

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 8 (1962)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** TRANSFORMATIONS DES VARIÉTÉS A CONNEXION LINÉAIRE ET  
DES VARIÉTÉS RIEMANNIENNES  
**Autor:** Lichnerowicz, André  
**Kapitel:** II. Transformations affines et isométries d'une variété riemannienne.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-37948>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 24.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

6. *Tenseurs invariants.*

Si un tenseur  $t$  est invariant par transport,  $t(x)$  est invariant par le groupe d'holonomie  $\Psi_x$ . De la formule (3-1) et de l'étude précédente, il résulte :

THÉORÈME. — *Sur un espace homogène  $V_m = G/H$  ( $G$  effectif) à connexion linéaire invariante, si un tenseur  $t$  satisfait deux des trois conditions suivantes, il satisfait la troisième.*

- a)  $t$  est invariant par l'action de  $G$ ;
- b)  $t$  est invariant par transport;
- c)  $t(x)$  est invariant par le groupe de Kostant  $K_x(G)$  en un point  $x$  de  $V_m$ .

Au champ  $t$  on peut substituer un champ  $Q$  de sous-espaces vectoriels. Si la connexion est à *holonomie normale*,  $b$  entraîne  $c$ , donc  $a$  : Tout tenseur invariant par transport est invariant par  $G$ .

## II. TRANSFORMATIONS AFFINES ET ISOMÉTRIES D'UNE VARIÉTÉ RIEMANNIENNE.

7. *Transformations affines et réductibilité.*

Soit  $V_m$  une variété *riemannienne* de tenseur métrique  $g$ , que nous considérons toujours comme munie de sa *connexion riemannienne*. Toute isométrie ou *similitude* ( $\mu^* g = c^2 g$ ;  $c = \text{const.}$ ) est une transformation affine pour cette connexion. Inversement, dans l'hypothèse où le groupe d'holonomie est *irréductible*, toute transformation affine reproduit la métrique à un facteur nécessairement constant près, et par suite est une *similitude*. En utilisant cette remarque, nous nous proposons d'étudier les rapports généraux entre transformations affines et isométries.

a) La variété  $V_m$  est dite *réductible* si son groupe d'holonomie connexe  $\Psi_x^0$  est réductible dans le réel. S'il en est ainsi, l'espace vectoriel  $T_x$  peut être décomposé, d'une manière et d'une seule à l'ordre près, en somme directe de sous-espaces orthogonaux  $T_x^a$  ( $a = 0, 1, \dots, k$ ), invariants par  $\Psi_x^0$ , tels que  $\Psi_x^0$  induise l'identité sur  $T_x^0$  et des représentations irréductibles sur

$T_x^a$  ( $a \neq 0$ ). Cette décomposition est la *décomposition canonique* relative à la réductibilité. Il lui correspond une décomposition de  $\Psi_x^0$  en produit direct  $\prod \Psi_{(b)x}$  ( $b = 1, \dots, k$ ), où  $\Psi_{(b)x}$  induit sur  $T_x^a$  ( $a \neq b$ ) la représentation triviale (Borel-Lichnerowicz);  $\Psi_x^0$  étant sous-groupe invariant de  $\Psi_x$ , le sous-espace  $T_x^0$  est aussi invariant par  $\Psi_x$ ; par transport de  $T_x^0$  on obtient sur  $V_m$  le champ complètement intégrable  $T^0$  et un feuilletage de  $V_m$  en feuilles localement euclidiennes. Si  $T_x^0 = 0$ , nous dirons brièvement que  $V_m$  est *sans partie euclidienne*.

b) Soit  $\mu$  une transformation affine de  $V_m$ ,  $S$  l'ensemble des sous-espaces de  $T_x$  invariants par  $\Psi_x$ . Si  $l$  est un chemin joignant  $x$  à  $\mu^{-1}(x)$  l'automorphisme de  $T_x$  défini par:

$$\mu \circ \tau(l)$$

détermine une substitution  $s(\mu)$  de  $S$  ne dépendant que de  $\mu$ . On obtient ainsi un *homomorphisme* de  $A(V_m)$ , dans le groupe des substitutions de  $S$ . Si  $\Psi_x$  induit sur un élément  $U_x \in S$  une représentation irréductible (resp. l'identité), il en est de même pour  $s(\mu) U_x$ .

