

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 8 (1962)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** INTRODUCTION A LA GÉOMÉTRIE DES NOMBRES  
**Autor:** Chabauty, Claude  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-37952>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 24.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# INTRODUCTION A LA GÉOMÉTRIE DES NOMBRES<sup>1)</sup>

par Claude CHABAUTY

## I. RÔLE DES NOTIONS GÉOMÉTRIQUES DANS LES PROBLÈMES D'ARITHMÉTIQUE.

Considérons les énoncés suivants:

- (A). Si deux entiers sont chacun somme de deux carrés d'entiers, leur produit est aussi somme de deux carrés d'entiers.
- (B). Soit  $d$  un nombre naturel non carré, l'équation  $x^2 - dy^2 = 1$  admet une infinité de solutions en entiers  $x, y$ .
- (C). Soit  $ax^2 + 2bxy + cy^2$  une forme quadratique [à coefficients entiers], il existe un système d'entiers  $x, y$ , non tous deux nuls tels que

$$(ax^2 + 2bxy + cy^2)^2 \leq \frac{4}{3} |ac - b^2| .$$

- (D). Soit  $\theta$  un nombre réel, il existe une infinité d'entiers  $x, y$ ,  $y \neq 0$ , tels que

$$\left| \theta - \frac{x}{y} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{5}y^2} .$$

Les énoncés (A) et (B) sont purement algébriques (c'est-à-dire ne font intervenir que les lois de composition  $+$  et  $\times$  de l'anneau des entiers). L'énoncé (D), à l'opposé, a visiblement un caractère géométrique, puisqu'il fait intervenir le continu des nombres réels, mais l'énoncé (C) aussi, car il s'agit de démontrer une inégalité, c'est-à-dire une relation d'ordre, et non une relation algébrique. En outre, il s'agit en fait dans (C) d'une propriété valable pour les formes quadratiques binaires, à coefficients réels quelconques, et se restreindre aux coefficients entiers

---

<sup>1)</sup> Exposé fait durant les Journées mathématiques, organisées par la Société mathématique de France, à Grenoble, mai 1960.

ne simplifie en rien la démonstration. Remarquons que si on suppose la forme indéfinie on peut alors montrer que le coefficient  $\frac{4}{3}$  peut être remplacé par le coefficient  $\frac{4}{5}$ , et que l'inégalité a une infinité de solutions entières. Il est clair que l'énoncé (D) est alors un corollaire de ce résultat sur les formes indéfinies que nous noterons (C'), puisque le discriminant de  $y(x - \Theta y)$  est  $-\frac{1}{4}$ .

D'autre part, appliquons à la forme à coefficients entiers  $x^2 - dy^2$  de (B), l'énoncé (C'). Il nous assure immédiatement l'existence d'un entier  $h$ ,  $h \neq 0$  parce que  $d$  n'est pas carré, tel que l'équation  $x^2 - dy^2 = h$  ait une infinité de solutions en entiers  $x, y$ . Or un calcul élémentaire <sup>1)</sup> permet de construire à partir de telles solutions avec  $x \equiv x' \pmod{h}$ ,  $y \equiv y' \pmod{h}$ , une solution en entiers à  $x^2 - dy^2 = 1$ .

L'énoncé algébrique (B) a donc une démonstration basée sur un énoncé (C') à caractère géométrique et en fait c'est la démonstration la plus naturelle et la plus classique, à des variantes près.

(La valeur de la constante,  $\frac{4}{3}$ , ou  $\frac{1}{5}$ , dans (C') n'a pas d'importance pour cette démonstration de (B), ce qui compte c'est qu'il y ait une constante pour laquelle l'inégalité ait une infinité de solutions entières.)

Par contre, l'énoncé algébrique (A) a évidemment sa démonstration la plus simple et la plus naturelle à partir de l'identité bien connue:  $(u^2 + v^2)(u'^2 + v'^2) = (uu' + vv')^2 + (uv' - vu')^2$ . Pour certains énoncés algébriques, il y a la possibilité de démonstrations algébriques et de démonstrations géométriques.

Dans cet exposé nous nous intéresserons aux problèmes d'arithmétique à caractère géométrique. On vient de voir sur un exemple <sup>2)</sup> que le champ de leurs applications comprend certains problèmes d'arithmétique dont l'énoncé a un caractère algébrique.

