angle solide différant de moins de ε_i de celui sous lequel elle est vue de A , et l'on fera subir au cône (ξ, BD) la translation rectiligne qui amènerait ξ en A en s'arrêtant quand la partie de \mathcal{A} exté-

rieure à ce cône est vue du voisinage de \mathcal{C} sous un angle solide inférieur à ε_i, \dots

Ainsi, on ne peut étendre le lemme de Neumann au-delà du cas considéré par Neumann; il est vain d'espérer atteindre de cette façon des domaines biétoilés.

Il est tout à fait surprenant que Neumann se soit juste arrêté à point. J'ai déjà indiqué que Neumann, bien que concluant pour la forme III, avait en réalité raisonné sur la forme II; s'il avait raisonné directement sur III, il aurait dit: $A_{i,x} = \frac{E}{2}$ seulement quand il y a un élément tangent en x et que B_i est tout entier dans cet élément tangent. La même chose peut se répéter après permutation de A_i, B_i , de x, y ; or les conditions indiquées dans les deux cas sont incompatibles, donc:

$$A_{i,x} + B_{i,y} < E \quad \text{d'où} \quad A_{i,x} + B_{i,y} \leq qE < E;$$

(sic!) (sic!)

et, comme conclusion, la forme III du lemme *pour tous les domaines convexes sans aucune exception*; ce qui serait erroné.

D'ailleurs, des considérations mêmes de Neumann on pourrait tirer la même conclusion, puisqu'elles donnent la première des inégalités précédentes sauf pour le cas où A_i et B_i seraient deux parties coniques de sommets respectivement y et x et qu'alors on a

$$A_{i,y} = B_{i,x} = 0; \quad A_{i,x} + B_{i,x} \leq \frac{E}{2}; \quad A_{i,y} + B_{i,y} \leq \frac{E}{2}$$

les deux dernières égalités s'excluant l'une l'autre. Cela revient en somme à utiliser la forme I et, en effet, le mode de preuve de Neumann appliqué à I donnerait cet énoncé pour tous les domaines sans restrictions.

Bref, le mode de raisonnement employé est non seulement insuffisant, il est erroné et conduit aussi bien à des conclusions fausses qu'à des conclusions exactes.

4. Une démonstration du lemme de Neumann ne peut reposer que sur l'évaluation approchée de la quantité, dont la borne est

en discussion, et le calcul à faire pour cela s'impose. Il a été fait par Neumann lui-même qui, après la démonstration (?) de son lemme, calcule λ pour une ellipse et un ellipsoïde, par exemple.

Neumann ne voyait pas dans ce calcul un appui pour sa démonstration dont la validité lui paraissait certaine, mais certains auteurs, qui ont introduit le commencement du calcul de Neumann dans la démonstration même du lemme, avaient peut-être quelque doute sur cette validité. Ils ne nous ont pas renseignés sur ces doutes; il est peu vraisemblable d'ailleurs qu'ils aient bien assimilé l'une à l'autre les lacunes des raisonnements de Neumann et de Riemann, sans quoi, après avoir majoré l'expression étudiée par une quantité variable V , ils n'auraient pas oublié de prendre les précautions nécessaires pour passer de V à sa borne supérieure sans donner prise à la même critique. Ces précautions sont d'ailleurs simples; V est le plus souvent une fonction ordinaire, il suffit donc de se placer dans des conditions où elle est continue, mais on aboutit ainsi à des domaines formant une famille moins vaste que celles que les exposés que j'ai vus croyaient examiner.

Quoi qu'il en soit, c'est au calcul de Neumann et à ces essais de meilleure démonstration du lemme que se rattache immédiatement la preuve qui suit. Pour lui donner une valeur pour tous les domaines convexes non biétoilés il suffit de se rappeler que, presque partout, la frontière d'un tel domaine a un élément tangent et que, dans les intégrales, il suffit de s'occuper de ces points non exceptionnels pour lesquels s'appliquent tous les calculs qui sont classiques pour le cas où la frontière a partout des éléments tangents; on pourra d'ailleurs, si on le veut, interpréter ce qui suit pour ce cas particulier.

Prenons, par exemple, la forme de Neumann, et raisonnons sur la borne supérieure de

$$\int_{A_i} d\theta_{x_i}^s + \int_{B_i} d\theta_{y_i}^s$$

pour tous les choix possibles de x_i, y_i, A_i, B_i . Nous pouvons, c'est le point de départ même de la méthode directe, ne conserver que des choix pour lesquels les x_i d'une part, les y_i d'autre part, ont des points limites, ξ, η qui, d'ailleurs, sont peut-être confondus.

