Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 9 (1963)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES FONCTIONS CONTINUES SANS DÉRIVÉES CONSIDÉRÉES DANS L'ÉCHELLE LOGARITHMICO-PUISSANCE
Autor: Tarnawski, E.
Kapitel: § 2. Exemple d'une fonction continue sans dérivée COMPRENANT TOUTE L'ÉCHELLE LOGARITHMICO-PUISSANCE
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-38781

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.10.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

§ 2. Exemple d'une fonction continue sans dérivée comprenant toute l'échelle logarithmico-puissance

Considérons la fonction $f(x)$ de la forme

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha} (b^{-\beta})^k \varphi(b^k x), \tag{14}$$

où $\varphi(x)$ est une fonction définie par la formule (2) et $b > 0$ est un nombre pair. Le domaine de variation des paramètres α, β qui y interviennent sera le suivant:

$$0 \leqslant \beta \leqslant 1, \tag{15}$$

et si $\beta = 0$, on supposera $\alpha > 1$, tandis que si $\beta = 1$ on admettra $\alpha \leqslant 1$. Ceci étant, la continuité de la fonction $f(x)$ et les hypothèses du théorème 1 sont réalisées.

Remarquons que
pour $0 < \beta < 1$, les valeurs du paramètre α étant arbitraires, pour $\beta = 0$, $\alpha > 1$ et pour $\beta = 1$, $\alpha \leqslant 0$ le produit

$$a_k b_k = k^{-\alpha} b^{(1-\beta)k} \tag{16}$$

est minoré par une constante indépendante de k. La fonction f étant partout continue est en vertu du théorème 2 partout non dérivable pour ces valeurs des paramètres β, α.

Quant aux conditions suffisantes pour qu'une fonction $f(x)$ de la forme (1) appartienne à la classe $H(\delta, \gamma)$ lorsque les coefficients a_n, b_n satisfont aux conditions (7), elles ont été exprimées par l'inégalité (33) de [4] (p. 26). Si l'on tient compte de celle-ci ainsi que de la forme de la fonction (14), on peut formuler la condition suffisante pour que la fonction (14) soit de la classe $H(\delta, \gamma)$ moyennant les deux inégalités

$$b^{(\delta-1)n} n^{-\gamma} \sum_{k=1}^{n} k^{-\alpha} b^{(1-\beta)k} < M \tag{17}$$

$$b^{\delta(n+1)} (n+1)^{-\gamma} \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-\alpha} b^{-\beta k} < M, \tag{18}$$

où M est une constante indépendante de n.

Afin de trouver la limite de l'expression à gauche de l'inégalité (17) lorsque $n \to \infty$, on appliquera le théorème de Stolz avec les suivantes valeurs de paramètres δ, γ, β, α:

$$0 \leqslant \delta < 1,\ \gamma \text{ arbitraire ou } \delta = 1,\ \gamma > 0$$

et simultanément

$$0 \leqslant \beta < 1,\ \alpha \text{ arbitraire ou } \beta = 1,\ \alpha \leqslant 1.$$

La recherche de la limite de l'expression à gauche de l'inégalité (17) sera remplacée par la recherche de la limite du produit

$$n^{-(\alpha+\gamma)}\, b^{n(\delta-\beta)} \left[1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^{\gamma} b^{\delta-1}\right]^{-1} \tag{19}$$

où les paramètres admettent les valeurs considérées ci-dessus. On voit bien que cette limite est finie dans le cas où

$$0 \leqslant \beta < 1\,,\ \delta = \beta\,,\ \alpha+\gamma \geqslant 0\,, \tag{20}$$

ainsi que dans celui où

$$\beta = 1,\ \delta = \beta,\ \gamma = 1-\alpha\,. \tag{21}$$

Voyons maintenant si pour les valeurs des paramètres δ, γ ainsi établies, la condition (18) est vérifiée. Si l'on pose $k-n-1 = p$ et l'on admet $\delta = \beta$, l'expression à gauche de l'inégalité (18) peut s'écrire sous la forme

