Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 9 (1963)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES FONCTIONS CONTINUES SANS DÉRIVÉES CONSIDÉRÉES DANS L'ÉCHELLE LOGARITHMICO-PUISSANCE

Autor: Tarnawski, E.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-38781

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 04.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SUR LES FONCTIONS CONTINUES SANS DÉRIVÉES CONSIDÉRÉES DANS L'ÉCHELLE LOGARITHMICO-PUISSANCE

par E. TARNAWSKI (Gdańsk).

M. L. de Vito a montré [1]) dans sa note [1] que la fonction

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi(b_n x) \tag{1}$$

où $\mathbf{a}_n = 2^{-n}$, $\mathbf{b}_n = 2^n$ et

$$\varphi(x) = \min_p |x-p| \qquad (p \text{ entier}) \tag{2}$$

qui avait servi à M. G. de Rahm [2]) d'exemple de fonction continue sans dérivée, est une fonction satisfaisant à la condition de Hölder pour tout exposant δ $(0 < \delta < 1)$ [3]). Dans la même note M. de Vito mit en lumière l'observation de M. G. de Rahm sur l'existence de fonctions continues non dérivables ne vérifiant la condition de Hölder pour aucun exposant δ $(0 < \delta < 1)$. C'est la fonction $f(x)$ de la forme (1) où l'on a posé

$$a_n = n^{-2}, \qquad b_n = 2^n \tag{3}$$

et $\varphi(x)$ est une fonction définie par la formule (2), qui en est un exemple.

Or, M. J.-P. Kahane a pu dans [3] formuler ces remarques d'une manière plus précise. Il y dit notamment que « l'exemple de M. de Rahm, à peine modifié, témoigne qu'aucune condition de majoration sur le module de continuité d'une fonction, strictement plus faible que la condition de Lipschitz, n'assure la dérivabilité fut-ce en un seul point. Enfin, une modification supplé-

---

1) Cf. la note 1) page 181.
2) Cf. [2].
3) Cf. (5) où $\psi(h) = h^{\delta}$.

mentaire permet de construire facilement une fonction continue dont le module de continuité en chaque point est aussi « mauvais qu'on veut » ≫. Cette proposition de M. Kahane est appuyée par deux théorèmes qu'il établit. Soit $\psi(h)$ une fonction définie pour $h > 0$, non décroissante, tendant vers zéro lorsque $h \to 0$ et telle que $\psi(h) > 0$. Par une construction basée sur une modification appropriée de l'exemple de M. de Rahm, M. Kahane démontre que dans toute classe de fonctions satisfaisant à la condition généralisée de Hölder (5) et contenant des fonctions non lipschitziennes, il existe des fonctions n'admettant de dérivées en aucun point [1]). Une autre modification de l'exemple de M. de Rahm a permis à M. Kahane de démontrer un théorème qui prouve l'existence d'une fonction continue $f(x)$ dont le module de continuité en chaque point est minoré par une fonction donnée $\psi(h)$.

Il est à remarquer que le second théorème de M. Kahane entraîne le théorème connu [2]) sur l'existence d'une fonction continue $f(x)$ satisfaisant pour tout x à la condition

$$\overline{\lim_{h\to 0}} \frac{|f(x+h)-f(x)|}{\psi(|h|)} = \infty \tag{4}$$

où $\psi(h)$ est une fonction donnée.

On retrouve alors la remarque de M. de Rahm en posant dans la formule (4) par exemple $\psi(x) = |\log h|^{-1}$ pour $0 < h \leqslant e^{-1}$, $\psi(h) = 1$ pour $h > e^{-1}$.

On peut d'ailleurs étendre l'observation de M. de Rahm de la manière suivante [3]). Dans de nombreux travaux on considère une classification plus générale que celle de Hölder. On admet alors comme $\psi(h)$ dans la condition généralisée de Hölder

$$|f(x+h)-f(x)| \leqslant M\psi(|h|), \tag{5}$$

---

1) Ce théorème était connu. Cf. [4], p. 25, Remark 2.

