

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 9 (1963)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES FONCTIONS CONTINUES SANS DÉRIVÉES
CONSIDÉRÉES DANS L'ÉCHELLE LOGARITHMICO-PUISSANCE

Autor: Tarnawski, E.
Kapitel: § 1. Théorèmes Préliminaires
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-38781>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 27.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

faisant à la condition de Lipschitz¹⁾. Les secondes conditions ajoutées aux premières permettent dans de nombreux cas de *localiser* la fonction f sur l'échelle logarithmico-puissance, c'est-à-dire de prouver que $f \in H(\delta, \gamma)$ pour certaines valeurs de δ, γ et que simultanément $f \in H^\infty(\delta, \gamma_1)$ pour tout $\gamma_1 < \gamma$. C'est grâce à cela qu'on a pu construire l'exemple universel donné plus haut.

La condition suffisante pour que $f \in H^\infty(\delta, \gamma)$, qui résulte de cette méthode, se compose de trois conditions. L'une d'elles

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n^\delta (\log b_n)^{-\gamma} = \infty \quad ^2)$$

ne permet pas dans le cas où $a_n = a^n, b_n = b^n, ab = 1$ de trancher si $f \in H^\infty(\delta, \gamma)$ ou non. Ceci a lieu aussi dans le cas de l'exemple de M. de Rahm. Si cependant on applique la méthode utilisée par M. de Rahm dans la démonstration de la non-dérivabilité de la fonction de son exemple, on arrive parfois à trancher la question.

C'est précisément cette méthode qui a été appliquée au § 2 dans le simple cas d'une fonction continue sans dérivée $f(x; \alpha, \beta)$ de la forme (14) où la fonction $\varphi(x)$ est définie par la relation (2). Selon la valeur des paramètres α, β , cette fonction parcourt toute l'échelle logarithmico-puissance. Ce cas comprend en particulier les exemples donnés par M. de Vito.

§ 1. THÉORÈMES PRÉLIMINAIRES

Lemme. S'il existe deux suites $\{\xi_n\}, \{\eta_n\}$ telles que $\xi_n \rightarrow x_0, \eta_n \rightarrow y_0, \xi_n \leq x_0 \leq \eta_n$ pour tout n et on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(\eta_n) - f(\xi_n)}{\psi(\eta_n - \xi_n)} = \infty, \quad (9)$$

où $\psi(h)$ est une fonction définie et différente de zéro pour $h > 0$, non décroissante et tendant vers zéro lorsque $h \rightarrow 0$, la fonction $f(x)$ satisfait au point x_0 à la relation (4).

1) Cf. [4], p. 28, Theorem 10. C'est une généralisation du théorème de M. de Vito concernant la fonction de l'exemple de M. de Rahm.

2) Cf. [4] p. 27, formule (34).

Démonstration. Si ce lemme n'était pas vrai, il existerait deux constantes M, α telles que pour $|h| < \alpha$ et $x = x_0$ l'inégalité (5) aurait eu lieu. On aurait donc eu pour $n > n_0$

$$|f(\eta_n) - f(\xi_n)| \leq M\psi(\eta_n - x_0) + M\psi(x_0 - \xi_n) \leq 2M\psi(\eta_n - \xi_n)$$

ce qui contredit l'hypothèse (9).

A présent on formulera deux théorèmes sur la fonction $f(x)$ définie par (1), où la fonction $\varphi(x)$ est donnée par la relation (2) et les coefficients a_n, b_n vérifient les conditions (7), les nombres $\beta_n = \frac{b_{n+1}}{b_n}$ étant des nombres pairs, $b_1 = 1$. Il est évident que la fonction $f(x)$ est une fonction continue.

Théorème 1. Si la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ est divergente, la fonction $f(x)$ satisfait dans l'ensemble Z dénombrable et dense de l'axe Ox à la relation (4) avec $\psi(h) = h$. La fonction $f(x)$ n'a donc pas de dérivée dans l'ensemble Z .

