Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 9 (1963)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: GEOMETRIA ELEMENTARE CLASSICA E METODI MODERNI
Autor: Morin, Ugo
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-38774

GEOMETRIA ELEMENTARE CLASSICA E METODI MODERNI

Ugo Morin, Padova

Mi dispiace di non aver partecipato alle precedenti riunioni indette dall'O.E.C.D., poichè solo di recente sono stato aggregato alla Commissione per l'Insegnamento. Ritenevo di dover fare una conferenza in cui avrei potuto parlare di Geometria elementare, intesa come la più generale interpretazione della realtà empirica, della quale mi sto occupando. Ma, visto che lo scopo di questo Convegno è di fare un passo avanti rispetto ai precedenti e in particolare al programma di *Dubrovnik*, ritengo doveroso dedicare il tempo a disposizione a questo problema.

Fin dall'inizio desidero esprimere un sentito ringraziamento agli autori del poderoso lavoro svolto e un accordo con questo. Per quanto si riferisce all'algebra l'accordo è completo, permane invece qualche perplessità per la geometria.

Il compito per l'algebra è stato più facile, poichè l'algebra moderna non è in alcun punto in contrasto con quella classica, che delle astrazioni dà interpretazioni concrete importanti. L'algebra astratta fornisce gli strumenti più appropriati per la costruzione dei numeri interi, razionali, reali, complessi a partire da quelli naturali. Essa è inoltre il campo più fecondo per le applicazioni del metodo assiomatico, che permette di costruire direttamente uno dei corpi numerici ora ricordati oppure strutture algebriche più generali.

Per la geometria, che nell'insegnamento ha maggiori tradizioni, si sono presentate maggiori difficoltà.

Ciò dipende in parte dal fatto che a *Dubrovnik* i due programmi di algebra e geometria sono stati (evidentemente) sviluppati da due Comitati diversi, con risultati meno unitari per la geometria; ma più ancora dipende, a mio avviso dal naturale contrasto fra geometria elementare — geometria astratta e fra scienza applicata — scienza primitiva.

Nella geometria elementare ci si propone una sistemazione logico-deduttiva di proprietà suggerite dalla realtà empirica, la cui interpretazione si perfeziona e modifica con il progredire del pensiero scientifico. Perciò la geometria elementare non avrà mai una sistemazione definitiva, quale la ha avuta ad esempio la teoria dei gruppi astratti, che è una creazione della mente umana, ma seguirà questo continuo sviluppo.

In una geometria astratta (ad es. geometria finita, piani grafici, piani non desarguesiani, ...), svincolata dalla geometria elementare, il metodo assiomatico si sviluppa diversamente nel seguente moto:

— All'inizio si enunciano alcune proposizioni, i *postulati*, i quali contengono alcuni sostantivi e verbi non esistenti nel linguaggio comune (o presi a prestito dal linguaggio comune con nuova eccezione), che costituiscono le *idee* e le *relazioni primitive.* Intorno a queste idee e relazioni si possono allora enunciare (come vere) tutte le proposizioni che conseguono dei postulati (teoremi).

Pertanto i postulati non danno una definizione delle idee e relazioni primitive, ma una loro limitazione e interpretazione formale: nel senso che intorno a queste idee e relazioni si possono annunciare (come vere) soltanto le proposizioni che conseguono logicamente dai postulati.

Per i postulati della geometria elementare il requisito essenziale è la *completezza*; cioè che ogni proprietà della geometria intuitiva si possa trovare come teorema della geometria razionale. Invece requisito essenziale dei postulati di una geometria astratta è la *compatibilità* (che per la geometria elementare è garantita dalla evidenza intuitiva).

La geometria superiore, nei suoi diversi rami moderni, è una scienza applicata nella quale confluiscono diverse scienze (algebra lineare, algebra astratta, topologia, funzioni algebriche, funzioni analitiche, forme differenziali, ...). Ad es. nella geometria algebrica si studiano le proprietà di un corpo di funzioni algebriche. Queste potrebbero venire studiate anche senza introdurre le denominazioni di spazio lineare, varietà algebriche, punto generico, ecc... Ciò si fa unicamente perchè la « suggestione geometrica » acquisita con lo studio tradizionale della geometria elementare dà una guida, una possibilità di collegare enti così complessi, che il solo algoritmo non permetterebbe di padroneggiare.