Puisque le domaine n'est pas biétoilé, il existe un point M de F en lequel F a un élément tangent lequel ne passe ni par ξ , ni par η . Alors si autour de ξ et η on a pris des voisinages assez petits $V(\xi)$ et $V(\eta)$, autour de M on peut prendre un voisinage $V(M)$ tel que tout élément \bar{m} tangent à F en un point m de $V(M)$ ne coupe ni $V(\xi)$, ni $V(\eta)$. Prenons x et y respectivement dans $V(\xi)$ et $V(\eta)$; les égalités classiques

$$d\theta_x^m \sin(mx, \bar{m}) = d\theta_y^m \sin(my, \bar{m}) = d\theta_o^m \sin(m0, \bar{m})$$

dans lesquelles 0 est un point intérieur au domaine, conservent le même sens dans le cas général, c'est-à-dire qu'elles permettent la transformation d'intégrales en $d\theta_x^m$ en intégrales en $d\theta_o^m$, dans lesquelles il n'y a à tenir compte que des points m pour lesquels \bar{m} existe. Or, les distances et les sinus ont des bornes finies et différentes de zéro, donc, pour un certain $k > 0$, on a

$$d\theta_{x_i}^m > kd\theta_o^m, \quad d\theta_{y_i}^m > kd\theta_o^m;$$

si l'on pose

$$v = \int_{V(M)} d\theta_o^m, \quad v > 0,$$

et, si A' et B' sont les parties de $V(M)$ qui appartiennent à A_i et B_i , on a

$$\int_{A'} d\theta_{y_i}^s > k \int_{A'} d\theta_o^s, \quad \int_{B'} d\theta_{x_i}^s > k \int_{B'} d\theta_o^s, \quad \int_{A'} d\theta_o^s + \int_{B'} d\theta_o^s = v.$$

Et puisque

$$\int_{B_i+A'} d\theta_{y_i}^s \leq \frac{E}{2}, \quad \int_{A_i+B'} d\theta_{x_i}^s \leq \frac{E}{2},$$

on a

$$\int_{A_i} d\theta_{x_i}^s + \int_{B_i} d\theta_{y_i}^s < E - kv$$

le lemme de Neumann est prouvé pour tous les domaines convexes non biétoilés.

5. Le développement en série de Neumann pour la fonction densité fournissant la solution du problème de Dirichlet est donc prouvé dans les mêmes conditions. On sait que Poincaré a

montré (*Acta Mathematica*, t. XX) que ce développement s'appliquait même à des domaines non convexes sous la condition de l'existence de certaines courbures. Ici, on ne sortira pas du cas des domaines convexes, le seul pour lequel on puisse utiliser les raisonnements simples de Neumann, mais on ne fera aucune hypothèse supplémentaire. Le cas des domaines biétoilés, qui comprend celui des domaines pyramidaux, reste en réalité le seul à examiner.

On a vu (§ 1), que l'on a

$$|v_i(x) - v_i(y)| \leq (M_{i-1} - m_{i-1}) \Lambda(x, y, A_i, B_i)$$

d'où, d'après la définition par récurrence des v_i ,

$$|v_{i+1}(X)| \leq \frac{(M_{i-1} - m_{i-1})}{E} \int_F \Lambda(s, X) d\theta_X^s$$

si $\Lambda(s, X)$ est la limite supérieure de $\Lambda(s, X, A_i, B_i)$ pour tout choix de A_i, B_i .

Supposons que l'intégrale du second membre ait qE pour borne supérieure, avec $q < \frac{1}{2}$, pour tout choix de s et X ; alors de l'inégalité précédente résulterait aussi

$$|v_{i+1}(X)| \leq q(M_{i-1} - m_{i-1}) \quad \text{et}$$

$$|v_{i+1}(X) - v_{i+1}(Y)| \leq 2q(M_{i-1} - m_{i-1}).$$

Donc, l'oscillation de f étant $2\omega E$, on aurait successivement

$$|v_1(x)| \leq \omega \quad |v_2(x)| \leq \omega; \quad |v_3(x)| \leq 2q\omega \quad |v_4(x)| \leq 2q\omega;$$

$$|v_5(x)| \leq (2q)^2 \omega; \quad |v_6(x)| \leq (2q)^2 \omega; \dots,$$

et il serait démontré que la série de Neumann converge encore à la façon d'une progression géométrique.