c) Supposons  $V_m$  *simplement connexe*. La décomposition canonique définit alors  $(k+1)$  champs  $T^a$  de sous-espaces, invariants par transport le long d'un chemin arbitraire. Par suite si  $\mu \in A(V_m)$ ,  $\mu$  laisse invariant  $T^0$  et permute éventuellement les  $T^a$  ( $a \neq 0$ ). Si  $\mu \in A^0(V_m)$ , tous les  $T^a$  sont invariants. Ainsi:

THÉORÈME. — *Sur une variété riemannienne simplement connexe, chaque champ  $T^a$  défini par la décomposition canonique relative à la réductibilité est invariant par toute transformation affine de  $A^0(V_m)$ .*

## 8. Etude des variétés riemanniennes complètes.

Sur  $V_m$ , la distance  $d(x, x')$  définie par le minimum de la longueur des chemins continûment différentiables par morceaux joignant  $x$  à  $x'$  détermine une structure d'espace métrique. Nous supposons  $V_m$  *complète*, c'est-à-dire complet l'espace métrique précédent

a) Soit  $\mu$  une *similitude* qui ne soit pas une isométrie; en passant au besoin à l'inverse, on peut supposer  $\mu^* g = c^2 g$  avec

$c < 1$ . Par suite,  $\mu$  réduit les longueurs et distances dans le rapport  $c$ . Du caractère complet, il résulte que  $\mu$  admet un point fixe  $x_0$ . Si  $l$  est un lacet arbitraire en  $x_0$  et si  $r_h$  est l'élément du groupe d'holonomie induit par le lacet  $\mu^h l$  ( $h = 0, 1, \dots$ ),  $r_h$  tend vers l'identité quand  $h \rightarrow \infty$ . D'après (2-4),  $r_h = \mu'^h \circ r_0 \circ \mu'^{-h}$  et le polynôme caractéristique de  $r_h$  est indépendant de  $h$  et coïncide avec celui de l'identité. On peut en déduire que le groupe d'holonomie de  $V_m$  est réduit à l'identité.

**THÉORÈME.** — *Sur une variété riemannienne complète qui n'est pas localement euclidienne, toute similitude est une isométrie [Kobayashi].*

Si  $V_m$  complète est irréductible ( $m \geq 2$ ) toute transformation affine est une isométrie.

b) Supposons  $V_m$  complète et simplement connexe. D'après un théorème classique de Georges de Rham, il existe une isométrie globale de  $V_m$  sur le produit riemannien de  $(k+1)$  variétés  $W^a$  complètes simplement connexes. Pour  $a = 0$ ,  $W^0$  est euclidienne et pour  $a \neq 0$ ,  $W^a$  est irréductible (de dimension  $\geq 2$ ).

Soit  $I^0(V_m)$  le plus grand groupe connexe d'isométries de  $V_m$ . A l'aide du théorème du § 7, on établit que  $A^0(V_m)$  (resp.  $I^0(V_m)$ ) peut être identifié au produit direct  $\Pi A^0(W^a)$  (resp.  $\Pi I^0(W^a)$ ). Du résultat précédent on déduit que  $A^0(W^a) = I^0(W^a)$  pour  $a \neq 0$ . Ainsi:

**THÉORÈME.** — *Pour une variété riemannienne complète, simplement connexe,  $V_m = W^0 \times W$  où  $W^0$  est euclidienne et  $W$  sans partie euclidienne,  $A^0(V_m)$  est identique au produit direct  $A^0(W^0) \times I^0(W)$  agissant naturellement sur  $V_m$ .*

Les transformations strictement affines de  $A^0(V_m)$  proviennent ainsi des transformations strictement affines de l'espace euclidien. Par étude du revêtement universel, on voit que pour toute variété riemannienne complète (sans hypothèse de simple connexité) sans partie euclidienne  $A^0(V_m) = I^0(V_m)$ . Une étude directe montre qu'on a la même conclusion pour toute variété riemannienne compacte (avec ou sans partie euclidienne) [Kenshiro Yano].