2) Cf. [4] Remark 1 et l'astérique 7) de la page 25. Afin de le prouver il suffit, la fonction $\psi(h)$ étant donnée d'avance, de choisir une suite $\{h_n\}$ tendant vers zéro et une fonction $\psi_0(h)$ de la manière suivante: on prend h_1 arbitraire et l'on pose $\psi_0(h_1) = \psi(h_1)$. On choisit après $0 < h_n < h_{n-1}$ $(n = 2, 3, ..)$ afin que $\psi(h_n) < 4^{-n}\psi(h_1)$ et $\psi_0(h_n) = 2^{-n}\Psi(h_1)$. Si à présent on interpole linéairement les valeurs de la fonction $\varphi_0(h)$ entre les membres voisins de la suite $\{h_n\}$ et l'on applique le second théorème de M. Kahane à la fonction ainsi obtenue, on déduit de ce théorème l'existence d'une fonction $f(x)$ satisfaisant à la condition (4).

3) La généralisation de ces raisonnements résulte du théorème de M. W. Orlicz, cf. [4], p. 12.

(où $\psi(h)$ est une fonction non décroissante, définie et différente de zéro pour $h > 0$ et tendant vers zéro lorsque $h \to 0$) la fonction

$$\begin{aligned} \psi(h) &= h^{\delta} \,|\log h|^{\gamma} \quad && \text{pour } 0 < h \leqslant \alpha\,, \\ \psi(h) &= \psi(\alpha) && \text{pour } h > \alpha\,. \end{aligned} \qquad (6)$$

α peut y être choisi de manière que la fonction $\psi(h)$ soit pour $h < \alpha$ une fonction croissante [1]). On attribue aux paramètres δ, γ les valeurs suivantes: $0 \leqq \delta \leqq 1$ et

si $0 < \delta < 1$ γ est arbitraire,

si $\delta = 1$ $\gamma > 0$, si $\delta = 0$ $\gamma < 0$.

Considérons maintenant uniquement des fonctions continues, définies et bornées dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$. Une telle fonction $f(x)$ appartiendra à la classe $H(\delta, \gamma)$ si elle satisfait pour tout x et pour tout h à la condition (5) où $\psi(h)$ est une fonction définie par les formules (6). On remarque facilement que

si $\delta_1 > \delta_2$ on a $H(\delta_1, \gamma_1) \subset H(\delta_2, \gamma_2)$ indépendamment des valeurs γ_1, γ_2,

si $\delta_1 = \delta_2$ on a $H(\delta_1, \gamma_1) \subset H(\delta_2, \gamma_2)$ pourvu que $\gamma_1 < \gamma_2$

et que la première des deux classes est portion de la seconde au sens propre du mot. Ainsi on parvient à une classification des fonctions $f(x)$ d'après une échelle logarithmico-puissance.

Une fonction continue $f(x)$ satisfaisant pour tout x à la condition (4), où $\psi(h)$ est définie par les formules (6), sera dite de la classe $H^{\infty}(\delta, \gamma)$. Le sens des relations entre les classes $H^{\infty}(\delta, \gamma)$ est opposé à celui des classes $H(\delta, \gamma)$. Comme la non-dérivabilité de la fonction $f(x)$ peut s'écrire sous la forme de $f \in H^{\infty}(1, 0)$ et l'on a $H^{\infty}(1, 0) \supset H^{\infty}(\delta, \gamma)$ pour toutes les valeurs considérées de δ, γ, on conclut que toutes les classes $H^{\infty}(\delta, \gamma)$ contiennent des fonctions continues non dérivables. Il est évident que $H(\delta, \gamma) \,.\, H^{\infty}(\delta, \gamma) = 0$.

Ainsi les observations rapportées par M. de Vito peuvent être formulées comme il suit: il existe une fonction $f(x)$, à savoir

---

[1]) Dans le cas où $\gamma > 0$ on peut poser par exemple $\alpha = e^{-\delta/\gamma}$ et lorsque $\gamma < 0$ $\alpha = 1/2$.

l'exemple de M. de Rahm, qui tout en appartenant à la classe $H^{\infty}(1, 0)$ appartient aussi à chaque classe $H(\delta, 0)$ $(0 < \delta < 1)$ et d'autre part il existe une fonction $f(x)$ [c'est la fonction $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \varphi(2^k x)$ où $\varphi(x)$ est définie par la formule (2)] qui appartient à la classe $H^{\infty}(1, 0)$, mais n'appartient à aucune des classes $H(\delta, 0)$ $(0 < \delta \leq 1)$.

