Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 9 (1963)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ESPACES ET FIGURES GÉOMÉTRIQUES
Autor: Libois, P.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-38772

ESPACES ET FIGURES GÉOMÉTRIQUES

par P. Libois, Bruxelles

1. TROIS ASPECTS D'UNE IDÉE

J'étudierai, d'un point de vue didactique, à la lumière de nombreuses expériences réalisées en Belgique depuis bientôt 30 ans, l'une des idées que nous avons considérées comme fondamentales, à Dubrovnik, pour l'enseignement de la géométrie de 12 à 18 ans. Je présenterai cette idée sous trois aspects (A, B, C) mais ces trois aspects sont indissociables, ce sont trois facettes d'une même réalité.

J'aimerais suivre l'application de cette idée de 12 à 18 ans et même de 3 à 22 ans. Cependant le cadre de ce Séminaire m'amène à centrer mon exposé sur l'année qui me paraît être l'année charnière du programme de Dubrovnik: 15-16 ans, c'est-à-dire la première année du 2e cycle (1).

A. L'espace — et j'entends en ce moment par cette expression, l'espace non qualifié dont il est question dans les leçons de géométrie de 12 à 16 ans — est un être mathématique dont il faut connaître, observer, étudier les propriétés essentielles.

B. Il convient, vers 15-16 ans, de réaliser une synthèse entre le *concept d'espace* suffisamment élaboré et explicité, et le *concept de figure géométrique* qui aura, lui aussi, été soumis à l'analyse active.

C. J'énoncerai un troisième aspect de la même idée en fin d'exposé (6).

1) Cette année 1961-62, un nouveau programme — ou plus exactement une adaptation du programme officiel aux buts énoncés à Dubrovnik — sera mis à l'épreuve en Belgique dans une vingtaine de classes de 15-16 ans et je pense que d'ici trois ans, les idées émises à Dubrovnik auront vivifié l'ensemble de notre enseignement secondaire dans toute la région influencée par l'Université de Bruxelles.

2. PRINCIPALES PROPRIÉTÉS DE « L'ESPACE » (12-16 ANS).

a) *L'espace est un ensemble de points en nombre infini, connexe, homogène.*

Dans le cadre euclidien, où nous sommes à cet âge, les élèves citent d'autres ensembles possédant ces propriétés: le plan, la sphère, la droite, le cercle.

b) *L'espace est structuré linéairement* (l'expression « linéairement » est associée ici au concept de ligne droite).

On passe du point à la droite et au plan (détermination; jonction ou combinaison linéaire), de la droite au plan, du plan à la droite et au point (intersection), du point, de la droite et du plan à l'espace.

Nous sommes conduits vers deux études qui seront développées de 16 à 18 ans:

b' l'étude de la structure linéaire (affine) de l'espace.

b'' l'étude directe de la droite, ensemble homogène à une dimension de structure identique à celle du temps (non orienté).

c) *L'espace est tridimensionnel.*

Concept de ligne en tant qu'ensemble unidimensionnel et concept de surface en tant qu'ensemble bidimensionnel.

d) *L'espace est doué d'une certaine mobilité* (cette mobilité est l'extension rationnelle de la mobilité idéalisée descorpssolides physiques).

d_1 Lorsqu'un point de l'espace est fixe, tout autre point peut engendrer une sphère.

Lorsque deux points de l'espace sont fixes, un point engendre, en général, un cercle. Certains points restent fixes; on retrouve la détermination d'une droite par deux points. Rotations autour d'une droite, groupe.

d_2 Translations, groupes.

d_3 Déplacements, groupes.

Lien avec le système métrique; grandeurs invariantes lors d'un déplacement: longueurs, aires, volumes, angles.

Par réciproque: concepts d'isométrie et d'orientation.

e) *L'espace est extensible, dilatable.*

Homothéties positives, groupes.

d + e. — En combinant d et e, on obtient les similitudes directes et les similitudes au sens large. Groupes.

f) *L'espace est doué de symétries.*

f_1 Symétrie bilatérale (par rapport à un plan).
f_2 Symétrie par rapport à un point.
f_3 Symétrie par rapport à une droite.

La mise en évidence des 6 propriétés ci-dessus éveille l'intérêt des élèves pour une étude directe de sous-espaces rencontrés en tant que restrictions de « l'espace ». Ils sont ainsi conduits vers de nouveaux espaces: la droite, le plan; la sphère, le cercle; la ligne, la surface.

Les propriétés *a* et *c* ont un caractère « topologique ».

Les propriétés *b*, d_2, *e* et f_2 ont un caractère affin.

Seules les propriétés d_1, d_3, f_1, et f_3 ont un caractère métrique.

Toutes les propriétés explicitées émergent dès le début de l'enseignement secondaire, et même avant. Il convient qu'elles soient précisées de plus en plus. Le type de précision, le degré de précision que l'on peut atteindre est fixé par l'expérience. Il importe de ne pas voir ce type et ce degré de précision comme des absolus que l'on peut déterminer de façon définitive. J'ai pu observer que les possibilités de précision ont crû considérablement ces dernières décades et cela, essentiellement, en fonction de l'intérêt croissant, passif et actif, du grand public — et en particulier de la jeunesse — pour les questions techniques, scientifiques et culturelles.