La geometria di *Euclide* è stata invece impostata come scienza primitiva mentre, a mio avviso, la geometria elementare non deve essere tale, ma deve poggiare su scienze ad essa propedeutiche, che dobrebbero venire elencati.

Fra queste figurerà sempre la teoria degli insiemi, propedeutica ad ogni altro ramo della matematica. Giustamente si dice di insegnarla già nel primo ciclo (11-13 anni), anzi alle scuole elementari.

Ciò si fa già nella geometria elementare quando si afferma: lo spazio, le figure sono insiemi di punti, si definisce l'intersezione di due figure; ecc... Anche l'aritmetica viene continuamente premessa.

Orbene l'insegnamento dell'algebra astratta fornirà un nuovo potente strumento propedeutico allo studio della geometria, che sarà di questa un'espressiva applicazione. Ogni impostazione assiomatica della geometria diverrà più semplice e risulterà rafforzato il carattere unitario della matematica. Ad esempio, lo spazio vettoriale che realizza la geometria affine si potrà presentare direttamente come « un gruppo abeliano dotato di operatori ». L'interessante impostazione di Artin, della quale ha parlato ieri Stone, si basa su nozioni insiemistiche e gruppali ? Nel libro di Bachmann uscito recentemente, la geometria viene addirittura sviluppata come un capitolo della teoria dei gruppi. Relazioni di permutabilità in un certo gruppo vengono interpretate come relazioni di incidenza o perpendicolarità nel « piano gruppale »; ecc...

Però vi interviene sempre questa misteriosa « intuizione geometrica ». Nel libro *Geometric Algebra* di Artin al II° capitolo in cui incomincia la geometria (il I° è dedicato a premesse di teoria dei gruppi) non vi è alcuna figura. Ma andando avanti, quando le cose si complicano, queste figure balzano fuori !

Una delle difficoltà per accordare il programma dell'insegnamento della geometria in Italia con quello di *Dubrovnik* sta nella diversa distribuzione dei due cicli: 1° ciclo di 5 anni, 2° di 3, in quello di *Duvrobnik*; 1° di 3 anni (scuola media inferiore), 2° di 5 anni nella scuola italiana. Il titolo di studio che si ottiene con la scuola media inferiore permette l'accesso a certe carriere. Quindi in essa si dà ai giovani una cultura relativamente completa. Il programma di geometria intuitiva cerca di coprire tutte la geometria, inclusa la stereometria. I nostri giovani iniziano così il secondo ciclo della geometria già all'età di 13-14 anni. Perciò i programmi ministeriali consigliano di non iniziare il 2° ciclo della geometria col metodo razionale, ma di proseguire con il metodo intuitivo, reso via via più rigoroso ed appoggiato a deduzioni logiche.

Questo consiglio è stato seguito nei nostri testi scolastici, nei quali si evita una assiomatica globale, nel seguente modo:

Partendo da osservazioni, esperienze, si ricorda le relative proprietà geometriche già studiate alle scuole medie inferiori, poi si enunciano alcune di queste come proprietà vere fondamentali (chiamate con parola che incute soggezione ai giovani, *postulati*). Enunciati alcuni di questi e dedotte le proprietà intuitive già note ed altre sfuggite alla indagine intuitiva, si scelgono poi ulteriori postulati e così di seguito. Questo metodo didattico ha dato da noi buoni risultati.

Da parte mia lo trovo molto interessante e vorrei far vedere come fin dall'inizio, prima del postulato di *Euclide*, si presenti la possibilità di modificare l'assiomatizzazione della geometria intuitiva. Mi permetterò di cogliere l'occasione per porre una domanda alla cui risposta sono particolarmente interessato.

Nella tradizione italiana (come in HILBERT) si incomincia con la geometria sopra una retta, senza tener conto della sua immersione nel piano. Questa si poggia su due postulati che (tra di noi) possiamo così enunciare:

Ax I. Una retta s è un insieme di punti dotato di due ordinamenti, *versi*, uno opposto all'altro, rispetto ai quali essa è *illimitata* e *densa*.

Ax II. La retta è dotata di un gruppo di corrispondenze *biunivoche* e *ordinate*, detto il *gruppo delle congruenze*, tale che una congruenza è individuata da due punti e due versi corrispondenti.

Una congruenza dicesi *diretta* o *inversa* (positiva o negativa) a seconda che essa conserva o scambia i versi della s.