On peut préciser encore ces observations de la manière suivante. Considérons une fonction de la forme (1) où

$$a_n > 0, \quad 0 < b_n < b_{n+1}, \quad b_n \to \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty, \tag{7}$$

et la fonction $\varphi(x)$ est une fonction périodique arbitraire, non constante, vérifiant la condition de Lipschitz. Si l'on définit

$$a_n = A^{-\delta \cdot 2^{n!}} \cdot 2^{\gamma \cdot n!} \cdot \frac{1}{(n!)} k, \quad b_n = A^{2^{n!}}, \tag{8}$$

où $A > 1$, $k > 0$ on obtient l'exemple d'une fonction f appartenant simultanément dans toute l'échelle logarithmico-puissance aux classes $H(\delta, \gamma)$ et $H^{\infty}(\delta, \gamma_1)$ pour chaque $\gamma_1 < \gamma$. Si dans les formules (8) on pose $\delta = 0$, $\gamma = 0$ on obtient une fonction $f \in H^{\infty}(0, \gamma_1)$ pour tout $\gamma_1 < 0$, en particulier une fonction continue sans dérivée qui n'appartient à aucune des classes de l'échelle logarithmico-puissance [1]).

La méthode appliquée dans [4] permet d'établir d'une part les conditions suffisantes pour qu'une fonction f définie par les formules (1), (7) [où $\varphi(x)$ est une fonction périodique arbitraire, non constante et vérifiant la condition de Lipschitz] appartienne à la classe $H(\delta, \gamma)$ et d'autre part les conditions suffisantes pour que la fonction f appartienne à la classe $H^{\infty}(\delta, \gamma)$. En appliquant les premières conditions on établit par exemple la proposition affirmant que la fonction f définie par les formules (1), (7) est de la classe $H(1, 1)$ pourvu que $a_n = a^n$, $b_n = b^n$, $ab = 1$ et $\varphi(x)$ soit une fonction périodique arbitraire non constante, satis-

---

[1]) Cet exemple universel pour l'échelle logarithmico-puissance se trouve dans [4], p. 36, Example 6.

faisant à la condition de Lipschitz [1]). Les secondes conditions ajoutées aux premières permettent dans de nombreux cas de *localiser* la fonction f sur l'échelle logarithmico-puissance, c'est-à-dire de prouver que $f \in H(\delta, \gamma)$ pour certaines valeurs de δ, γ et que simultanément $f \in H^{\infty}(\delta, \gamma_1)$ pour tout $\gamma_1 < \gamma$. C'est grâce à cela qu'on a pu construire l'exemple universel donné plus haut.

La condition suffisante pour que $f \in H^{\infty}(\delta, \gamma)$, qui résulte de cette méthode, se compose de trois conditions. L'une d'elles

$$\lim_{n \to \infty} a_n b_n^{\delta} (\log b_n)^{-\gamma} = \infty \quad ^{2)}$$

ne permet pas dans le cas où $a_n = a^n$, $b_n = b^n$, $ab = 1$ de trancher si $f \in H^{\infty}(\delta, \gamma)$ ou non. Ceci a lieu aussi dans le cas de l'exemple de M. de Rahm. Si cependant on applique la méthode utilisée par M. de Rahm dans la démonstration de la non-dérivabilité de la fonction de son exemple, on arrive parfois à trancher la question.

C'est précisément cette méthode qui a été appliquée au § 2 dans le simple cas d'une fonction continue sans dérivée $f(x; \alpha, \beta)$ de la forme (14) où la fonction $\varphi(x)$ est définie par la relation (2). Selon la valeur des paramètres α, β, cette fonction parcourt toute l'échelle logarithmico-puissance. Ce cas comprend en particulier les exemples donnés par M. de Vito.

§ 1. Théorèmes Préliminaires

Lemme. S'il existe deux suites $\{\xi_n\}$, $\{\eta_n\}$ telles que $\xi_n \to x_0$, $\eta_n \to y_0$, $\xi_n \leqslant x_0 \leqslant \eta_n$ pour tout n et on a

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{f(\eta_n) - f(\xi_n)}{\psi(\eta_n - \xi_n)} = \infty, \tag{9}$$

où $\psi(h)$ est une fonction définie et différente de zéro pour $h > 0$, non décroissante et tendant vers zéro lorsque $h \to 0$, la fonction $f(x)$ satisfait au point x_0 à la relation (4).

