

## 2. Die exakte Sequenz der relativen Gruppen.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **8 (1962)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Die Gruppen  $\Pi_*(A, B)$  besitzen somit die Eigenschaften:

bei festem  $A$

- (I) Exaktheit für Abbildungen  $\beta : B \rightarrow B'$  und passende relative Gruppen  $P_*(A, \beta)$ ,
- (II) Exzision für Faserungen;

bei festem  $B$

- (I') Exaktheit für Abbildungen  $\alpha : A \rightarrow A'$  und passende relative Gruppen  $P_*(\alpha, B)$ ,
- (II') Exzision für Cofaserungen.

Hiezu kommt offenbar die Homotopie-Eigenschaft (III) bzw. (III'), dass homotope Abbildungen denselben Homomorphismus  $\beta_*$  bzw.  $\alpha^*$  induzieren. Die Gruppen  $\Pi_*(A, B)$  verdienen also weitgehend die Bezeichnung *Cohomologiegruppen mit Koeffizientenraum  $B$*  oder *Homotopiegruppen mit Koeffizientenraum  $A$* , wobei eine Unterscheidung für die „absoluten“ Gruppen nicht möglich ist — sie liegt nur in der Auffassung als Funktor von  $A$  bzw.  $B$  —, sondern erst bei den relativen Gruppen auftritt. Die Uebereinstimmung mit der vollen Cohomologietheorie erhält man allerdings erst durch die spezielle Wahl von Eilenberg-MacLane-Räumen als Testräume  $B$ , vgl. Abschnitt 3.

## 2. DIE EXAKTE SEQUENZ DER RELATIVEN GRUPPEN.

Sind  $\beta_1$  und  $\beta_2$  Abbildungen,  $\beta_1 : B_1 \rightarrow B'_1$ ,  $\beta_2 : B_2 \rightarrow B'_2$ , so versteht man unter einer Abbildung  $\Phi : \beta_1 \rightarrow \beta_2$  ein Paar von Abbildungen  $\varphi : B_1 \rightarrow B_2$  und  $\varphi' : B'_1 \rightarrow B'_2$  derart dass

$$\begin{array}{ccc} B_1 & \xrightarrow{\varphi} & B_2 \\ \beta_1 \downarrow & & \downarrow \beta_2 \\ B'_1 & \xrightarrow{\varphi'} & B'_2 \end{array}$$

kommutativ ist. Eine solche Abbildung  $\Phi$  induziert Homomorphismen  $\Phi_* : P_n(A, \beta_1) \rightarrow P_n(A, \beta_2)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , die sich wiederum durch passende relative Gruppen „zweiter Stufe“

$P_n(A, \Phi)$  zu einer exakten Sequenz verknüpfen lassen; wie vorher schreiben wir auch diese als exaktes Dreieck

$$\begin{array}{ccc} P_*(A, \beta_1) & \xrightarrow{\Phi_*} & P_*(A, \beta_2) \\ \partial \swarrow & & \searrow J \\ & P_*(A, \Phi) & \end{array} \quad (2.1)$$

Dual hiezu erhält man für die Gruppen  $P_*(\alpha, B)$  und für eine Abbildung  $\Phi : \alpha_1 \rightarrow \alpha_2$  ein exaktes Dreieck

$$\begin{array}{ccc} P_*(\alpha_2, B) & \xrightarrow{\Phi^*} & P_*(\alpha_1, B) \\ \partial \swarrow & & \searrow J \\ & P(\Phi, B) & \end{array} \quad (2.2)$$

Das Verfahren lässt sich natürlich iterieren, und man gelangt zu relativen Gruppen beliebig hoher Stufe.

Aus den beiden exakten Dreiecken erhält man durch Spezialisierung viele bekannte Folgen der Cohomologie – und der Homotopietheorie, so insbesondere die *Triadensequenzen* und die *Tripelsequenzen* (vgl. [4]). Wir weisen hier nur auf die Tripelsequenz hin, die aus (2.1) entsteht, wenn man  $B_1 = B_2$  und  $\varphi = \text{Identität}$  wählt, also  $\beta_2 = \varphi' \beta_1$ ; man erhält dann das exakte Dreieck

$$\begin{array}{ccc} P_*(A, \beta_1) & \xrightarrow{\Phi_*} & P_*(A, \beta_2) \\ \partial \swarrow & & \searrow J \\ & P_*(A, \varphi') & \end{array}$$

in welchem  $\Phi_*$  und  $J$  vom Grad 0,  $\partial$  vom Grad  $-1$  ist und welches die Verknüpfung der  $P_*(A, \beta)$  für die Zusammensetzung zweier Abbildungen liefert. Ebenso erhält man aus (2.2) ein zum obigen duales Dreieck. (Die Spezialfälle, wo die betreffenden Abbildungen Inklusionen sind, sind wohlbekannt für Cohomologie- und Homotopiegruppen.)

Für Zusammensetzungen von mehr als zwei Abbildungen ergeben sich hieraus leicht verschiedene *Spektralreihen* für die  $P_*(A, \beta)$ , die Cohomologiegruppen usw., die alle bekannten und für Theorie und Anwendung wichtigen Spektralreihen als Spezialfälle enthalten.