Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 9 (1963)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: RÉFLEXIONS SUR LES RAPPORTS D'AARHUS ET DUBROVNIK
Autor: Cartan, H.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-38775

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 20.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

RÉFLEXIONS SUR LES RAPPORTS D'AARHUS ET DUBROVNIK

par H. Cartan, Paris

Je n'ai guère de titres à prendre la parole, car c'est la première fois que je participe aux travaux de la C.I.E.M., et j'ai vraiment très peu d'expérience de l'enseignement secondaire. En venant ici, je supposais qu'on discuterait principalement des rapports d'Aarhus et Dubrovnik, les prenant comme base de départ pour les compléter éventuellement ou les améliorer si possible. Un travail considérable a été accompli dans les réunions antérieures, et il convient d'y rendre hommage. Mais en écoutant quelques-unes des conférences qui viennent d'être faites et les discussions qui les ont suivies, j'ai eu l'impression que le principe même de la réforme des études secondaires en mathématiques était remis en cause par certains orateurs. Et je me suis souvenu du personnage de Claudel qui, dans « Le soulier de satin », réclame à tout prix du nouveau, mais à une condition, c'est que « ce nouveau soit exactement semblable à l'ancien ».

Nous avons notamment entendu préconiser le maintien du mode d'exposition d'Euclide pour la géométrie. Je me demande si Euclide serait aujourd'hui du côté de ceux qui prennent ainsi sa défense; je m'imagine plutôt que son caractère le porterait à récrire toute la géométrie sur des bases nouvelles, en tenant compte des idées qui ont acquis droit de cité en mathématiques depuis vingt siècles. A l'époque d'Euclide, les Grecs n'avaient pas à leur disposition le corps des nombres réels, peut-être parce qu'ils ne voulaient pas le considérer, pour des raisons philosophiques qui ne nous touchent plus aujourd'hui. Cette absence du corps des réels les obligeait à des contorsions dont la trace a malheureusement subsisté jusqu'à nos jours dans l'enseignement élémentaire: la tradition l'a emporté sur la raison. Le respect pour une œuvre vénérable n'a certes pas empêché les mathéma-

tiques de progresser, mais il a paralysé l'évolution, pourtant nécessaire, de l'enseignement élémentaire de la géométrie.

Nous sommes tous d'accord, je crois, sur la nécessité urgente d'un changement dans l'enseignement des mathématiques (et donc, en particulier, de la géométrie) au niveau des écoles secondaires. Cet enseignement doit être apte à former les jeunes gens qui poursuivront plus tard des études scientifiques à l'Université. Mais il faut aussi songer à ceux qui ne feront plus de mathématiques après avoir quitté l'enseignement secondaire. Pour ceux-ci comme pour les autres, nous devons élaguer, simplifier, éviter d'inculquer des idées fausses (chacun de nous a eu bien de la peine à se défaire des idées fausses qu'il avait reçues dans sa jeunesse; il y a fallu des années et nous n'y sommes pas tous parvenus). A ceux-ci comme aux autres, il faut donner des outils maniables, ainsi qu'une formation de l'esprit. Quant à ceux qui poursuivront plus tard des études mathématiques, ils devront avoir été préparés à recevoir l'enseignement des universités.

Pour mettre en œuvre une réforme aussi radicale de l'enseignement des mathématiques, il est nécessaire de *préciser un programme*. Ceci me semble évident, et je ne suis pas d'accord, sur ce point, avec mon collègue et ami Freudenthal, qui déclarait avant-hier que l'essentiel était non de discuter d'un programme, mais de se préoccuper de didactique. Certes, la didactique ne doit pas être négligée, et je suis fondamentalement d'accord avec la théorie des « niveaux » de M. Freudenthal. Mais cette didactique, nous avons besoin de savoir à quoi elle s'appliquera. C'est pourquoi la tâche première, à mon avis, consiste à *préciser les objectifs mathématiques* que l'on se propose d'avoir atteints à la fin des deux cycles secondaires. Une fois l'accord réalisé sur le programme global des connaissances à inculquer au cours des études secondaires, nous pourrons aborder utilement les problèmes didactiques. Nous procéderons alors à reculons, en descendant du niveau supérieur (sur lequel l'accord aura déjà été réalisé) pour tenter de définir, de proche en proche, les niveaux antérieurs par lesquels l'élève aura dû passer. Je résume: mettons-nous d'abord d'accord sur le contenu mathématique de l'enseignement, et la didactique suivra. A vrai dire, le problème de la didactique ne sera résolu que s'il y a de

bons professeurs; soyons assurés qu'alors ils formeront de bons élèves.