### 9. Holonomie et isométries infinitésimales sur une variété riemannienne.

a) Pour une variété riemannienne, les endomorphismes de l'espace vectoriel euclidien  $T_x$  peuvent être identifiés à des 2-formes. Ainsi l'algèbre d'holonomie  $\underline{\Psi}_x$  en  $x$  définit un sous-espace (désigné par la même notation) de l'espace vectoriel des 2-formes en  $x$ . Soit  $B_x$  l'orthocomplément de ce sous-espace par rapport au produit scalaire, noté  $(\ , \ )$ , défini sur les 2-formes par la métrique. Si  $Y$  est un champ de vecteurs sur un voisinage  $U$  de la variété  $V_m$ ,  $\alpha$  une 2-forme sur  $U$  telle que  $\alpha(x) \in \underline{\Psi}_x$  pour  $x \in U$ , on sait que :

$$(9-1) \quad (i(Y) \nabla \alpha)(x) \in \underline{\Psi}_x$$

De même si  $\beta$  est une 2-forme sur  $U$  telle que  $\beta(x) \in B_x$  pour  $x \in U$

$$(9-2) \quad (i(Y) \nabla \beta)(x) \in B_x$$

Cela posé si  $X$  est une *isométrie infinitésimale*,  $A_X(x)$  définit une 2-forme en  $x$ . Avec un abus de notation, nous pouvons poser

$$(9-3) \quad A_X = \alpha + \beta \quad (\text{avec } \alpha(x) \in \underline{\Psi}_x, \beta(x) \in B_x).$$

D'après (2-3),  $(i(Y) \nabla A_X)(x) \in \underline{\Psi}_x$ . De (9-1) et (9-2) il résulte  $\nabla \beta = 0$  et  $\beta(x)$  est dans l'algèbre de Lie du centralisateur connexe de  $\Psi_x^0$  dans le groupe des rotations de  $T_x$ .

Si  $V_m$  est à  $\Psi_x^0$  irréductible et admet une 2-forme à dérivée covariante nulle, elle est *kählerienne* ( $m = 2n$ ). Dans ce cas, si la courbure de Ricci de la variété est non nulle, le centralisateur connexe de  $\Psi_x^0$  est contenu dans  $\Psi_x^0$  et l'on voit que  $A_X(x) \in \underline{\Psi}_x$ . On déduit de ces remarques.

**THÉORÈME.** — *Un espace homogène riemannien  $V_m = G/H$  est certainement à holonomie normale ( $\Psi_x^0 = K_x(G)$ ) sous l'une des hypothèses suivantes :*

- a) *Si  $V_m$  n'admet pas de 2-formes à dérivée covariante nulle, en particulier si  $V_m$  irréductible n'est pas kählerien ;*
- b) *Si  $V_m$  est kählerien, à  $\Psi_x^0$  irréductible est à courbure de Ricci non nulle ;*

c) Si  $V_m$  admet une courbure de Ricci non dégénérée.

$c$  se déduit de  $a$  et  $b$  à l'aide du théorème de réductibilité de G. de Rham.

b) De ce même théorème et du § 8, on déduit que si  $V_m$  est une variété riemannienne *complète*,  $I^0(V_m)$  son plus grand groupe connexe d'isométries (non nécessairement transitif), le groupe  $K(I^0(V_m))$  est produit direct de groupes orthogonaux connexes irréductibles et d'un groupe certainement compact correspondant à la partie euclidienne.