Si definisce indi il *segmento* e si verifica che la figura congruente ad un *segmento orientato* è un segmento orientato. Si parla poi di segmenti direttamente o inversamente congruenti e si dimostra la proprietà del *trasporto dei segmenti.*

Mediante queste proprietà si definisce la *somma dei segmenti* e si verifica che: somme di segmenti direttamente congruenti sono direttamente congruenti. Possiamo pertanto attribuire a segmenti orientati direttamente, congruenti la medesima *lunghezza*, definire la somma di lunghezza e concludere che: *le lunghezze* α, β, γ,... *dei segmenti costituiscono un gruppo additivo* Γ.

Fissato sopra la retta s il *verso positivo*, si può attribuire ad ogni lunghezza non nulla un segno, soddisfacente alle seguenti condizioni:

1. $\alpha = 0 \ \sigma \ \alpha > 0 \ \sigma \ -\alpha > 0$.
2. $(\alpha > 0, \beta > 0) \Rightarrow (\alpha + \beta > 0)$.
3. $(\alpha \geqq 0, \beta \geqq 0, \alpha + \beta = 0) \Rightarrow (\alpha = \beta = 0)$.
4. $(\alpha > 0) \Leftrightarrow (-\alpha < 0)$.

Nella teoria classica dei gruppi ordinati si impone inoltre la proprietà (oppure una ad essa equivalente):

5. $(\alpha > 0) \Rightarrow (\alpha^1 = -\beta + \alpha + \beta > 0)$;

cioè che il sistema degli elementi positivi sia invariante.

Noi non siamo in grado di affermare che, il nostro gruppo Γ goda di quest'ultima fortissima proprietà; perciò lo chiameremo un gruppo *debolmente ordinato.*

Definizione. L'opposto di un segmento inversamente congruente ad un dato segmento verrà detto un suo *invertito.* Indicheremo con $\bar{\alpha}$ la lunghezza dell'invertito di un segmento di lunghezza α. È immediato che:

$$(1) \quad \begin{cases} (\alpha = \beta) \Rightarrow (\bar{\alpha} = \bar{\beta}); \\ \overline{\alpha + \beta} = \bar{\beta} + \bar{\alpha}, \ \bar{\bar{\alpha}} = \alpha; \\ (\alpha > 0) \Rightarrow (\bar{\alpha} > 0). \end{cases}$$

In un corso scolastico di geometria, sebbene enunciato più elementarmente, si presentano le seguenti tre proprietà:

1*a*. $\bar{\alpha} = \alpha$.

2*a*. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

3*a*. $(\alpha > 0, \beta \geqq 0, \gamma \geqq 0; \alpha = \beta + \alpha + \gamma) \Rightarrow (\beta = \gamma = 0)$.

Nei testi scolastici si ammette come postulato la 1ª di queste tre proprietà, che si dice l'*invertibilità* del segmento, e si dimostrano le altre due. Ed ecco che si può far vedere ai giovani l'interessante giochetto nel quale assunto come postulato la 2ª si dimostra la 1ª e la 3ª; oppure assunto come postulato la 3ª si dimostra la 1ª e la 2ª.

Ed ecco che si presenta naturale la seguente domanda: « ciascuna di queste tre proprietà è un teorema oppure è possibile una geometria della retta, basata sui nostri Axx. 1. 2, nella quale queste tre proprietà non sono vere ? » Cioè: « si può dimostrare, nelle ipotesi fatte, che l'antiautomorfismo $\alpha \leftrightarrow \bar{\alpha}$ di Γ è l'identità oppure si può dare un esempio in contrario ? »

Quando all'inizio ho espresso il completo accordo con il programma di Dubrovnik, con qualche riserva per la geometria che non vorrei troppo formalizzata a scapito dell'intuizione, non ho detto soltanto un'opinione personale. Alla Sottocommissione italiana per l'insegnamento, nella riunione del giugno scorso, sono state presentate alcune relazioni provvisorie e tutte ponevano, in primo piano i metodi dell'algebra astratta.

Una Commissione del Centro Didattico Nazionale per i Licei, presieduta dal prof. M. Baldassarri, ha redatto nel 1960 un nuovo programma, in alcuni punti più avanzato di quello dell' O.E.C.E. Permettete che legga qualche brano della relativa prefazione.