---

1) Cf. [4], p. 28, Theorem 10. C'est une généralisation du théorème de M. de Vito concernant la fonction de l'exemple de M. de Rahm.

2) Cf. [4] p. 27, formule (34).

Démonstration. Si ce lemme n'était pas vrai, il existerait deux constantes M, α telles que pour $|h| < \alpha$ et $x = x_0$ l'inégalité (5) aurait eu lieu. On aurait donc eu pour $n > n_0$

$$|f(\eta_n) - f(\xi_n)| \leqslant M\psi(\eta_n - x_0) + M\psi(x_0 - \xi_n) \leqslant 2M\psi(\eta_n - \xi_n)$$

ce qui contredit l'hypothèse (9).

A présent on formulera deux théorèmes sur la fonction $f(x)$ définie par (1), où la fonction $\varphi(x)$ est donnée par la relation (2) et les coefficients a_n, b_n vérifient les conditions (7), les nombres $\beta_n = \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ étant des nombres pairs, $b_1 = 1$. Il est évident que la fonction $f(x)$ est une fonction continue.

Théorème 1. Si la série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ est divergente, la fonction $f(x)$ satisfait dans l'ensemble Z dénombrable et dense de l'axe Ox à la relation (4) avec $\psi(h) = h$. La fonction $f(x)$ n'a donc pas de dérivée dans l'ensemble Z.

Démonstration. La fonction $\varphi(x)$ étant périodique, on se bornera à rapporter les raisonnements à l'intervalle $< 0,1 >$. Le graphique de la fonction

$$\varphi_n(x) = a_n \varphi(b_n x) \tag{10}$$

est une ligne brisée formant avec l'axe Ox des triangles adhérents dont la base a la longueur b_n^{-1} et dont les extrémités sont les zéros de la fonction $\varphi_n(x)$. Aux milieux des bases la fonction $\varphi_n(x)$ est maximum avec les valeurs $\frac{1}{2} a_n$. Les deux côtés des dits triangles ont comme les modules des coefficients angulaires les produits $a_n b_n$.

Désignons par n_0 une valeur établie de n et par x_0 un zéro choisi de la fonction $\varphi_{n_0}(x)$. Il est à remarquer que le nombre β_n étant pair, les points x_0 et $x_0 + b_{n_0}^{-1}$ sont des zéros de toute fonction $\varphi_k(x)$, où $k \geqslant n_0$. Il en résulte

$$\frac{\varphi_k(x_0 + b_{n_0}^{-1}) - \varphi_k(x_0)}{b_{n_0}^{-1}} = \begin{matrix} 0 & \text{pour} & k \geqslant n_0 \\ \alpha_k & \text{pour} & k < n_0 \end{matrix},$$

où

$$|\alpha_k| = a_k b_k \tag{11}$$

et

$$\rho_{n_0} = \frac{f(x_0 + b_{n_0}^{-1}) - f(x_0)}{b_{n_0}^{-1}} = \sum_{k=1}^{n_0-1} \alpha_k \,. \tag{12}$$

x_0 étant établi, calculons pour $n > n_0$ la valeur du coefficient différentiel

$$\rho_n = \frac{f(x_0 + b_n^{-1}) - f(x_0)}{b_n^{-1}} = \rho_{n_0} + \sum_{k=n_0}^{n-1} a_k b_k \,. \tag{13}$$

On en déduit que dans le cas où la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ diverge la fonction $f(x)$ vérifie au point x_0 la relation (4) avec $\psi(h) = h$. Ceci a lieu pour tout point de partage en b_n sous-intervalles égaux de l'intervalle $< 0,1 >$. En désignant par Z l'ensemble de ces points pour $n = 1, 2, \ldots$ et ceux qui leur correspondent dans le partage des intervalles $< p, p+1 >$ (p entier), la thèse du théorème se trouve démontrée.

Théorème 2. Si pour toute suite $\{ \lambda_k \}$ où $| \lambda_k | = 1$, la série $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k b_k$ diverge [11]), la fonction $f(x)$ est de la classe $H^{\infty}(0, 1)$, c'est-à-dire elle n'a en aucun point de dérivée.

