INTRODUCTION A LA GÉOMÉTRIE DES NOMBRES[1]

par Claude CHABAUTY

I. RÔLE DES NOTIONS GÉOMÉTRIQUES DANS LES PROBLÈMES D'ARITHMÉTIQUE.

Considérons les énoncés suivants:

(A). Si deux entiers sont chacun somme de deux carrés d'entiers, leur produit est aussi somme de deux carrés d'entiers.

(B). Soit d un nombre naturel non carré, l'équation $x^2 - dy^2 = 1$ admet une infinité de solutions en entiers x, y.

(C). Soit $ax^2 + 2bxy + cy^2$ une forme quadratique [à coefficients entiers], il existe un système d'entiers x, y, non tous deux nuls tels que

$$(ax^2 + 2bxy + cy^2)^2 \leqq \frac{4}{3} |ac - b^2| .$$

(D). Soit θ un nombre réel, il existe une infinité d'entiers x, y, $y \neq 0$, tels que

$$\left| \theta - \frac{x}{y} \right| \leqq \frac{1}{\sqrt{5} y^2} .$$

Les énoncés (A) et (B) sont purement algébriques (c'est-à-dire ne font intervenir que les lois de composition $+$ et $\times$ de l'anneau des entiers). L'énoncé (D), à l'opposé, a visiblement un caractère géométrique, puisqu'il fait intervenir le continu des nombres réels, mais l'énoncé (C) aussi, car il s'agit de démontrer une inégalité, c'est-à-dire une relation d'ordre, et non une relation algébrique. En outre, il s'agit en fait dans (C) d'une propriété valable pour les formes quadratiques binaires, à coefficients réels quelconques, et se restreindre aux coefficients entiers

[1]) Exposé fait durant les Journées mathématiques, organisées par la Société mathématique de France, à Grenoble, mai 1960.

ne simplifie en rien la démonstration. Remarquons que si on suppose la forme indéfinie on peut alors montrer que le coefficient $\frac{4}{3}$ peut être remplacé par le coefficient $\frac{4}{5}$, et que l'inégalité a une infinité de solutions entières. Il est clair que l'énoncé (D) est alors un corollaire de ce résultat sur les formes indéfinies que nous noterons (C′), puisque le discriminant de $y\,(x - \Theta y)$ est $-\frac{1}{4}$.

D'autre part, appliquons à la forme à coefficients entiers $x^2 - dy^2$ de (B), l'énoncé (C′). Il nous assure immédiatement l'existence d'un entier h, $h \neq 0$ parce que d n'est pas carré, tel que l'équation $x^2 - dy^2 = h$ ait une infinité de solutions en entiers x, y. Or un calcul élémentaire [1]) permet de construire à partir de telles solutions avec $x \equiv x'$ (mod h), $y \equiv y'$ (mod h), une solution en entiers à $x^2 - dy^2 = 1$.

L'énoncé algébrique (B) a donc une démonstration basée sur un énoncé (C′) à caractère géométrique et en fait c'est la démonstration la plus naturelle et la plus classique, à des variantes près. (La valeur de la constante, $\frac{4}{3}$, ou $\frac{1}{5}$, dans (C′) n'a pas d'importance pour cette démonstration de (B), ce qui compte c'est qu'il y ait une constante pour laquelle l'inégalité ait une infinité de solutions entières.)

Par contre, l'énoncé algébrique (A) a évidemment sa démonstration la plus simple et la plus naturelle à partir de l'identité bien connue: $(u^2+v^2)(u'^2+v'^2) = (uu'+vv')^2+(uv'-vu')^2$. Pour certains énoncés algébriques, il y a la possibilité de démonstrations algébriques et de démonstrations géométriques.

Dans cet exposé nous nous intéresserons aux problèmes d'arithmétique à caractère géométrique. On vient de voir sur un exemple [2]) que le champ de leurs applications comprend certains problèmes d'arithmétique dont l'énoncé a un caractère algébrique.

---

1) L'équation $(x+y\sqrt{d})\,(X+Y\sqrt{d}) = x'+y'\sqrt{d}$ définit des entiers X. Y avec $X^2 - dY^2 = 1$.

2) Plusieurs des théorèmes de base de la Théorie des Nombres algébriques ont été obtenus ainsi. Voir, par exemple, A. Chatelet: *Introduction à la théorie des nombres algébriques*, où l'aspect géométrique est souligné.