Nous devons évaluer correctement — c'est une tâche très délicate — dans quelle mesure certains progrès dépendent de l'élève ou de l'ambiance.

3. L'APPORT DE L'ENSEIGNEMENT PRIMAIRE.

L'apport de l'enseignement primaire est immense.

Le professeur de l'enseignement secondaire ne connaît pas assez, en général, l'enseignement primaire, de même que le professeur d'université ignore souvent l'enseignement secondaire.

Et cependant, le maître qui prend contact avec des classes d'élèves plus jeunes que ceux auxquels il est habitué, peut apprendre beaucoup. Je l'ai encore vérifié, à l'occasion de la mise au point de cette conférence, en passant une semaine avec des jeunes de 9 à 18 ans de l'Ecole Decroly à Bruxelles.

Voici, selon mon expérience, l'essentiel de ce que l'enseignement primaire, *éclairé par la vie extra-scolaire*, offre, en éléments de géométrie, à l'enseignement secondaire (12 ans):

a) le système métrique (longueurs, aires, volumes ou capacités, angles).

b) les figures géométriques, en vraie grandeur et à l'échelle, c'est-à-dire, une connaissance sensorielle, globale, implicite du groupe des déplacements et du groupe des similitudes directes.

c) les graphiques de points et de segments,
c'est-à-dire, un pont entre les ensembles de nombres et les ensembles de points ou un pont entre les ensembles de nombres et les ensembles de segments;
c'est-à-dire, la connaissance implicite du produit de deux ensembles, en particulier de R^2;
c'est-à-dire, la connaissance implicite des correspondances affines, du groupe $x' = ax$, $y' = by$ où a et b sont positifs.

d) la connaissance globale, implicite et imprécise des transformations perspectives et, dans une moindre mesure, des transformations conformes.
Dépassant le cadre strict de la géométrie, je soulignerai également, à cet âge:

a') la connaissance déjà profonde, mais exprimée de façon imprécise, de la notion d'ensemble (collections, classifications).

b') le germe de la notion de définition (comparaison).

c') l'acquisition globale, exprimée dans un langage variable, de la notion de fonction.

d') la connaissance explicitée et précisée, dans les cas les plus simples, de la notion de moyenne.

4. MATURATION DES FIGURES GÉOMÉTRIQUES

L'expression « figure géométrique » ne peut être définie que de manière assez vague, imprécise, dans l'enseignement secondaire. Elle n'en est pas moins fort utile, voire indispensable.

De même, les noms des différentes figures géométriques correspondent, selon le moment — selon le contexte — à des réalités mathématiques fort diverses. Le mot « droite », par exemple, correspond, dans l'enseignement secondaire belge, à (au moins) quatre entités mathématiques nettement différentes. Cette pluralité de significations subsiste dans l'enseignement supérieur, le contexte gagnant, bien entendu, en précision.

Je voudrais mettre en évidence de façon fort schématique et en me limitant à deux exemples « rectangle » et « conique », les possibilités de maturation d'un type de figure géométrique.

a) *Le rectangle.* -- Bien avant 12 ans, l'élève connaît le rectangle matériel, soit en tant que portion de plan matériel ou cadre, soit en tant que face d'un solide matériel. A ces deux modes d'intuition correspondront le rectangle « dans le plan » et le rectangle « dans l'espace ». Selon qu'il s'agit de l'un ou de l'autre, le groupe de ses déplacements sera constitué de 2 ou de 4 éléments. Au groupe spatial des 4 déplacements correspond un groupe plan de 4 isométries qui sont d'ailleurs perçues directement, dans le plan, par le très jeune enfant.

Le mot rectangle représente peu à peu, bien plus qu'une « surface ». C'est également l'ensemble de ses sommets, l'ensemble de ses côtés, et, au cours des années, l'élève prendra conscience de la structure euclidienne de ces deux ensembles. En cours de route, les termes « base », « hauteur », « longueur », « largeur », auront été situés dans leur cadre historique, psychologique ou technique.

L'élève aura réfléchi à des questions telles que: y a-t-il des rectangles sur un cylindre, sur une sphère ? Il comprendra que la définition d'un être géométrique peut varier selon le cadre dans lequel on le considère, on le situe.