Démonstration. La démonstration est presque immédiate. Il suffit de substituer dans la formule (12) x_0 et $x_0 + b_{n_0}^{-1}$ respectivement par les deux extrémités de l'intervalle $< \xi_n, \eta_n >$, formé par le partage de l'intervalle $< 0, 1 >$ en b_{n_0} intervalles égaux, de remplacer n_0 par n et de choisir les intervalles $<\xi_n, \eta_n>$ de manière qu'ils contiennent un certain point x choisi arbitrairement. En s'appuyant sur le lemme avec $\psi(h) = h$, on aboutira à la proposition avancée.

Exemples. Le théorème 2 trouve des applications dans les cas suivants: *a)* $a_n = 10^{-n}$, $b_n = 2^{n!}$ (exemple de M. Faber); *b)* $a_n = a^n$, $b_n = b^n$, où $ab \geqslant 1$, $b > 0$ pair, $0 < a < 1$; *c)* $a_n = n^{-\alpha}$, $b_n = b^n$, $b > 0$ pair, $\alpha > 1$. Le théorème 2 n'est pas applicable lorsque $a_n = n^{-\alpha} b^{-n}$, $b_n = b^n$, $b > 0$ pair, $\alpha > 1$ mais on peut alors utiliser le théorème 1.

---

1) Cette hypothèse est équivalente à $\overline{\lim_{k \to \infty}} a_k b_k > 0$

§ 2. Exemple d'une fonction continue sans dérivée comprenant toute l'échelle logarithmico-puissance

Considérons la fonction $f(x)$ de la forme

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha} (b^{-\beta})^k \varphi(b^k x), \tag{14}$$

où $\varphi(x)$ est une fonction définie par la formule (2) et $b > 0$ est un nombre pair. Le domaine de variation des paramètres α, β qui y interviennent sera le suivant:

$$0 \leqslant \beta \leqslant 1, \tag{15}$$

et si $\beta = 0$, on supposera $\alpha > 1$, tandis que si $\beta = 1$ on admettra $\alpha \leqslant 1$. Ceci étant, la continuité de la fonction $f(x)$ et les hypothèses du théorème 1 sont réalisées.

Remarquons que
pour $0 < \beta < 1$, les valeurs du paramètre α étant arbitraires, pour $\beta = 0$, $\alpha > 1$ et pour $\beta = 1$, $\alpha \leqslant 0$ le produit

$$a_k b_k = k^{-\alpha} b^{(1-\beta)k} \tag{16}$$

est minoré par une constante indépendante de k. La fonction f étant partout continue est en vertu du théorème 2 partout non dérivable pour ces valeurs des paramètres β, α.

Quant aux conditions suffisantes pour qu'une fonction $f(x)$ de la forme (1) appartienne à la classe $H(\delta, \gamma)$ lorsque les coefficients a_n, b_n satisfont aux conditions (7), elles ont été exprimées par l'inégalité (33) de [4] (p. 26). Si l'on tient compte de celle-ci ainsi que de la forme de la fonction (14), on peut formuler la condition suffisante pour que la fonction (14) soit de la classe $H(\delta, \gamma)$ moyennant les deux inégalités

$$b^{(\delta-1)n} n^{-\gamma} \sum_{k=1}^{n} k^{-\alpha} b^{(1-\beta)k} < M \tag{17}$$

$$b^{\delta(n+1)} (n+1)^{-\gamma} \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-\alpha} b^{-\beta k} < M, \tag{18}$$

où M est une constante indépendante de n.

Afin de trouver la limite de l'expression à gauche de l'inégalité (17) lorsque $n \to \infty$, on appliquera le théorème de Stolz avec les suivantes valeurs de paramètres δ, γ, β, α:

$$0 \leqslant \delta < 1, \ \gamma \text{ arbitraire ou } \delta = 1, \ \gamma > 0$$

et simultanément

$$0 \leqslant \beta < 1, \ \alpha \text{ arbitraire ou } \beta = 1, \ \alpha \leqslant 1.$$