Mais il faut prouver un nouveau lemme:

Pour chaque domaine convexe l'intégrale $\int_F \Lambda(s, X) d\theta_X^s$ a une borne supérieure qE , q étant inférieure à $\frac{1}{2}$.

La quantité $\Lambda (s, X, A_i, B_i)$ ne surpassant jamais 1, il en est de même de $\Lambda (s, X)$; si donc l'on sait que $\Lambda (s, X)$ est inférieur à $\Lambda < 1$ pour les points s d'un domaine vu de X sous un angle non nul et supérieur à une limite fixe α , l'intégrale sera au plus $\frac{E}{2} - (1 - \lambda)\alpha$ et la proposition sera prouvée.

Soit ξ un point limite de points X pour lesquels $\int_F \Lambda (s, X) d\theta_X^s$, qui est une fonction du point X , tend vers sa borne supérieure. Choisissons, ce qui est toujours possible, un point η tel que, si le domaine est biétoilé ξ et η n'en soient pas deux sommets; alors nous avons, au paragraphe précédent, considéré un point M en lequel il y avait un élément tangent ne passant ni par ξ , ni par η et, grâce à lui, nous avons déterminé deux voisinages $V (\xi)$, $V (\eta)$ de ξ et η tels que si X est dans le premier, s dans le second, $\Lambda (s, X, A_i, B_i)$ soit inférieur à un nombre λ inférieur à 1. Alors, $\Lambda (s, X)$ est inférieur à λ . Si, de plus, le voisinage $V (\eta)$ est vu de chacun de ces X sous un angle plus grand que $\alpha > 0$, la démonstration est acquise.

Or, si le cône tangent à F et de sommet σ ne passe pas par ξ , de ξ on voit $V (\eta)$ sous un angle non nul 2α ; de tout point de $V (\xi)$, pris assez petit, on le verra sous un angle supérieur à α . Ainsi, il ne reste à examiner que les domaines tels que, si l'on a pris M ayant un élément tangent \bar{M} ne passant pas par ξ , le cône tangent à F en un point quelconque η passe toujours par M ou ξ . En d'autres termes, le domaine doit être biétoilé et de sommets M et ξ , quel que soit le choix indiqué de M ; donc il doit être pyramidal, F étant constituée d'une partie conique \mathcal{C} de sommet ξ et d'une base \mathcal{B} .

Imaginons alors que les points ξ et η du paragraphe précédent sont confondus en notre sommet ξ ; prenons $V (\xi)$ et $V (\eta)$ confondus et limités par une section \mathcal{B}_1 parallèle à \mathcal{B} . M sera pris intérieur à \mathcal{B} , ainsi que $V (M)$. Alors, pour s et X dans $V (\xi)$, $\Lambda (s, X, A_i, B_i)$ est inférieur à un nombre λ inférieur à 1, donc aussi $\Lambda (s, X)$. Mais, de tout point X de $V (\xi)$ sauf du point ξ ¹⁾, on voit $V (\eta) \equiv V (\xi)$ sous un angle supérieur au minimum α

¹⁾ Le cas de $\int_F \Lambda (s, \xi) d\theta_\xi^s$ n'est pas à examiner puisque $\int_F d\theta_\xi^s$ est inférieur à $\frac{E}{2}$;

de l'angle sous lequel on voit $V(\xi)$, ou \mathcal{B}_1 , d'un point quelconque P frontière de \mathcal{B} et de \mathcal{C} , lequel angle est une fonction continue de P . Donc le lemme est prouvé dans tous les cas.

La fonction, harmonique dans un domaine convexe et se réduisant sur sa frontière à une fonction continue donnée, est donc fournie par la série de Neumann qui converge à la façon d'une progression géométrique; dans tous les cas, sans aucune restriction ¹⁾.