Peut-être le maître pourra-t-il faire pressentir que les propriétés fondamentales des rectangles, jointes au fait de l'existence de rectangles de toutes grandeurs et de toutes positions, constituent une excellente axiomatique du plan euclidien ?

b) *Les coniques.* — Bien avant 12 ans, l'élève connaît au moins trois types de coniques: les cercles, les couples de droites concourantes, les couples de droites parallèles. Certes, il ne voit pas qu'il s'agit là de trois membres d'une même famille, que l'on peut passer d'un type à l'autre par continuité. N'exagérons cependant pas la difficulté: l'ombre, la photo d'une circonférence transforment celle-ci en ellipse, parabole, branche d'hyperbole; l'analyse de la transformation conduit au cylindre, au cône, à leurs sections planes. Plus tard, le théorème de Pythagore et son expression trigonométrique feront percevoir de nouveaux liens entre cercle et ellipse, puis entre coniques et formes quadratiques. Les propriétés fondamentales d'intersection (droite et conique, deux coniques) mèneront aux points imaginaires, aux points à l'infini. La maturation de la circonférence mène ainsi inéluctablement vers le plan projectif complexe. La propriété fondamentale de détermination (cinq points déterminent, en général, une conique) conduit à la notion de condition linéaire et, si l'on veut, à son étude plus ou moins développée.

5. QUELLES FIGURES GÉOMÉTRIQUES ?

Pendant le premier cycle — 12 à 15 ans — les élèves doivent avoir toutes occasions de se familiariser avec un riche matériel géométrique, d'en acquérir une connaissance sensorielle multiple: visuelle, tactile, musculaire, rythmique.

Il me paraît important de veiller à ce que trois types de figures soient suffisamment représentés:

a) figures courantes: cube, rectangle, cylindre, ...

b) figures régulières: les élèves trouvent tout naturel de dire qu'une figure est plus ou moins régulière, expression qui pourra être précisée plus tard en disant que le groupe des automorphismes conservant cette figure est plus ou moins riche.

c) figures typiques: hélice, ruban de Mœbius, paraboloïde hyperbolique, tore, ...

A 15 ans, les élèves peuvent aisément et utilement « connaître » une trentaine de figures géométriques, étant entendu qu'il s'agit:

d'une capacité globale de reconnaissance,

de la possibilité de décrire la figure au moyen de mots, de gestes et de dessins,

de répondre intelligemment à des questions du genre: telles propriétés caractérisent-elles telles figures ?

Il importe que l'élève soit amené à classer les figures qu'il connaît, par exemple en « lignes » et « surfaces » ou en figures « simples » ou « composées ». Il convient aussi qu'il s'habitue également aux visions statique et génétique (cinématique) des figures.

J'ai noté, parmi les « figures » le plus rarement citées: la droite et le plan. Plus rarement encore: l'espace et le point.

Pendant la première année du deuxième cycle, 15-16 ans, j'estime que les élèves doivent étudier plus de figures géométriques qu'ils ne le faisaient selon l'enseignement « à la manière d'Euclide ». Ils doivent, en même temps, les mieux connaître, à la fois sur le plan sensoriel et sur le plan rationnel. C'est dans la mesure où le travail sera développé suivant chacun des deux plans que la distinction entre ces deux plans apparaîtra le mieux aux élèves. L'idée d'une « concurrence » entre les deux plans, d'un amenuisement de l'un permettant le « renforcement » de l'autre, est radicalement aberrante.

Le progrès que j'indique est rendu possible par suite de nombreux faits nouveaux parmi lesquels j'indiquerai:

a) de « nouvelles » figures s'imposent dans la vie courante, par exemple les paraboloïdes réglés en tant que voiles minces.

b) l'étude des figures se fait en utilisant de « nouveaux » outils, en particulier les nombres et les vecteurs.

c) l'enseignement tient mieux compte des résultats obtenus dans l'étude de la psychologie de l'enfant et de l'adolescent.

d) les progrès réalisés dans le domaine de la pédagogie de la mathématique sont de plus en plus reconnus.

e) les diverses figures (euclidiennes), tout en restant des êtres ayant leur vie spécifique, sont en même temps considérées comme restrictions d'un être unique, l'espace euclidien, dont la connaissance (sensorielle et rationnelle) éclaire profondément la compréhension des diverses figures définies dans cet espace.

6. QUELS ESPACES ? QUELLES GÉOMÉTRIES ?

Après la publication des travaux de Dubrovnik, je ne crois pas nécessaire de développer longuement ce point.

Les expériences que j'ai poursuivies, en Belgique, après Dubrovnik, me confirment dans l'opinion qu'il convient, lors du 2e cycle (15-18 ans), de mettre tout particulièrement en évidence les propriétés des espaces à trois dimensions euclidien, affin, vectoriel et R^3 ainsi que de leurs analogues à deux et à une dimension, le plus grand soin étant accordé à l'observation des relations multiples entre ces espaces, ainsi qu'à l'indication des liens nombreux entre ces espaces et le monde scientifique et technique.

En particulier, l'étude des espaces unidimensionnels (espace affin, espace vectoriel et R) conduira à la synthèse de la géométrie et de l'algèbre en une mathématique liée, dans son essence même, à la physique.

En conclusion, je proposerai un troisième énoncé de l'idée que j'ai présentée au début de cet exposé:

C. S'il est vrai que « l'espace » est une « figure géométrique », figure totale, figure parvenue à son extension complète, il est vrai également que toute figure — suffisamment harmonieuse — devient un espace, que le nombre des espaces devient infini.