<sup>1)</sup> L'équation  $(x + y\sqrt{d})(X + Y\sqrt{d}) = x' + y'\sqrt{d}$  définit des entiers  $X, Y$  avec  $X^2 - dY^2 = 1$ .

<sup>2)</sup> Plusieurs des théorèmes de base de la Théorie des Nombres algébriques ont été obtenus ainsi. Voir, par exemple, A. CHATELET: *Introduction à la théorie des nombres algébriques*, où l'aspect géométrique est souligné.

## II. FORMES A DEUX VARIABLES.

Démontrons l'énoncé (C), dû à LAGRANGE. On considère d'abord une forme définie positive (à coefficients réels). On peut la décomposer en somme de carrés

$$f(x, y) = (xu_1 + yv_1)^2 + (xu_2 + yv_2)^2 = |x\vec{u} + y\vec{v}|^2$$

(avec  $\vec{u} = (u_1, u_2)$ ,  $\vec{v} = (v_1, v_2)$ ;  $|\quad|$  note la distance à l'origine).

$$\text{Le discriminant de } f \text{ est } \Delta = ac - b^2 = \left( \det \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right)^2.$$

Il s'agit de majorer le minimum  $\mu$  de la distance de l'origine aux autres points du « réseau »  $G$  des points  $x\vec{u} + y\vec{v}$  ( $x, y$  entiers). Soit  $\vec{m}$  un point de  $G$  réalisant ce minimum,  $\vec{m}'$  un point de  $G$  formant avec  $\vec{m}$  une « base » du groupe additif  $G$  et situé le plus près possible de l'origine. Des considérations géométriques élémentaires <sup>1)</sup> montrent qu'on a ( $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désignant le produit scalaire, et  $\cdot \wedge \cdot$  le produit vectoriel):

$$(\langle \vec{m}, \vec{m}' \rangle)^2 \leq \frac{|\vec{m}|^4}{4}.$$

$$\text{Or } |\vec{m} \wedge \vec{m}'|^2 = \left( \det \begin{vmatrix} m_1 & m'_1 \\ m_2 & m'_2 \end{vmatrix} \right)^2 = \left( \det \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right)^2 = \Delta,$$

$$\text{et } |\vec{m}'|^2 = \frac{(\langle \vec{m}, \vec{m}' \rangle)^2}{|\vec{m}|^2} + \frac{|\vec{m} \wedge \vec{m}'|^2}{|\vec{m}|^2}$$

$$\text{donc } |\vec{m}|^2 \times |\vec{m}'|^2 \leq \frac{|\vec{m}|^4}{4} + \Delta,$$

et finalement

$$|\vec{m}|^4 \leq |\vec{m}|^2 \times |\vec{m}'|^2 \leq \frac{4}{3} \Delta,$$

ce qui est dans le cas des formes définies le résultat à démontrer. La majoration est alors la meilleure possible comme on voit en utilisant

<sup>1)</sup> Le lecteur est prié de faire la figure.



$\vec{u} = (1, 0)$  et  $\vec{v} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$ , ce qui correspond à la forme  $\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = x^2 + xy + y^2$  pour laquelle  $\mu = 1$  et  $\Delta = \frac{3}{4}$ .

Si maintenant  $g(x, y)$  est une forme indéfinie, décomposons la en différence de deux carrés  $g(x, y) = (xu_1 + yv_1)^2 - (xu_2 + yv_2)^2$ ,  $|g(x, y)|$  est majoré par la forme définie  $f(x, y) = (xu_1 + yv_1)^2 + (xu_2 + yv_2)^2$ , et  $|\text{discr}(g)| = \text{discr}(f)$ , ce qui démontre (C) pour les formes indéfinies. Si nous utilisons toutes les décompositions de  $g$  en différence de deux carrés, il en résulte que l'inégalité de (C) a, pour les formes indéfinies, une infinité de solutions en entiers  $x, y$ , résultat suffisant pour obtenir aisément la démonstration de (B), comme nous avons vu plus haut.

Il serait tentant de démontrer précisément l'énoncé (C') avec le coefficient optimum  $\frac{1}{5}$ , par le même type de méthode géométrique élémentaire. Nous y renonçons faute de temps.