$$\sum_{p=0}^{\infty} b^{-\beta p}(n+1)^{-\gamma}(p+n+1)^{-\alpha} \tag{22}$$

a) Si $0 < \beta < 1$, $\gamma = -\alpha$, on a

pour $\alpha \geqslant 0$: $b^{-\beta p}\left(\dfrac{n+1}{p+n+1}\right)^{\alpha} \leqslant b^{-\beta p}$, la série (22) est donc bornée pour chaque n par le nombre $M = \sum\limits_{p=0}^{\infty} b^{-\beta p}$;

pour $\alpha < 0$ on a pour tout $n \geqslant 1$: $\left(\dfrac{p+n+1}{n+1}\right)^{-\alpha} \leqslant \left(\dfrac{p}{2}+1\right)^{-\alpha}$.

Dans ce cas l'inégalité (18) est satisfaite en admettant

$$M = \sum_{p=0}^{\infty} b^{-\beta p}\left(\frac{p}{2}+1\right)^{-\alpha} \text{ pour tout } n.$$

b) Si $\beta = 0$, $\alpha > 1$, la série (22) prend la forme

$$\sum_{p=0}^{\infty} (n+1)^{-\gamma}(p+n+1)^{-\alpha}.$$

En appliquant le critère intégral de la convergence des séries on limite la somme de la série par les nombres $(\alpha-1)^{-1}(n+1)^{-\alpha-\gamma+1}$, $\frac{1}{2}+(\alpha-1)^{-1}(n+1)^{-\alpha-\gamma+1}$.

L'inégalité (18) est donc vérifiée indépendamment de la valeur de n lorsque $-\alpha-\gamma+1 \leqslant 0$, c'est-à-dire $\gamma \geqslant 1-\alpha$.

c) Admettons $\beta = 1$, $\gamma = 1-\alpha$. De même que dans le cas *a)* l'inégalité (18) est satisfaite pout tout n: si $\alpha < 0$ pour $M = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{\infty} b^{-p}\left(\frac{p}{2}+1\right)^{-\alpha}$ et si $\alpha \geqslant 0$ pour $M = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{\infty} b^{-p}$.

Si l'on rapproche les cas *a)*, *b)*, *c)* ainsi que (20) et (21), on trouve

a) si $0 < \beta < 1$, α est arbitraire, on a $f \in H(\beta, -\alpha)$,

b) si $\beta = 0$, $\alpha > 1$, on a $f \in H(0, 1-\alpha)$,

c) si $\beta = 1$, $\alpha \leqslant 1$, on a $f \in H(1, 1-\alpha)$.

Le théorème 1 servira à trouver une condition suffisante pour que la fonction $f(x)$ définie par la formule (14) satisfasse aux points de l'ensemble Z [1]) la relation (4) avec $\psi(h) = h^{\delta}\,|\log h\,|^{\gamma}$ ou, comme nous le dirons dans la suite, pour que la fonction $f(x)$ soit aux points de l'ensemble Z de la classe $H^{\infty}(\delta, \gamma)$. Cette propriété de la fonction $f(x)$ pourra s'écrire sous la forme $f \in H_Z^{\infty}(\delta, \gamma)$.

Prenons un point $x_0 \in Z$ parmi les points du partage des

---

[1]) L'ensemble Z a été défini à la fin de la démonstration du théorème 1 comme l'ensemble de tous les points du partage de chacun des intervalles $< p, p+1 >$ (p entier) en b^n intervalles égaux.