Mais où trouver ces professeurs ? Comment former les maîtres capables d'enseigner les nouveaux programmes ? Ils ont besoin d'être aidés, guidés. A mon avis, c'est à ces maîtres que nous devons penser par priorité: notre tâche la plus urgente, c'est d'*établir un texte mathématique à l'usage des maîtres*, texte qui devra donner le contenu des théories à enseigner aux élèves, et aussi indiquer quelques aperçus « hors programme », destinés seulement aux professeurs. Car un maître ne doit pas borner son savoir aux simples connaissances qu'il doit enseigner; il est nécessaire qu'il ait des vues allant au-delà des matières de son enseignement. Par exemple, il sera bon que le maître ait quelque connaissance des géométries non-euclidiennes, pour mieux comprendre la portée de l'enseignement axiomatique de la géométrie euclidienne qu'il pourra être amené à donner (dans la mesure où cet enseignement sera axiomatique; nous reviendrons tout à l'heure sur cette question). Enfin, ce livre à l'usage des maîtres devra montrer comment une même question peut être traitée successivement à des niveaux différents.

Permettez-moi de vous donner deux exemples de ces changements de niveau. Premier exemple: le plan étant rapporté à deux axes de coordonnées (et chaque point ayant donc deux coordonnées x et y), les droites sont les sous-ensembles du plan qui sont définis par une équation linéaire $ax+by = c$ (a et b non nuls tous deux). Cette assertion est-elle un théorème ou une définition ? Je pense qu'au cours de l'enseignement, elle sera d'abord un *théorème*, plus ou moins bien démontré dans le cadre d'une géométrie plane basée soit sur l'intuition, soit sur des axiomes fondés sur l'intuition; mais à un stade ultérieur, ce théorème deviendra une *définition*: le plan sera défini comme espace vectoriel (ou affine si l'on préfère), et les droites seront, par définition, les sous-ensembles définis par une équation linéaire. Deuxième exemple: le « théorème de Pythagore » est-il un théorème ou une définition ? Il sera d'abord un théorème, plus ou moins bien démontré à partir des notions intuitives de longueur et d'orthogonalité; ultérieurement, ce sera une définition, la donnée de la forme quadratique x^2+y^2 définissant la

structure euclidienne d'un espace qui, jusque-là, possédait seulement une structure affine.

J'aborde maintenant la question qui est plus spécialement à l'ordre du jour de cette réunion: l'enseignement de la géométrie. A mon avis, cette question ne peut être traitée séparément, car il est nécessaire que l'enseignement de la géométrie et celui de l'algèbre soient menés de front. Nous ne voulons plus du cloisonnement des connaissances mathématiques. Ce que nous désirons, c'est que les élèves apprennent à raisonner correctement, qu'ils acquièrent des techniques de calcul, et aussi qu'ils soient à même d'utiliser des « méthodes géométriques » (et un langage géométrique) pour résoudre des problèmes dont la nature est, au fond, algébrique. En bref, nous voudrions qu'ils puissent combiner harmonieusement l'intuition spatiale et la rigueur du raisonnement logique.

Vous n'attendez pas que je donne des recettes universelles pour atteindre ce but. Mais je voudrais tenter, devant vous, d'esquisser rapidement sur quelle base pourrait être fondé, selon moi, l'enseignement de la géométrie élémentaire. Je n'ai d'ailleurs aucune prétention à l'originalité, et je pense que les idées que je vais formuler sont en accord avec celles déjà exprimées par le professeur Artin; en revanche, elles s'écartent un peu de la conception axiomatique de Choquet. Tout d'abord, je me rallie entièrement à l'opinion selon laquelle la notion d'*espace vectoriel* (et celle d'espace affine, qui s'en déduit aussitôt) doit être une des notions fondamentales du nouvel enseignement des mathématiques. Cette notion, avec celle de produit scalaire, permettra de fonder (ou, si l'on préfère, de reconstruire) toute la géométrie euclidienne. Mais la notion d'espace vectoriel ne peut évidemment pas être « parachutée » arbitrairement; et pour la dégager à l'usage des élèves, il est nécessaire que ceux-ci aient déjà vu et manipulé des espaces vectoriels (sans le savoir encore). Une autre difficulté provient du fait que nous avons besoin, en géométrie, d'un espace vectoriel à deux dimensions (ou trois dimensions) *sur le corps réel*. Il nous faudrait donc, en principe, connaître le corps des nombres réels (et sa relation d'ordre) avant de pouvoir commencer la géométrie. Bien entendu, il n'est pas question de faire préalablement une théorie complète

et rigoureuse des nombres réels. Cependant, on devra tenter de dégager la notion de nombre réel et celle d'espace vectoriel, à partir des intuitions géométriques existant chez l'élève. De quelle manière ? A mon avis, *le plus vite sera le mieux.* Je ne prétends pas qu'on doive précipiter les étapes qui sont psychologiquement nécessaires; mais j'affirme que l'on doit se préoccuper d'amener aussi vite que possible l'élève à se représenter, par exemple, le plan de la géométrie comme un espace vectoriel à deux dimensions sur le corps réel, les droites étant définies par des équations linéaires. En effet, une fois ce résultat atteint, il sera possible (pour s'en tenir à la géométrie):

1° d'initier les élèves aux techniques indispensables de la géométrie analytique;

2° de fonder sur une base solide (en reprenant les choses à zéro) les notions essentielles de la géométrie, sans qu'il soit désormais nécessaire de recourir à l'axiomatique. On pourra en effet procéder alors au moyen de définitions explicites, de caractère algébrique.