### III. FORMES À $n$ VARIABLES: LA MÉTHODE DE MINKOWSKI.

De tels calculs deviennent plus compliqués dans  $R^3$  (GAUSS a trouvé le coefficient optimum pour les formes quadratiques définies à trois variables) et vraiment difficiles pour les dimensions supérieures. En renonçant à trouver la valeur exacte de la constante optima

$$\gamma_n = \sup_f \min_{x_i} f(x_1, \dots, x_n) / (\text{discrim}(f))^{1/n}$$

( $x_i$  entiers non tous nuls,  $f$  forme quadratique définie positive), HERMITE a pu démontrer que  $\gamma_n$  était finie, et plus précisément que

$$\gamma_n \leq \left(\frac{4}{3}\right)^{n(n-1)/4}$$

par un raisonnement récurrent.

Nous appellerons  $\gamma_n$  la constante d'Hermite (de la dimension  $n$ ).

La méthode d'attaque de ce problème a été complètement renouvelée par MINKOWSKI qui a montré tout le parti qu'on pouvait tirer de la considération de la mesure (aire pour  $n = 2$ , volume pour  $n = 3, \dots$ ) des figures associées aux formes étudiées.

Il n'est pas plus difficile d'établir une théorie correcte de la mesure dans l'espace à  $n$  dimension  $R^n$  que celle de l'aire dans  $R^2$ , du volume dans  $R^3$ . Ce que nous devons supposer établi, c'est que pour une large classe d'ensembles  $X$  de  $R^n$  on a pu leur associer un nombre qu'on notera  $\text{mes}(X)$  qui est  $\geq 0$  et éventuellement  $+\infty$  tel que  $\text{mes}(X \cup Y) = \text{mes}(X) + \text{mes}(Y)$  si  $X$  et  $Y$  sont sans point commun,  $\text{mes}(C) = 1$  pour le « cube » unité défini par  $0 \leq x_1 < 1, \dots, 0 \leq x_n < 1$ , et qui est invariant par translation:  $\text{mes}(X + \vec{a}) = \text{mes}(X)$ . L'intégration des fonctions  $f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$  s'en suit en définissant  $\int f$  à l'aide de la mesure dans  $R^{n+1}$  du domaine associé à  $f$  (comme l'intégrale des fonctions positives d'une variable se définit à l'aide de l'aire du domaine associé). Alors si  $X$  et  $Y$  sont des domaines mesurables sans point commun

$$\int_{X \cup Y} f = \int_X f + \int_Y f.$$

Il est commode de supposer qu'il a été démontré que la mesure et l'intégrale sont des fonctions dénombrablement additives d'ensembles, c'est-à-dire que

$$\text{mes}\left(\bigcup_n X_n\right) = \sum_n \text{mes}(X_n) \quad \int_{\bigcup_n X_n} f = \sum_n \int_{X_n} f$$

quand les  $X_n$  sont deux à deux disjoints <sup>1)</sup>.

Désignons par  $Z^n$  le réseau de tous les points à coordonnées entières, alors les cubes  $(C + \vec{z}, \vec{z} \in Z^n)$ , translatés du cube-unité  $C$ ,  $0 \leq x_i < 1$  forment une partition de  $R^n$  (c'est-à-dire sont disjoints deux à deux et leur réunion est  $R^n$ ). On a donc alors pour une fonction  $f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n) \geq 0$ :

<sup>1)</sup> Dans la suite, les ensembles et les fonctions considérés sont supposés implicitement mesurables et intégrables. La plus grande généralité est obtenue avec la mesure et l'intégrale de Borel-Lebesgue, mais la mesure et l'intégrale de Riemann-Jordan fournissent déjà tous les ensembles et fonctions utiles dans les applications. On peut dans ce cas se dispenser de faire appel à la propriété d'additivité dénombrable.