THÉORÈME. — *Pour toute variété riemannienne complète,  $K_x(I^0(V_m))$  est compact.*

c) Supposons  $V_m$  compacte. On sait que  $I^0(V_m)$  est alors compact (Elie Cartan). Si  $X$  est une isométrie infinitésimale, considérons la décomposition (9-3) et la 1-forme

$$\eta = i(X)\beta$$

De (9-3) on déduit:

$$\delta\eta(x) = (A_X(x), \beta(x)) = (\beta(x), \beta(x)) \geq 0$$

où  $\delta$  est l'opérateur de codifférentiation. Si  $V_m$  est compacte orientable, on en déduit par intégration  $\beta = 0$  et, par passage à un revêtement, il en est de même si  $V_m$  est seulement compacte. Ainsi  $K_x(I^0(V_m)) \subset \Psi_x^0$ .

Soit  $J_{x_0}$  le sous-groupe d'isotropie d'un point  $x_0$ , c'est-à-dire le sous-groupe de  $I^0(V_m)$  laissant  $x_0$  fixe,  $h$  un élément de  $J_{x_0}$ . Le groupe  $I^0(V_m)$  étant compact, il existe un sous-groupe à un paramètre  $\exp(tX)$  tel que  $h = \exp(uX)$ ;  $x(t) = \exp(tX)$  ( $0 \leq t \leq u$ ) engendre un lacet  $l$  en  $x_0$ . Si  $r$  est l'élément de  $\Psi_{x_0}^*$  correspondant à  $l$ , on a d'après (3-1)

$$\exp(uX)' = r \cdot \exp[-uA_X(x_0)].$$

Ainsi, si  $\tilde{J}_{x_0}$  est le groupe linéaire d'isotropie,  $\tilde{J}_{x_0} \subset \Psi_{x_0}^*$ . Nous énoncerons:

THÉORÈME. — Si  $V_m$  est une variété riemannienne compacte,  $I^0(V_m)$  son plus grand groupe connexe d'isométries (non nécessairement transitif),  $J_x$  le sous-groupe d'isotropie en  $x$ , on a

$$(9-4) \quad K_x(I^0(V_m)) \subset \Psi_x^0$$

et

$$(9-5) \quad \tilde{J}_x \subset \Psi_x.$$

En particulier pour tout espace homogène riemannien compact, l'holonomie est normale.

### III. ESPACES HOMOGÈNES RÉDUCTIFS.

#### CAS RIEMANNIEN.

#### 10. Notion d'espace homogène réductif (Nomizu).

Sur un espace homogène  $V_m = G/H$  une structure réductive (ou d'espace homogène réductif) est définie par la donnée d'une décomposition en somme directe de l'algèbre de Lie  $\underline{G}$  de  $G$

$$(10-1) \quad \underline{G} = \underline{H} + M \quad (\underline{H} \cap M = 0)$$

telle que le sous-espace  $M$  vérifie

$$(10-2) \quad \text{adj}(H) M \subset M,$$

$\text{adj}(H)$  est ici la restriction à  $H$  de la représentation adjointe de  $G$ . Tout élément  $\lambda$  de  $\underline{G}$  s'écrit d'une manière et d'une seule  $\lambda = \lambda_{\underline{H}} + \lambda_M$  ( $\lambda_{\underline{H}} \in \underline{H}$ ;  $\lambda_M \in M$ ). Par la projection naturelle  $p$  de  $G$  sur  $V_m$ , on peut identifier  $M$  avec l'espace vectoriel  $Tx_0$  tangent en  $x_0 = pe$  à  $V_m$  et  $\text{adj}(H)$  avec le groupe linéaire d'isotropie  $\tilde{H}$ . Les cas où  $H$  est compact ou connexe réductif dans  $G$  fournissent des exemples de structure réductive.

D'après (10-2),  $M$  définit sur l'espace fibré principal  $G$  de base  $V_m$  une connexion infinitésimale invariante par  $G$ . Si  $P(V_m)$  est l'espace de repères défini par les repères de  $V_m$  déduits de l'un d'entre eux par l'action de  $G$ , le fibré  $P(V_m)$  est isomorphe au fibré  $G$ . De la connexion invariante obtenue sur