6. J'ai dit, à plusieurs reprises, que pour atteindre tous les cas il fallait utiliser des généralisations de l'intégrale mais que le lecteur pouvait cependant se borner à l'examen de domaines simples et à l'emploi d'intégrales ordinaires. Cela demande des explications: on peut n'utiliser que les intégrales ordinaires et constater, comme au paragraphe 2, l'existence d'une lacune dans le raisonnement de Neumann, comme au paragraphe 3 l'inexactitude du lemme avec certains énoncés, ou comprendre la marche des démonstrations des paragraphes 4 et 5. Mais ces démonstrations exigent, même pour les domaines les plus simples et les fonctions à la frontière les plus simples, l'emploi d'intégrales étendues aux parties A_i et B_i de la frontière et nous avons dit que tout ce qu'on savait sur ces ensembles c'était que A_i est fermé et B_i ouvert. Ainsi, supposons que le domaine soit un cercle, B_i pourra être formé d'une infinité dénombrable d'arcs de circonférence. Si l'on veut, avec Neumann, n'utiliser que les intégrales ordinaires, le raisonnement présente une lacune grave qui a été signalée depuis longtemps par M. Volterra (« Sul principio di Dirichlet », *Rend. del Circ. di Pal.*, t. XI, 1897). M. Volterra a indiqué comment lever cette difficulté qui se rencontrait aussi dans d'autres problèmes.

On voit combien ces questions simples sont délicates et que l'objection examinée ici n'est pas la seule qu'on puisse faire au raisonnement de Neumann. L'objection de Weierstrass n'est pas non plus la seule qu'on puisse faire au raisonnement de Riemann:

¹⁾ Les cinq premiers paragraphes de ce Mémoire ont paru dans le *Journal de mathématiques pures et appliquées* (9^e série, t. XVI, 1937, pp. 205-217). Par suite d'une malencontreuse erreur de transmission il n'a pu être tenu compte que d'une partie des corrections et additions faites par l'auteur sur les épreuves. En particulier, ont été omises des indications bibliographiques et des observations qui, légèrement développées, ont été réunies dans le paragraphe supplémentaire qui suit, paru dans le même tome du *Journal de mathématiques pures et appliquées* pp. 421 à 423.

M. Hadamard a montré qu'il existait des cas où les données sont telles que le problème de Dirichlet ait une solution et que, pourtant, le problème de minimum envisagé par Riemann n'ait même aucun sens; toutes les intégrales intervenant dans ce problème étant infinies (*Bull. de la Soc. Math. de France*, t. XXXIV, 1906). Et l'exemple de M. Hadamard est aussi simple que possible; le domaine est un cercle sur la frontière duquel est donnée une fonction continue convenablement choisie. *Il n'y a donc pas équivalence entre le problème de Dirichlet et le problème de Riemann.*

On peut préciser la relation entre ces deux problèmes en disant que toutes les fois que le problème de Riemann a une solution, celle-ci fournit aussi la solution du problème de Dirichlet. Mais, pour démontrer ce fait, il ne faut pas compter sur le raisonnement classique de Riemann basé sur la formule de Green et ses généralisations, car celui-ci suppose qu'on puisse parler d'intégrales étendues à la frontière, — donc que celle-ci soit assez simple —, et qu'on ne rencontre que des fonctions dérivables encore à la frontière — ce qui n'a pas lieu en général même pour un domaine circulaire. Il m'a fallu pour arriver au résultat (« Sur le problème de Dirichlet », *Rend. del Circ. Mat. di Pal.*, t. XXIV, 1907) faire un assez long détour. M. Zaremba (« Sur le principe du minimum », *Bull. de l'Ac. de Cracovie*, juillet 1909) a obtenu ce résultat tout autrement.

Peut-il arriver que le problème de Riemann ait un sens mais n'ait pas de solution et que le problème de Dirichlet en ait une ? Non, cela découle facilement des travaux cités et d'autres au sujet desquels on se reportera avec fruit à un Mémoire de M. F. Vasilescu, couronné récemment par l'Académie de Belgique (*Mémoires de l'Ac. roy. de Belgique*, t. XVI, 1937). L'hypothèse que le problème de Riemann ait un sens et pas de solution que je viens d'envisager, donc de cas tels que le problème de Dirichlet n'ait pas non plus de solution, se présente effectivement comme je l'ai montré (*Comptes rendus des séances de la Soc. Math. de France*, t. XXXXI, 1912). En d'autres termes, l'objection de Weierstrass n'est pas relative seulement à la forme du raisonnement, la circonstance prévue par Weierstrass : *une quantité variable n'atteignant pas son minimum*, se rencontre effectivement pour

l'intégrale de Riemann, comme nous avons vu au paragraphe 3 qu'elle se rencontre effectivement pour la quantité Λ de Neumann.

La contribution de M. Hadamard au problème de Dirichlet rappelée ci-dessus occupe certes peu de place dans l'œuvre considérable de M. Hadamard, son intérêt n'en est pas moins fort grand; elle m'a été très utile mathématiquement jadis, aujourd'hui elle sera pour moi prétexte à lui dédier cette petite étude critique.