$$\int_{\vec{x} \in R^n} f(\vec{x}) = \sum_{\vec{z} \in Z^n} \int_{\vec{x} \in C + \vec{z}} f(\vec{x}) = \sum_{\vec{z} \in Z^n} \int_{\vec{x} \in C} f(\vec{x} + \vec{z}) = \int_{\vec{x} \in C} \sum_{\vec{z} \in Z^n} f(\vec{x} + \vec{z})$$

c'est-à-dire

$$\int_{\vec{x} \in R^n} f(\vec{x}) = \int_{\vec{x} \in C} f^*(\vec{x}) \quad (1)$$

avec

$$f^*(\vec{x}) = \sum_{\vec{z} \in Z^n} f(\vec{x} + \vec{z}).$$

Supposons que  $f(\vec{x})$  soit la fonction caractéristique d'un ensemble  $A$  (c'est-à-dire la fonction égale à 1 en tout point de  $A$  et nulle en dehors de  $A$ ), alors :

$$\int_{\vec{x} \in R^n} = \text{mes}(A) \text{ et } f^*(\vec{x}) = \text{nbre}((A \cap (\vec{x} + Z^n)) = \text{nbre}((A - \vec{x}) \cap Z^n)$$

(nbre ( $V$ ) désigne le nombre de points de l'ensemble  $V$ ).

Disons que  $A$  est *irréductible* par rapport à  $Z^n$ , si  $\vec{x} \in A, \vec{x}' \in A$  et  $\vec{x} - \vec{x}' \in Z^n$  entraînent  $\vec{x} = \vec{x}'$ , une propriété équivalente est que la famille d'ensembles  $(A + \vec{z}, \vec{z} \in Z^n)$  forme un *empilement*, c'est à-dire  $A + \vec{z}$  et  $A + \vec{z}'$  n'ont pas d'élément commun si  $\vec{z} \in Z^n, \vec{z}' \in Z^n, \vec{z} \neq \vec{z}'$  c'est encore équivalent au fait que  $f^*(\vec{x}) \leq 1$  quel que soit  $\vec{x} \in R^n$ ; il en résulte  $\text{mes}(A) = \int_{\vec{x} \in G} f^*(\vec{x}) \leq 1$  (puisque

$\text{mes}(C) = 1$ ), on peut même préciser  $\text{mes}(A) < 1$ , si  $A$  est borné fermé.

Revenons à la fonction  $f$  générale. Comme  $\text{mes}(C) = 1$

$$\text{Borne inf. } f^*(x) \leq \int_C f^* = \int_{R^n} f \leq \text{Borne sup. } f^*(x).$$

Il en résulte l'existence de  $\vec{a} \in R^n$  tel que  $f^*(\vec{a}) \leq \int_{R^n} f$  et de  $\vec{b} \in R^n$  tel que  $f^*(\vec{b}) \geq \int_{R^n} f$ . Si  $f$  est la fonction caractéristique de l'ensemble  $A$ , on a donc  $\text{nbre}(A - \vec{a}) \leq \text{mes}(A)$ ,  $\text{nbre}(A - \vec{b}) \geq \text{mes}(A)$ .

Si  $T$  est une transformation linéaire inversible de  $R^n$ , elle multiplie la mesure des ensembles par le coefficient  $|\det(T)|$ ,  $G = T(Z^n)$  est le *réseau* engendré par les  $n$  vecteurs  $\vec{u}_1 = T(\vec{e}_1), \dots, \vec{u}_n = T(\vec{e}_n)$ , (où les  $\vec{e}_i$  sont les vecteurs-unités sur les axes),

on pose  $\det(G) = |\det(T)| = \text{mesure}(P)$  où  $P$  est un domaine fondamental de  $R^n$  modulo  $G$ , par exemple  $P$  est le paralléloétope formé par les  $\vec{x} = \sum t_i \vec{u}_i$ ,  $0 \leq t_i < 1$ , et le résultat obtenu ci-dessus pour le réseau  $Z^n$  se traduit pour un réseau quelconque  $G$  de  $R^n$ , par l'énoncé que nous appellerons *Théorème de Minkowski-Blichfeldt*:

Si  $A$  est un ensemble et  $G$  un réseau de  $R^n$

$$\text{mes}(A) = \int_{x \in P} \text{nbre}((A + \vec{x}) \cap G)$$

autrement dit la valeur moyenne de  $\text{nbre}((A + \vec{x}) \cap G)$  est égale à  $\text{mes}(A)/\det(G)$ . En particulier il existe  $\vec{a}$  tel que

$$\begin{aligned} \text{nbre}((A + \vec{a}) \cap G) &\geq \text{mes}(A)/\det G \text{ et il existe } \vec{b} \text{ tel que} \\ \text{nbre}((A + \vec{b}) \cap G) &\leq \text{mes}(A)/\det G. \end{aligned}$$

Si  $A$  est irréductible par rapport à  $G$ , ou, ce qui revient au même, si la famille des ensembles  $(A + \vec{g}, \vec{g} \in G)$  est un empilement  $\text{mes}(A) \leq \det G$ . Si en outre  $A$  est borné fermé, on a  $\text{mes}(A) < 1$ .