La recherche de la limite de l'expression à gauche de l'inégalité (17) sera remplacée par la recherche de la limite du produit

$$n^{-(\alpha+\gamma)} b^{n(\delta-\beta)} \left[1 - \left(\frac{n-1}{n} \right)^{\gamma} b^{\delta-1} \right]^{-1} \tag{19}$$

où les paramètres admettent les valeurs considérées ci-dessus. On voit bien que cette limite est finie dans le cas où

$$0 \leqslant \beta < 1, \ \delta = \beta, \ \alpha + \gamma \geqslant 0, \tag{20}$$

ainsi que dans celui où

$$\beta = 1, \ \delta = \beta, \ \gamma = 1 - \alpha. \tag{21}$$

Voyons maintenant si pour les valeurs des paramètres δ, γ ainsi établies, la condition (18) est vérifiée. Si l'on pose $k - n - 1 = p$ et l'on admet $\delta = \beta$, l'expression à gauche de l'inégalité (18) peut s'écrire sous la forme

$$\sum_{p=0}^{\infty} b^{-\beta p} (n+1)^{-\gamma} (p+n+1)^{-\alpha} \tag{22}$$

a) Si $0 < \beta < 1$, $\gamma = -\alpha$, on a

pour $\alpha \geqslant 0$: $b^{-\beta p} \left(\dfrac{n+1}{p+n+1} \right)^{\alpha} \leqslant b^{-\beta p}$, la série (22) est donc bornée pour chaque n par le nombre $M = \sum\limits_{p=0}^{\infty} b^{-\beta p}$;

pour $\alpha < 0$ on a pour tout $n \geqslant 1$: $\left(\dfrac{p+n+1}{n+1} \right)^{-\alpha} \leqslant \left(\dfrac{p}{2} + 1 \right)^{-\alpha}$.

Dans ce cas l'inégalité (18) est satisfaite en admettant

$$M = \sum_{p=0}^{\infty} b^{-\beta p}\left(\frac{p}{2}+1\right)^{-\alpha} \text{ pour tout } n.$$

b) Si $\beta = 0$, $\alpha > 1$, la série (22) prend la forme

$$\sum_{p=0}^{\infty} (n+1)^{-\gamma}(p+n+1)^{-\alpha}.$$

En appliquant le critère intégral de la convergence des séries on limite la somme de la série par les nombres $(\alpha-1)^{-1}(n+1)^{-\alpha-\gamma+1}$, $\frac{1}{2}+(\alpha-1)^{-1}(n+1)^{-\alpha-\gamma+1}$.

L'inégalité (18) est donc vérifiée indépendamment de la valeur de n lorsque $-\alpha-\gamma+1 \leqslant 0$, c'est-à-dire $\gamma \geqslant 1-\alpha$.

c) Admettons $\beta = 1$, $\gamma = 1-\alpha$. De même que dans le cas *a)* l'inégalité (18) est satisfaite pout tout n: si $\alpha < 0$ pour $M = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{\infty} b^{-p}\left(\frac{p}{2}+1\right)^{-\alpha}$ et si $\alpha \geqslant 0$ pour $M = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{\infty} b^{-p}$.

Si l'on rapproche les cas *a)*, *b)*, *c)* ainsi que (20) et (21), on trouve

a) si $0 < \beta < 1$, α est arbitraire, on a $f \in H(\beta, -\alpha)$,

b) si $\beta = 0$, $\alpha > 1$, on a $f \in H(0, 1-\alpha)$,

c) si $\beta = 1$, $\alpha \leqq 1$, on a $f \in H(1, 1-\alpha)$.

Le théorème 1 servira à trouver une condition suffisante pour que la fonction $f(x)$ définie par la formule (14) satisfasse aux points de l'ensemble Z [1]) la relation (4) avec $\psi(h) = h^{\delta}\,|\log h|^{\gamma}$ ou, comme nous le dirons dans la suite, pour que la fonction $f(x)$ soit aux points de l'ensemble Z de la classe $H^{\infty}(\delta, \gamma)$. Cette propriété de la fonction $f(x)$ pourra s'écrire sous la forme $f \in H_Z^{\infty}(\delta, \gamma)$.

