TABLEAU II.

TABLEAU II

Programme de Licence

1. *Algèbre des ensembles.*

Notions élémentaires sur le calcul logique.

Opérations sur les ensembles, notations; produit d'ensemble.

Application d'un ensemble dans un autre; image directe, image réciproque, formules..

Relations binaires: relation d'ordre, relation d'équivalence.

Notions sur les cardinaux, puissance du dénombrable, puissance du continu.

Axiome du choix; théorème de Zorn (sans démonstration).

2. *Algèbre* (niveau 2).

Lois de composition; propriétés (associativité, etc. ...).

Groupes; sous-groupes, groupes quotients; théorème d'homomorphisme. Exemples: Z/nZ, R/Z. Plongement d'un ensemble muni d'une loi commutative et associative, régulière, dans un groupe; exemples. Produit de groupes, produits directs de sous-groupes.

Groupe symétrique: signature d'une permutation.

Groupe de transformations; transitivité (simple ou non), trajectoires; exemples. Exercice possible: théorème de Sylov.

Anneaux et algèbres; idéaux; anneau-quotient. Exemples (quaternions).

Algèbre des polynômes à une ou plusieurs variables.

Corps, règles de calcul. Caractéristique d'un corps.

3. *Algèbre linéaire (niveau 2).*

Revision de l'algèbre linéaire (niveau 1).

Bases d'un espace vectoriel de dimension finie ou infinie.

Dualité des espaces de dimension finie; application aux équations linéaires.

Valeurs propres d'une application linéaire ou d'une matrice réduction à la forme triangulaire (corps complexe).

Eléments d'algèbre extérieure.

Formes bilinéaires symétriques et hermitiennes; orthogonalité formes quadratiques, réduction à une somme de carrés. Loi d'inertie. Groupe orthogonal, groupe unitaire, opérateurs hermitiens.

4. *Topologie générale.*

Topologie de R, de R^n; Heine-Borel.

Définition générale d'un espace topologique (par les ouverts, ou par les fermés); exemple des espaces métriques. Fonctions continues. Produits d'espaces topologiques.

Espaces compacts, théorèmes classiques. Espaces localement compacts.

Espaces connexes; image d'un espace connexe par une application continue.

Espaces métriques (nombreux exemples). Critère de compacité des espaces métriques. Continuité uniforme; cas d'une application continue d'un espace métrique compact dans un espace métrique.

Critère de connexion pour les espaces métriques compacts.

Espaces métriques complets (sans traiter de la complétion) méthode des approximations successives.

Famille sommabled ans un espace vectoriel topologique (ou même dans un groupe abélien topologique); cas d'un espace normé complet: convergence normale.

5. *Espaces fonctionnels.*

Distance de la convergence uniforme sur l'espace des applications dans un espace métrique, cas où ce dernier est complet, cas des applications continues.

Espaces vectoriels normés, espaces de Banach. Exemples: norme de la convergence uniforme sur un espace vectoriel de fonctions numériques, normes diverses définies sur des espaces fonctionnels au moyen de l'intégrale.

Théorème de Stone-Weierstrass, ou tout au moins théorème de Weierstrass (approximation par les polynômes).

Espaces préhilbertiens: exemples. Inégalités. Projection sur un sous-espace vectoriel complet, et plus généralement sur un convexe complet la projection est une application contractante.

Espaces préhilbertiens à base dénombrable; orthogonalisation de Schmidt. Applications: suites de polynômes spéciaux, séries de Fourier.

6. *Intégration.*

Intégrale (Lebesgue ou Riemann) de fonctions numériques définies dans R^n. Théorème de Fubini (intégrations successives). Changement de variables. Application: calcul de volumes.

Séries et intégrales dépendant d'un paramètre: continuité, dérivation, intégration. Nombreux exercices comportant des contre-exemples !

7. *Calcul différentiel.*

Différentielle (du premier ordre) d'une application d'un ouvert d'un espace vectoriel normé dans un autre. Propriétés; calcul.

Théorème des fonctions implicites pour les fonctions continûment différentiables.

Formules différentielles; notions de calcul différentiel extérieur. Formule de Stokes dans des cas simples. Primitive locale d'une forme différentielle fermée de degré 1.

Systèmes différentiels: existence et unicité locales dans le cas lipschitzien. Variation de la solution en fonction des données. Cas d'un système différentiel linéaire.

Intégrales premières d'un système différentiel: résolution d'une équation aux dérivées partielles linéaire de premier ordre.

Eléments du calcul des variations.

8. *Fonctions analytiques d'une variable complexe.*

Séries entières formelles, séries entières convergentes.

Intégrale de Cauchy.

Développements de Taylor et de Laurent; principe du maximum, résidus.

Topologie de la convergence uniforme sur tout compact de Ω; critère de compacité conforme.

Représentation conforme.

Fonctions définies par des séries ou des produits infinis: exemples.

Notions sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. Systèmes différentiels holomorphes: méthode des majorantes. Notions sur les surfaces de Riemann, exemples.

9. *Géométrie différentielle des courbes et surfaces de R^3*

Notamment: les deux formes fondamentales d'une surface; méthode du repère mobile; courbure normale, courbure géodésique, torsion géodésique. Géodésiques. Courbure totale d'une surface, et peut-être formule de GAUSS-Bonnet.

10. *Bloc élémentaire.*

Théorie des entiers naturels, opérations, divisibilité, nombres premiers, théorème d'unique factorisation. Corps des entiers modulo p (p premier).

Corps des rationnels. Corps des réels: caractérisation axiomatique et existence. Corps des complexes.

Existence des représentations continues du groupe additif R sur le groupe multiplicatif des nombres complexes dont la valeur absolue est égale à 1.

Géométrie de R^2 ou R^3 muni du produit scalaire canonique: déplacements, angles, orientation. Modèles euclidiens de géométries non-euclidiennes.

Axiomatisation de la géométrie euclidienne: notions succinctes.

Constructions avec la règle et le compas.