Démonstration. La fonction $\varphi(x)$ étant périodique, on se bornera à rapporter les raisonnements à l'intervalle $< 0, 1 >$. Le graphique de la fonction

$$\varphi_n(x) = a_n \varphi(b_n x) \tag{10}$$

est une ligne brisée formant avec l'axe Ox des triangles adhérents dont la base a la longueur b_n^{-1} et dont les extrémités sont les zéros de la fonction $\varphi_n(x)$. Aux milieux des bases la fonction $\varphi_n(x)$ est maximum avec les valeurs $\frac{1}{2} a_n$. Les deux côtés des dits triangles ont comme les modules des coefficients angulaires les produits $a_n b_n$.

Désignons par n_0 une valeur établie de n et par x_0 un zéro choisi de la fonction $\varphi_{n_0}(x)$. Il est à remarquer que le nombre β_n étant pair, les points x_0 et $x_0 + b_{n_0}^{-1}$ sont des zéros de toute fonction $\varphi_k(x)$, où $k \geq n_0$. Il en résulte

$$\frac{\varphi_k(x_0 + b_{n_0}^{-1}) - \varphi_k(x_0)}{b_{n_0}^{-1}} = \begin{cases} 0 & \text{pour } k \geq n_0 \\ \alpha_k & \text{pour } k < n_0, \end{cases}$$

où

$$|\alpha_k| = a_k b_k \tag{11}$$

et

$$\rho_{n_0} = \frac{f(x_0 + b_{n_0}^{-1}) - f(x_0)}{b_{n_0}^{-1}} = \sum_{k=1}^{n_0-1} \alpha_k. \quad (12)$$

x_0 étant établi, calculons pour $n > n_0$ la valeur du coefficient différentiel

$$\rho_n = \frac{f(x_0 + b_n^{-1}) - f(x_0)}{b_n^{-1}} = \rho_{n_0} + \sum_{k=n_0}^{n-1} a_k b_k. \quad (13)$$

On en déduit que dans le cas où la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ diverge la fonction $f(x)$ vérifie au point x_0 la relation (4) avec $\psi(h) = h$. Ceci a lieu pour tout point de partage en b_n sous-intervalles égaux de l'intervalle $< 0, 1 >$. En désignant par Z l'ensemble de ces points pour $n = 1, 2, \dots$ et ceux qui leur correspondent dans le partage des intervalles $< p, p+1 >$ (p entier), la thèse du théorème se trouve démontrée.

Théorème 2. Si pour toute suite $\{\lambda_k\}$ où $|\lambda_k| = 1$, la série $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k b_k$ diverge ¹¹⁾, la fonction $f(x)$ est de la classe $H^\infty(0, 1)$, c'est-à-dire elle n'a en aucun point de dérivée.

Démonstration. La démonstration est presque immédiate. Il suffit de substituer dans la formule (12) x_0 et $x_0 + b_{n_0}^{-1}$ respectivement par les deux extrémités de l'intervalle $< \xi_n, \eta_n >$, formé par le partage de l'intervalle $< 0, 1 >$ en b_{n_0} intervalles égaux, de remplacer n_0 par n et de choisir les intervalles $< \xi_n, \eta_n >$ de manière qu'ils contiennent un certain point x choisi arbitrairement. En s'appuyant sur le lemme avec $\psi(h) = h$, on aboutira à la proposition avancée.

Exemples. Le théorème 2 trouve des applications dans les cas suivants: a) $a_n = 10^{-n}$, $b_n = 2^{n!}$ (exemple de M. Faber); b) $a_n = a^n$, $b_n = b^n$, où $ab \geq 1$, $b > 0$ pair, $0 < a < 1$; c) $a_n = n^{-\alpha}$, $b_n = b^n$, $b > 0$ pair, $\alpha > 1$. Le théorème 2 n'est pas applicable lorsque $a_n = n^{-\alpha} b^{-n}$, $b_n = b^n$, $b > 0$ pair, $\alpha > 1$ mais on peut alors utiliser le théorème 1.

1) Cette hypothèse est équivalente à $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} a_k b_k > 0$