

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 8 (1962)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** INTRODUCTION A LA GÉOMÉTRIE DES NOMBRES  
**Autor:** Chabauty, Claude  
**Kapitel:** VI. Conclusion.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-37952>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

(c'est-à-dire  $(\sqrt{2})^n \Omega_n$ ), divisé par le déterminant de  $G$ . Par conséquent :

$$n + 1 \geq (\sqrt{2})^n \Omega_n / \det(G),$$

ou encore :

$$\text{densité de l'empilement} = \Omega_n / \det G \leq (n + 1) / (\sqrt{2})^n,$$

c'est ce que nous nous proposons de démontrer.

Traduit sur  $\gamma_n$ , cela améliore le résultat de Minkowski par un coefficient multiplicatif  $\frac{1 + \varepsilon(n)}{2}$

$$\gamma_n \leq \frac{n}{\pi e} (1 + \varepsilon(n))$$

Le théorème de Hlawka cité plus haut montre

$$\gamma_n \geq \frac{n}{2\pi e} (1 + \varepsilon(n)).$$

On voudrait bien en savoir plus, en particulier si la densité peut être majorée par  $k^n$  avec  $k < 1/\sqrt{2}$ .

## VI. CONCLUSION.

Ces quelques exemples peuvent donner une idée de l'efficacité des méthodes que Minkowski a introduites en Géométrie des nombres, ceux que nous avons donnés sont fondamentaux. Mais la variété des problèmes qui se posent est très grande. Pour l'étude des  $f(x_1, \dots, x_n)$  pour lesquels la figure associée  $|f(x_1, \dots, x_n)| \leq 1$  est non bornée et de mesure infinie, seule une partie des problèmes peut être étudiée par les méthodes de Minkowski et d'autres techniques doivent être introduites.

Il faut signaler pour terminer que, si dans cet exposé on a insisté sur des résultats très généraux, où le nombre de dimensions de l'espace, c'est-à-dire le nombre des variables était indifférent, il y a encore des problèmes à un petit nombre de variables, intéressants et non résolus. Par exemple, appelant maintenant *empilement* une famille d'ensembles  $(A + \vec{g}, \vec{g} \in H)$  disjoints deux à deux,  $H$  n'étant plus nécessairement un réseau, et *empilement régulier*, une telle famille, si  $H$  est un réseau, on ne sait pas encore s'il n'y a pas dans l'espace à trois dimensions

d'empilement plus « dense » que l'empilement régulier le plus dense, qui est l'empilement « en boulet de canon », celui dont le réseau a pour base des points formant avec l'origine un tétraèdre équilatéral (de côté 2 si les boules empilées ont le rayon 1). Une démonstration a été donnée par Lord Kelvin, sur la foi de laquelle physiciens et minéralogistes croient qu'un tel empilement est impossible, mais cette démonstration est insuffisante et la question est toujours ouverte. Par contre pour  $R^2$  la question est résolue par la négative, il n'y a pas d'empilement irrégulier, plus dense que l'empilement régulier le plus dense, c'est-à-dire celui correspondant au réseau admettant pour base deux points formant avec l'origine un triangle équilatéral (de côté 2 si les disques empilés ont le rayon 1) (cf § II)<sup>1</sup>).

On trouvera dans KOKSMA [4], un résumé très complet des résultats jusqu'en 1936 et dans CASSELS [1, 2] les principaux résultats classiques et les résultats récents avec leurs démonstrations. Ce sont des ouvrages techniques, on y trouvera une bibliographie étendue. A l'opposé, on trouvera une introduction élémentaire et très intéressante à la géométrie des nombres dans plusieurs des chapitres du HARDY et WRIGHT [3]. Je ne connais pas d'ouvrage d'un niveau intermédiaire.

Il est intéressant aussi de lire les exposés faits aux différents Congrès internationaux de Mathématiques sur les résultats et les conjectures en Géométrie des nombres, par exemple celles de Mordell au congrès de 1937, celles de Davenport au congrès de 1950 et aux congrès suivants et les exposés de séminaires, car les idées générales y sont soulignées plus que les détails techniques qu'on pourra étudier ensuite.

#### RÉFÉRENCES

- [1] CASSELS, *Introduction to the geometry of numbers*, 1959.
- [2] ——— *Introduction to diophantine approximations*, 1957.
- [3] HARDY and WRIGHT, *Introduction to the theory of numbers*, 1948.
- [4] KOKSMA, *Diophantische Approximationen*, 1936.

Institut Fourier.  
Université de Grenoble.

---

<sup>1</sup>) Signalons à ce propos que la majoration de Blichfeldt pour la densité d'empilement de boules de  $R^n$ , est valable même si l'empilement n'est pas construit à partir d'un réseau.