Pour mieux préciser ma pensée, je dirai que le début de l'axiomatique de Choquet me semble utile, et même indispensable, pour arriver à la structure vectorielle du plan (ou de l'espace); mais qu'une fois ce résultat atteint, la suite de l'axiomatique de Choquet me semble superflue, puisque ses « axiomes » deviennent des « théorèmes » une fois que l'on reconstruit la géométrie sur de nouvelles bases (structure vectorielle, et éventuellement produit scalaire). Entrons un peu dans les détails:

a) *Introduction des nombres réels.* — Il n'est pas question de formuler un système complet d'axiomes, ou, si vous préférez, de formuler explicitement *toutes* les propriétés qui serviraient à caractériser axiomatiquement le corps des réels. Mais très tôt, en utilisant l'intuition éveillée par l'usage d'une règle graduée, placée sur une droite, on devra convaincre l'élève qu'à chaque nombre (positif, négatif ou nul) correspond alors un point de la droite, et réciproquement. On dégagera la notion du *groupe additif* des réels, et de sa relation d'ordre; la notion de translation (addition d'un nombre fixe) qui conserve la relation d'ordre, etc... On précisera davantage: une droite étant donnée, c'est le choix

d'une origine et d'un point unité qui déterminera la correspondance entre les points de la droite et les nombres réels. La multiplication des nombres réels par un nombre a correspond alors au changement d'unité. Je n'ai pas le temps de détailler ici, mais chacun voit quels développements on peut donner. Il n'est pas question de faire des démonstrations au sens rigoureux du terme, puisqu'aussi bien ni la droite ni les nombres réels n'ont été vraiment définis. Mais il s'agit de convaincre psychologiquement l'élève que la droite de la géométrie possède des propriétés, disons algébriques, et pour tout dire, possède une certaine structure.

b) *Plan à deux dimensions.* — Je me bornerai au cas du plan, car une fois que l'élève aura compris ce qui se passe pour 2 dimensions, il sera facile d'introduire les espaces vectoriels à 3 dimensions (je ne veux pas dire que, dans les classes élémentaires, la connaissance expérimentale des corps à 3 dimensions doive être négligée !). Très tôt, il y aura avantage à utiliser du papier quadrillé pour repérer les points d'un plan. Quant à l'analyse de la structure du plan, nous suivrons d'abord le début de l'axiomatique de Choquet, qui nous amènera à la projection oblique, et au repérage des points du plan par les couples de nombres réels. Il restera à prouver que toute droite est caractérisée par une équation du premier degré; cela découlera essentiellement du *théorème de Thalès*, dont la démonstration sera donc une pièce maîtresse de l'édifice. Cette démonstration sera plus ou moins complète, suivant qu'on escamotera ou non le cas des rapports irrationnels. Comme vous le savez, le contenu algébrique du théorème de Thalès est le suivant: si une application f de R dans R respecte l'ordre et satisfait à $f(x+y) = f(x)+f(y)$, alors f est linéaire: $f(x) = ax$, a étant un nombre réel fixe.

Alors, nous avons maintenant la structure vectorielle du plan (une fois choisie une origine), et nous pouvons, dans ce cas, vérifier les axiomes d'un espace vectoriel. Rien n'empêche de donner d'autres exemples d'espaces vectoriels (par exemple celui formé par les trinômes du second degré en x). Je pense qu'à ce point l'élève admettra que l'on puisse reconstruire l'espace à 3 dimensions à partir d'un espace vectoriel de dimension 3.

c) *Géométrie plane euclidienne.* — La difficulté consistera à admettre ce qu'il faut sur les « distances » et la notion d'orthogonalité pour pouvoir « démontrer » le théorème de Pythagore. Ceci a été fait explicitement, de diverses façons, dans les rapports d'Aarhus et de Dubrovnik. Alors, dans le plan rapporté à deux vecteurs unitaires et orthogonaux, on a l'expression du produit scalaire, on peut étudier le groupe des déplacements, etc. (voir par exemple le rapport de Dubrovnik, p. 193).

En résumé, je souhaiterais que la géométrie classique (affine ou euclidienne) fût exposée avec le *minimum d'axiomatique*, et le *maximum d'explicitations algébriques*. Ces explicitations algébriques n'excluent nullement le *langage géométrique*; elles le justifient ! Elles n'excluent pas davantage la solution des problèmes par voie géométrique; il y aura toujours intérêt à ce qu'un même problème soit traité de deux manières, par voie géométrique et par voie analytique.

Prof. H. Cartan
Institut Henri Poincaré
11, rue Pierre Curie
Paris V^e^.