Per quanto si riferisce al ciclo del Ginnasio (14-16 anni) si dice ad esempio:

« È perciò che appare indispensabile fornire sin da queste classi una chiara nozione si insieme, di operazioni su insiemi e delle principali relazioni su di essi, come quelle di equivalenza e di ordine; ecc...

Poi è scritto:

« Poichè queste idee astratte si formeranno lentamente, sarà necessario che si ritorni di continuo da esse agli esempi ed ai controesempi, ricordando che i secondi sono una condizione indispensabile di comprensioni e di apprezzamento della conoscenza stessa ».

Con riferimento alla geometria:

« La geometria constituirà un altro prezioso linguaggio per exemplificare le molteplici apparenze di un unico principio concettuale: come, ad esempio, per l'idea di insieme e per la relazione di equivalenza, una cui semplice applicazione è sufficiente per introdurre i segmenti, i segmenti congruenti e le lunghezze associate alle classi di congruenza, ovvero per introdurre le nozioni di direzione e di estensione ».

La prefazione all'ultimo ciclo (16-18 anni) incomincia così:

« Valgono le stesse norme generali che per il biennio inferiore, salvo che ormai la mente del giovine è più incline al razionale e quindi deve farsi più razionale l'insegnamento, pur partendo sempre dall'esame diretto di fatti e fenomeni della realtà esterna atti a scuscitare quella curiosità che costituisce il maggior stimolo per l'intuizione successiva ».

Inoltre:

« Gli elementi di geometria analitica dovranno essere svolti in modo da illuminare il legame fondamentale fra corrispondenze e loro grafici e fornire allo stesso tempo una prima nozione di funzione che sempre dovrà essere illuminata nelle sue circostanze generali fra insiemi arbitrari ».

« La trigonometria servirà precipuamente per fornire esempi significativi di funzione, tralasciando quasi tutto quel corredo tecnico di applicazioni utili in speciali problemi che troveranno altrove la sede di studio ».

Per quanto si riferisce all'anno conclusivo:

« Infine lo studio della matematica nel terzo anno deve avere un tono tutto peculiare: i giovani, ormai maturi, sono in grado di accogliere con interesse alcuni approfondimenti e sistemazioni critiche dei punti più vitali della strada che hanno percorso e ormai possono con soddisfazione elevarsi e riflettere sui principi generali che li hanno retti fin qui. Perciò da una parte si riprenderà la nozione di insieme e, nel caso degli insiemi sulla retta, si faranno arrivare gli allievi al concetto basilare di continuità oltrechè ad alcune prime e caute nozioni dell'analisi reale. Da una parte, insieme ad un ripendamento dei fondamenti della geometria, si esporrà ai giovani un aperto intuitivo panorama di argomenti proposti a scelta, affinchè essi conoscano qualche aspetto particolarmente vitale e suggestivo dei problemi della matematica contemporanea ».

Si tratta dunque del programma di *Dubrovnik* per l'ultimo anno, arricchito delle proposte fatte ieri da Lombardo Radice.

Vorrei concludere con un consiglio che ritengo importante.

Il nostro lavoro si proietta nel futuro. Dovendo riformare istituzioni e tradizioni, bisogna procedere con la prudenza e cautela con la quale questa Commissione procede, proponendo corsi di aggiornamento per insegnanti, scuole pilota, nuovi libri di testo; ecc... Però per quanto diverse iniziative tendono al medesimo scopo, dovranno certamente passare diversi anni prima di poter adottare i nuovi programmi.

Invece, almeno per quanto si riferisce all'Italia, la necessità di insegnare algebra e aritmetica in modo da adeguarle all'evoluzione del pensiero matematico e diminuire la frattura che ora si è creata rispetto agli studi superiori, richiede una soluzione immediata.

Con opuscoli e brevi corsi di aggiornamento, tenuti anche nelle diverse sedi universitarie, si potrebbe preparare gli insegnanti. Molti sono già pronti! Le questioni fondamentali dell'algebra moderna costituiscono il modo naturale di pensare matematicamente, si apprendono rapidamente, si trasmettono con fervore e suscitano l'entusiasmo dei giovani! Così si aprirebbe anche la strada alla riforma globale.

Infine mi sembra molto positivo che intorno a questi sviluppi della cultura contemporanea si sia creata l'attuale collaborazione fra matematici, filosofi, pedagoghi, psicologi, che si rivela utile agli uni e anche agli altri.