#### IV. APPLICATIONS AUX FORMES QUADRATIQUES DÉFINIES POSITIVES ET AUX APPROXIMATIONS DIOPHANTIENNES LINÉAIRES.

Considérons dans  $R^n$  la boule de rayon unité centrée à l'origine et ouverte,  $B: t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_n^2 < 1$  et soit  $\Omega_n$  sa mesure. Nous noterons  $B_r$  celle de rayon  $r: t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_n^2 < r^2$ .

Soit  $G$  un réseau de  $R^n$ . Pour que  $G \cap B_r$  se réduise à l'origine, il faut et il suffit que  $B_{r/2}$  soit irréductible par rapport à  $G$ , autrement dit que les  $(B_{r/2} + \vec{g}, \vec{g} \in G)$  forment un empilement. On a donc alors  $\text{mes}(B_{r/2}) \leq \det G$ , c'est-à-dire  $\frac{r^n}{2^n} \Omega_n \leq \det G$ . Si donc  $\vec{m}$  est un point de  $G$  (autre que l'origine) ayant la distance minima à l'origine

$$|m|^2 \leq 4(\det(G))^2/\Omega_n^{2/n}.$$

La constante d'Hermite satisfait donc à

$$\gamma_n \leq 4/\Omega_n^{2/n}.$$

Si l'on remarque que la boule-unité  $\sum t_i^2 < 1$  contient le cube  $|x_1| < 1/\sqrt{n}, \dots, |x_n| < 1/\sqrt{n}$  de côté  $2/\sqrt{n}$ , dont la mesure est  $2^n/n^{n/2}$ , il vient  $\Omega_n > 2^n/n^{n/2}$  et par conséquent

$$\gamma_n < n.$$

On a naturellement un résultat un peu plus fort en utilisant la valeur exacte de  $\Omega_n$  qui est donnée, à partir des valeurs bien connues  $\Omega_1 = 2$ ,  $\Omega_2 = \pi$ , par la formule de récurrence  $\Omega_n = 2\pi\Omega_{n-2}/n$ . En particulier on peut écrire:

$$\gamma_n \leq (1 + \varepsilon(n)) 2n/\pi e, \quad \text{avec } \lim_n \varepsilon(n) = 0.$$

On voit le progrès fait depuis la première majoration d'Hermitte. Celle-ci donne la valeur exacte de  $\gamma$  pour  $n = 2$ , mais devient beaucoup moins bonne que celle de Minkowski pour  $n$  grand. Mais en outre la majoration, de Minkowski a été obtenue par une *méthode de portée très générale et qui s'applique non seulement aux boules mais à toute jauge*. Nous appelons ainsi tout ensemble  $J$  convexe ( $\vec{a} \in J$ ,  $\vec{b} \in J$  entraîne que le segment joignant  $a$  et  $b$  est dans  $J$ ), et symétrique par rapport à l'origine<sup>1)</sup>.

Pour une jauge  $J$  et un réseau  $G$  de  $R^n$ , la propriété que  $J \cap G$  se réduise à l'origine équivaut encore à:  $\frac{1}{2} J$  irréductible par rapport à  $G$ <sup>2)</sup>, ou encore que les ensembles  $(\frac{1}{2} J + \vec{g}, \vec{g} \in G)$  forment un empilement, et par conséquent entraîne  $\text{mes}(J) \leq 2^n \det(G)$  et  $\text{mes}(J) < 2^n \det G$  si  $J$  bornée fermée. C'est le *théorème de Minkowski sur les jauges*.

Considérons par exemple un système de formes linéaires indépendantes à coefficients réels:  $a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n, \dots, a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,n}x_n$ , et soit  $D = |\det[a_{i,j}]|$ . Si les  $t_i$  sont des constantes  $> 0$  telles que  $t_1 \times t_2 \times \dots \times t_n = D$ , le domaine  $H$  de  $R^n$  défini par les  $n$  inégalités

1) En général, on met dans les propriétés qui définissent les jauges, celles d'être un ensemble borné et d'avoir l'origine comme point intérieur. Ces conditions sont bien vérifiées dans les exemples que nous considérons.