intervalles $< p,\ p+1 >$ (p entier) en b^{n_0} sous-intervalles égaux. Si pour $n \to \infty$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{f(x_0+b_n^{-1})-f(x_0)}{(b_n^{-1})^{\delta} \mid \log\ b_n^{-1} \mid^{\gamma}} = \infty,$$

la fonction $f(x)$ est au point x_0 de la classe $H^{\infty}(\delta, \gamma)$. Si l'on présente le quotient sous la forme

$$\frac{f(x_0+b_n^{-1})-f(x_0)}{b_n^{-1}} \cdot \frac{b_n^{-1}}{(b_n^{-1})^{\delta} \mid \log\ b_n^{-1} \mid^{\gamma}}$$

et l'on tient compte des relations (13) et (16), on trouve comme valeur de ce quotient

$$\frac{b^{(\delta-1)n}}{n^{\gamma}(\log\ b)^{\gamma}} \rho_{n_0} + \frac{b^{(\delta-1)n}}{n^{\gamma}(\log\ b)^{\gamma}} \sum_{k=n_0}^{n-1} k^{-\alpha} b^{(1-\beta)k}.$$

Attendu que le premier composant de cette somme tend vers zéro, lorsque $n \to \infty$, dans tout le domaine de variation des paramètres δ, γ, on pourra se contenter d'examiner uniquement le second composant. L'étude de la limite de cette expression sera remplacée par l'étude de la limite du produit

$$(n-1)^{-(\alpha+\gamma)} b^{n(\delta-\beta)+\beta-1} \left[\left(\frac{n}{n-1}\right)^{\gamma} - b^{\delta-1}\right]^{-1}$$

et l'on y admettra les mêmes valeurs des paramètres que dans le cas de l'étude de l'expression à gauche de l'inégalité (17).

Considérons les cas qui correspondent à *a)*, *b)*, *c)* énumérés ci-dessus. Si

$$0 < \beta < 1,\ \delta = \beta,\ \gamma < -\alpha$$

ou bien

$$\beta = 0,\ \delta = \beta,\ \gamma < -\alpha,\ \alpha > 1,$$

on conclut que $f \in H_Z^{\infty}(\beta, \gamma)$.

Dans le cas où $\beta = 1,\ \delta = \beta,\ \gamma > 0$ on trouve $f \in H_Z^{\infty}(1, \gamma)$ avec $\gamma < 1-\alpha$.

En résumé, il vient:

si $0 < \beta < 1$, α est arbitraire, on a $f \in H(\beta, -\alpha)$,
et si $\gamma < -\alpha$ on a $f \in H_Z^\infty(\beta, \gamma)$,
si $\beta = 0$, $\alpha > 1$ on a $f \in H(0, 1-\alpha)$
et lorsque $\gamma < -\alpha$, on a $f \in H_Z^\infty(0, \gamma)$,
si enfin $\beta = 1$, $\alpha \leqslant 1$, on a $f \in H(1, 1-\alpha)$,
et lorsque $0 < \gamma < 1-\alpha$, on a $f \in H_Z^\infty(1, \gamma)$.

Ainsi la fonction de l'exemple de M. G. de Rahm ($\beta = 1$, $\alpha = 0$) est de la classe $H(1, 1)$, sans appartenir à aucune des classes $H(1, \gamma)$ ($\gamma < 1$), car pour $\gamma < 1$ elle est de la classe $H_Z^\infty(1, \gamma)$. De même la fonction dont les coefficients sont définis par (3) ($\beta = 0$, $\alpha = 2$) appartient simultanément à la classe $H(0, -1)$ et à $H_Z^\infty(0, \gamma)$ avec $\gamma < -2$. Elle n'appartient donc à aucune des classes $H(0, \gamma)$ avec $\gamma < -2$. La méthode donne en deuxième cas ($\beta = 0$, $\alpha > 1$) la localisation de la fonction $f(x)$ non complète.

BIBLIOGRAPHIE

1. L. de Vito, Su un esempio di funzione continua senza derivata. *Enseignement mathématique*, IV (1958), pp. 281-283.
2. G. de Rahm, Sur un exemple de fonction continue sans dérivée. *Enseignement mathématique*, III (1957), pp. 71-72.
3. J.-P. Kahane, Sur l'exemple, donné par M. de Rahm, d'une fonction continue sans dérivée. *Enseignement mathématique*, V (1960), pp. 53-57.
4. E. Tarnawski, Continuous functions in the logarithmic-power classification according to Hölder's conditions. *Fundamenta Mathematicae*, XLII (1955), pp. 11-37.