Prenons un point $x_0 \in Z$ parmi les points du partage des

---

[1]) L'ensemble Z a été défini à la fin de la démonstration du théorème 1 comme l'ensemble de tous les points du partage de chacun des intervalles $< p, p+1 >$ (p entier) en b^n intervalles égaux.

intervalles $< p, p+1 >$ (p entier) en b^{n_0} sous-intervalles égaux. Si pour $n \to \infty$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{f(x_0+b_n^{-1})-f(x_0)}{(b_n^{-1})^\delta \mid \log b_n^{-1} \mid^\gamma} = \infty,$$

la fonction $f(x)$ est au point x_0 de la classe $H^\infty(\delta, \gamma)$. Si l'on présente le quotient sous la forme

$$\frac{f(x_0+b_n^{-1})-f(x_0)}{b_n^{-1}} \cdot \frac{b_n^{-1}}{(b_n^{-1})^\delta \mid \log b_n^{-1} \mid^\gamma}$$

et l'on tient compte des relations (13) et (16), on trouve comme valeur de ce quotient

$$\frac{b^{(\delta-1)n}}{n^\gamma (\log b)^\gamma} \rho_{n_0} + \frac{b^{(\delta-1)n}}{n^\gamma (\log b)^\gamma} \sum_{k=n_0}^{n-1} k^{-\alpha} b^{(1-\beta)k}.$$

Attendu que le premier composant de cette somme tend vers zéro, lorsque $n \to \infty$, dans tout le domaine de variation des paramètres δ, γ, on pourra se contenter d'examiner uniquement le second composant. L'étude de la limite de cette expression sera remplacée par l'étude de la limite du produit

$$(n-1)^{-(\alpha+\gamma)} b^{n(\delta-\beta)+\beta-1} \left[\left(\frac{n}{n-1}\right)^\gamma - b^{\delta-1}\right]^{-1}$$

et l'on y admettra les mêmes valeurs des paramètres que dans le cas de l'étude de l'expression à gauche de l'inégalité (17).

Considérons les cas qui correspondent à *a)*, *b)*, *c)* énumérés ci-dessus. Si

$$0 < \beta < 1, \ \delta = \beta, \ \gamma < -\alpha$$

ou bien

$$\beta = 0, \ \delta = \beta, \ \gamma < -\alpha, \ \alpha > 1,$$

on conclut que $f \in H_Z^\infty(\beta, \gamma)$.

Dans le cas où $\beta = 1$, $\delta = \beta$, $\gamma > 0$ on trouve $f \in H_Z^\infty(1, \gamma)$ avec $\gamma < 1-\alpha$.

En résumé, il vient:

si $0 < \beta < 1$, α est arbitraire, on a $f \in H(\beta, -\alpha)$,
et si $\gamma < -\alpha$ on a $f \in H_Z^\infty(\beta, \gamma)$,
si $\beta = 0$, $\alpha > 1$ on a $f \in H(0, 1-\alpha)$
et lorsque $\gamma < -\alpha$, on a $f \in H_Z^\infty(0, \gamma)$,
si enfin $\beta = 1$, $\alpha \leqslant 1$, on a $f \in H(1, 1-\alpha)$,
et lorsque $0 < \gamma < 1-\alpha$, on a $f \in H_Z^\infty(1, \gamma)$.

Ainsi la fonction de l'exemple de M. G. de Rahm ($\beta = 1$, $\alpha = 0$) est de la classe $H(1, 1)$, sans appartenir à aucune des classes $H(1, \gamma)$ ($\gamma < 1$), car pour $\gamma < 1$ elle est de la classe $H_Z^\infty(1, \gamma)$. De même la fonction dont les coefficients sont définis par (3) ($\beta = 0$, $\alpha = 2$) appartient simultanément à la classe $H(0, -1)$ et à $H_Z^\infty(0, \gamma)$ avec $\gamma < -2$. Elle n'appartient donc à aucune des classes $H(0, \gamma)$ avec $\gamma < -2$. La méthode donne en deuxième cas ($\beta = 0$, $\alpha > 1$) la localisation de la fonction $f(x)$ non complète.

BIBLIOGRAPHIE

1. L. de Vito, Su un esempio di funzione continua senza derivata. *Enseignement mathématique*, IV (1958), pp. 281-283.
2. G. de Rahm, Sur un exemple de fonction continue sans dérivée. *Enseignement mathématique*, III (1957), pp. 71-72.
3. J.-P. Kahane, Sur l'exemple, donné par M. de Rahm, d'une fonction continue sans dérivée. *Enseignement mathématique*, V (1960), pp. 53-57.
4. E. Tarnawski, Continuous functions in the logarithmic-power classification according to Hölder's conditions. *Fundamenta Mathematicae*, XLII (1955), pp. 11-37.