2)  $\frac{1}{2} A$  désigne l'ensemble homothétique de l'ensemble  $A$  par rapport à l'origine et dans le rapport  $\frac{1}{2}$ .

$$|a_{1,1} x_1 + \dots + a_{1,n} x_n| \leq t_1$$

$$\dots \dots \dots$$

$$|a_{n,1} x_1 + \dots + a_{n,n} x_n| \leq t_n$$

est un paralléloétope fermé de mesure  $2^n$ . Donc il contient un point du réseau  $Z^n$  différent de l'origine. Autrement dit les inégalités admettent au moins une solution en entiers  $x_1, \dots, x_n$ , non tous nuls. C'est le théorème de Minkowski sur les formes linéaires. Corollaire: le produit des valeurs absolues des formes est  $\leq D$  pour une infinité de systèmes d'entiers  $x_1, \dots, x_n$ .

En spécialisant les formes et les coefficients, on obtient le *Théorème fondamental des approximations diophantiennes linéaires*:

Pour tout  $t > 1$ , les inégalités

$$|x_1 - C_{1,1} y_1 - \dots - C_{1,q} y_q| \leq 1/t^{q/p}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$|x_p - C_{p,1} y_1 - \dots - C_{p,q} y_q| \leq 1/t^{q/p}$$

$$|y_1| \leq t, \dots, |y_q| \leq t$$

ont au moins une solution en entiers  $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q$ , les  $y_i$  étant non tous nuls.

Par exemple, pour  $p = 1, q = 1$ , on a un théorème qu'on peut écrire: pour tout nombre  $\theta$  réel et toute constante  $t > 1$  les inégalités

$$|y\theta - x| \leq \frac{1}{t}, \quad 0 < y \leq t,$$

ont au moins une solution en entiers  $x, y$ , et par conséquent l'inégalité

$$\left| \theta - \frac{x}{y} \right| \leq \frac{1}{y^2}$$

a une infinité de solutions en entiers  $x, y$ , avec  $y \neq 0$ . C'est un énoncé voisin de l'énoncé (D), moins fort par le coefficient numérique (1 au lieu de  $1/\sqrt{5}$ ), plus fort par la présence du paramètre  $t$ .

Remarquons que si la fonction

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) \\ = (a_{1,1} x_1 + \dots + a_{1,n} x_n) \times \dots \times (a_{n,1} x_1 + \dots + a_{n,n} x_n) \end{aligned}$$

a ses coefficients entiers, mais est rationnellement indécomposable (les  $a_{ij}$  sont donc des nombres algébriques) et si  $f(1, 0, \dots, 0) = 1$  le théorème du produit montre que pour un entier  $h \neq 0$  convenable l'équation  $f(x_1, \dots, x_n) = h$  a une infinité de solutions en entiers  $x_1, \dots, x_n$ . Si en outre  $f(1, 0, \dots, 0) = 1$  on peut déduire de deux solutions entières congrues mod  $h$ , une solution de  $f(x_1, \dots, x_n) = 1$  qui a ainsi une infinité de solutions. C'est la généralisation à  $n$  variables du résultat (B) sur l'équation de Pell-Fermat <sup>1)</sup>.

## V. DENSITÉ D'EMPILEMENT DE SPHÈRES: LE RÉSULTAT DE BLICHFELDT.

Mais revenons aux formes quadratiques définies. Le résultat de Minkowski,  $\gamma_n \leq n$ , qui surpasse tous ses contemporains par la simplicité et la généralité de la méthode de majoration utilisée, n'est en fait que la traduction du résultat intuitif que, dans un empilement  $(A + \vec{g}, \vec{g} \in G)$  le quotient de l'espace occupé par l'empilement à l'espace total est  $\leq 1$ . Tel quel bien entendu l'énoncé n'est pas correct puisque l'espace entier et l'espace occupé par l'empilement sont infinis; il faut se restreindre à un domaine  $|x_1| \leq l, \dots, |x_n| \leq l$ , et étudier ce qui se passe quand  $l$  croît indéfiniment. On obtient alors comme limite du quotient, que nous appellerons la *densité de l'empilement*,  $\text{mes}(A)/\det G$ . Ne peut-on améliorer cette majoration triviale: densité de l'empilement  $\leq 1$ ? Il ne peut être question de l'améliorer pour un ensemble  $A$  quelconque, même si c'est une jauge, car si  $A$  est par exemple le cube défini par les inégalités

$$-\frac{1}{2} < x_1 < \frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{2} < x_n < \frac{1}{2},$$

l'empilement  $(A + \vec{g}, \vec{g} \in \mathbb{Z}^n)$  recouvre l'espace, à un ensemble de mesure nulle près, donc la densité de l'empilement est égale à 1.

