Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 8 (1962)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE SIMPLE DÉMONSTRATION DE LA NON-DÉRIVABILITÉ DE LA FONCTION DU TYPE DE WEIERSTRASS

Autor: Tarnawski, E.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-37966

UNE SIMPLE DÉMONSTRATION DE LA NON-DÉRIVABILITÉ DE LA FONCTION DU TYPE DE WEIERSTRASS

par E. TARNAWSKI

(Reçu le 13 mai 1962)

M. G. de Rahm a prouvé [1] d'une manière très simple qu'une fonction de la forme

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \varphi(b^k x), \tag{1}$$

où b est un nombre pair, $a = b^{-1}$ et

$$\varphi(x) = \min_p | x - p | \qquad (p \text{ entier}) \tag{2}$$

n'admet pas de dérivée. Il a remarqué aussi que la méthode de la démonstration ne s'adapte pas au cas où $\varphi(x) = \cos x$ et que aussi, si dans ce dernier cas $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$, $0 < a < 1$, b est impair (exemple de Weierstrass), la démonstration n'est plus simple du tout.

Cependant dans [2] j'ai pu donner une méthode permettant de démontrer, assez facilement, la non-dérivabilité de la fonction $f(x)$ définie par (1) dans le cas où les coefficients a, b satisfont aux conditions énumérées à la page 27 de ladite note (Theorem 9d) tandis que la fonction $\varphi(x)$ est périodique, non constante et vérifie outre la condition de Lipschitz la condition suivante:

pour tout x il existe un nombre h_x de module constant h^* (indépendant de x) tel que l'inégalité

$$| \varphi(x + h_x) - \varphi(x) | \geqq d > 0$$

est satisfaite pour une certaine constante d et pour tout x [1]).

---

[1]) Cf. [2], p. 13.

Cette dernière condition est par exemple remplie par les fonctions périodiques (de période l) dont les deux premières dérivées sont continues et qui dans l'intervalle $< 0, l >$ n'ont qu'un nombre fini de zéros [1]).

Par contre, le démonstration de la non-dérivabilité de la fonction $f(x)$ lorsque $\varphi(x) = \cos x$ est particulièrement simple au point de vue des calculs numériques qu'elle nécessite si l'on pose dans la formule (1) $a = \frac{3}{4}$, $b = 4$ [2]).

Voici la démonstration (qui semble avoir une valeur didactique) de la non-dérivabilité de la fonction

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k \cos 4^k x . \tag{3}$$

Considérons les intervalles fermés à gauche Δ_m de même longueur $\frac{\pi}{2}$ dont les extrémités gauches se trouvent aux points $\frac{\pi}{2}\, m$ (m entier). x_0 étant une valeur établie, m déterminé par la relation $4^n x_0 \in \Delta_m$, définissons la suite

$$h_n = (-1)^m \frac{\pi}{2 \cdot 4^n} . \tag{4}$$

Calculons

$$\frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} = A_1 + A_2 + A_3 ,$$

où

$$A_1 = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{3}{4}\right)^k \frac{\cos \left[4^k \left(x_0 + (-1)^m \frac{\pi}{2 \cdot 4^n}\right)\right] - \cos. 4^k x_0}{(-1)^m \pi/2 \cdot \frac{1}{4}^n}$$

$$A_2 = \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{\cos \left[4^n \left(x_0 + (-1)^m \frac{\pi}{2 \cdot 4^n}\right)\right] - \cos 4^n x_0}{(-1)^m \pi/2 \cdot \frac{1}{4}^n}$$

---

1) Cf. le lemme 3 de [2], p. 18.

2) Cf. l'astérisque 18) de [2], p. 33.

$$A_3 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k \frac{\cos\left[4^k\left(x_0 + (-1)^m \frac{\pi}{2 \cdot 4^n}\right)\right] - \cos 4^k x_0}{(-1)^m \pi/2 \cdot \frac{1}{4}^n}$$

a) Afin de limiter la somme A_1 faisons les substitutions

$$4^k x_0 = u, \qquad \frac{\pi}{2 \cdot 4^{n-k}} = h$$

Attendu que

$$\left| \frac{\cos(u + (-1)^m h) - \cos u}{(-1)^m h/4^k} \right| = \left| \frac{-\sin\left(u + (-1)^m \frac{h}{2}\right)}{4^{-k}} \right.$$

$$\left. \cdot \frac{\sin (-1)^m \frac{h}{2}}{(-1)^m \frac{h}{2}} \right| < 4^k$$

on a

$$| A_1 | \leqq \sum_{k=0}^{n-1} 3^k = \frac{1}{2}(3^n - 1). \tag{5}$$

b) La limitation de l'expression A_2 est d'après

$$\sin\left[4^n x_0 + (-1)^m \frac{\pi}{4}\right] \geqq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

la suivante

$$| A_2 | = \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{2}{\pi} 4^n \cdot \left| \cos\left[4^n x_0 + (-1)^m \frac{\pi}{2}\right] - \cos 4^n x_0 \right| \tag{6}$$

$$= \frac{2}{\pi} 3^n \left| -2 \sin\left[4^n x_0 + (-1)^m \frac{\pi}{4}\right] \sin\left((-1)^m \frac{\pi}{4}\right) \right| \geqq \frac{2}{\pi} 3^n .$$

c) Vu que le nombre $4^k \dfrac{\pi}{2 \cdot 4^n}$ pour $k > n$ est un multiple de 2π, on a

$$A_3 = 0. \tag{7}$$

Par conséquent on obtient, en tenant compte de (5), (6), (7), que pour la suite $\{h_n\}$ définie par la formule (4) les relations ont lieu

$$\left|\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}\right| \geqq |A_2| - |A_1| \geqq \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}\right) 3^n \to \infty .$$

BIBLIOGRAPHIE

1. G. de Rahm, Sur un exemple de fonction continue sans dérivée. *Enseignement mathématique*, III (1957), pp. 71-72.
2. E. Tarnawski, Continuous functions in the logarithmic—power classification according to Hölder's conditions. *Fundamenta Mathematicae*, XLII (1955), pp. 11-37.

Chaire de Mathématiques
Ecole Polytechnique de Gdańsk
Pologne.