<sup>1)</sup> Comme les résultats sur l'équation de Pell sont équivalents à des résultats sur les « unités » du corps quadratique engendré par  $\sqrt{d}$ , les résultats sur l'équation  $f(x_1, \dots, x_n) = 1$  sont équivalents à des résultats sur les unités d'un corps de nombres algébriques de degré  $n$ , associé à  $f$ . Le cas considéré ici correspond aux corps dont tous les conjugués sont réels. Le cas général peut être traité à partir d'une extension du théorème sur les formes linéaires au cas des coefficients complexes.



Dans le cas des boules, BLICHFELDT (1914) est arrivé à un résultat remarquable: dans l'espace à  $n$  dimensions, la densité d'un empilement de boules  $(B + \vec{g}, g \in G)$  a une densité toujours  $\leq (n+2)/2 (\sqrt{2})^n$ . Ce résultat n'a pas été très sensiblement amélioré depuis; par ailleurs, il ne pourrait l'être que d'une façon limitée, car on a démontré qu'il y a des empilements de boules de densité  $\geq 1/2^{-n+1}$ , résultat valable d'ailleurs pour toute jauge. (HLAWKA, 1944.)

Ce dernier résultat peut s'obtenir facilement à partir d'un théorème de moyenne dû à MAHLER, très analogue au théorème de Minkowski-Blichfeldt démontré précédemment, qui, lui, permet de démontrer la majoration de Blichfeldt. Nous nous contenterons de démontrer le résultat suivant: la densité des empilements de boules est  $\leq (n+1)/(\sqrt{2})^n$ .

On démontre d'abord par une récurrence facile que si dans  $R^n$ ,  $H$  est un système de  $n+2$  points donnés, pour un point  $P$  quelconque de l'espace, il y a au moins une paire de points  $A, B$  de  $H$  tels que  $\widehat{APB} \leq \pi/2$ . (En effet, si les produits scalaires  $\langle \vec{PX}, \vec{PY} \rangle$ ,  $X \in H$ ,  $Y \in H$ ,  $X \neq Y$ , étaient tous  $< 0$ , les projections sur l'hyperplan  $\Pi$  perpendiculaire à  $PA$  en  $P$  ( $A$  étant un élément arbitraire pris dans  $H$ ) des points de  $H$  différents de  $A$ , formeraient dans cet espace à  $n-1$  dimensions un système  $H'$  de  $n+1$  points distincts avec  $\langle \vec{PX'}, \vec{PY'} \rangle < 0$ ,  $X' \in H'$ ,  $Y' \in H'$ ,  $X' \neq Y'$ ; et en itérant on aurait trois points distincts  $L, M, N$  sur une droite passant par  $P$  et tels que  $\langle \vec{PL}, \vec{PM} \rangle$ ,  $\langle \vec{PM}, \vec{PN} \rangle$  et  $\langle \vec{PN}, \vec{PL} \rangle$  soient tous négatifs, ce qui est évidemment impossible.)

Soit alors un empilement  $\{B + \vec{g}, \vec{g} \in G\}$  de boules, de rayon 1 pour fixer les idées, alors les centres de deux boules distinctes quelconques de l'empilement ont une distance  $\geq 2$ . Il résulte alors du lemme précédent qu'une boule de rayon  $\sqrt{2}$  ouverte et de centre  $C$  arbitraire  $(x_1 - c_1)^2 + \dots + (x_n - c_n)^2 < 2$  ne peut contenir plus de  $n+1$  centres des boules empilées, centres qui sont les points de  $G$ . Or d'après le théorème de Minkowski-Blichfeldt on peut trouver  $C$  tel qu'une telle boule contienne un nombre de points de  $G$  supérieur ou égal à la mesure de la boule



(c'est-à-dire  $(\sqrt{2})^n \Omega_n$ ), divisé par le déterminant de  $G$ . Par conséquent :

$$n + 1 \geq (\sqrt{2})^n \Omega_n / \det(G),$$

ou encore :

$$\text{densité de l'empilement} = \Omega_n / \det G \leq (n + 1) / (\sqrt{2})^n,$$

c'est ce que nous nous proposons de démontrer.

Traduit sur  $\gamma_n$ , cela améliore le résultat de Minkowski par un coefficient multiplicatif  $\frac{1 + \varepsilon(n)}{2}$

$$\gamma_n \leq \frac{n}{\pi e} (1 + \varepsilon(n))$$

Le théorème de Hlawka cité plus haut montre

$$\gamma_n \geq \frac{n}{2\pi e} (1 + \varepsilon(n)).$$

On voudrait bien en savoir plus, en particulier si la densité peut être majorée par  $k^n$  avec  $k < 1/\sqrt{2}$ .

## VI. CONCLUSION.

Ces quelques exemples peuvent donner une idée de l'efficacité des méthodes que Minkowski a introduites en Géométrie des nombres, ceux que nous avons donnés sont fondamentaux. Mais la variété des problèmes qui se posent est très grande. Pour l'étude des  $f(x_1, \dots, x_n)$  pour lesquels la figure associée  $|f(x_1, \dots, x_n)| \leq 1$  est non bornée et de mesure infinie, seule une partie des problèmes peut être étudiée par les méthodes de Minkowski et d'autres techniques doivent être introduites.

Il faut signaler pour terminer que, si dans cet exposé on a insisté sur des résultats très généraux, où le nombre de dimensions de l'espace, c'est-à-dire le nombre des variables était indifférent, il y a encore des problèmes à un petit nombre de variables, intéressants et non résolus. Par exemple, appelant maintenant *empilement* une famille d'ensembles  $(A + \vec{g}, \vec{g} \in H)$  disjoints deux à deux,  $H$  n'étant plus nécessairement un réseau, et *empilement régulier*, une telle famille, si  $H$  est un réseau, on ne sait pas encore s'il n'y a pas dans l'espace à trois dimensions

d'empilement plus « dense » que l'empilement régulier le plus dense, qui est l'empilement « en boulet de canon », celui dont le réseau a pour base des points formant avec l'origine un tétraèdre équilatéral (de côté 2 si les boules empilées ont le rayon 1). Une démonstration a été donnée par Lord Kelvin, sur la foi de laquelle physiciens et minéralogistes croient qu'un tel empilement est impossible, mais cette démonstration est insuffisante et la question est toujours ouverte. Par contre pour  $R^2$  la question est résolue par la négative, il n'y a pas d'empilement irrégulier, plus dense que l'empilement régulier le plus dense, c'est-à-dire celui correspondant au réseau admettant pour base deux points formant avec l'origine un triangle équilatéral (de côté 2 si les disques empilés ont le rayon 1) (cf § II)<sup>1</sup>).

On trouvera dans KOKSMA [4], un résumé très complet des résultats jusqu'en 1936 et dans CASSELS [1, 2] les principaux résultats classiques et les résultats récents avec leurs démonstrations. Ce sont des ouvrages techniques, on y trouvera une bibliographie étendue. A l'opposé, on trouvera une introduction élémentaire et très intéressante à la géométrie des nombres dans plusieurs des chapitres du HARDY et WRIGHT [3]. Je ne connais pas d'ouvrage d'un niveau intermédiaire.

Il est intéressant aussi de lire les exposés faits aux différents Congrès internationaux de Mathématiques sur les résultats et les conjectures en Géométrie des nombres, par exemple celles de Mordell au congrès de 1937, celles de Davenport au congrès de 1950 et aux congrès suivants et les exposés de séminaires, car les idées générales y sont soulignées plus que les détails techniques qu'on pourra étudier ensuite.

#### RÉFÉRENCES

- [1] CASSELS, *Introduction to the geometry of numbers*, 1959.
- [2] ——— *Introduction to diophantine approximations*, 1957.
- [3] HARDY and WRIGHT, *Introduction to the theory of numbers*, 1948.
- [4] KOKSMA, *Diophantische Approximationen*, 1936.

Institut Fourier.  
Université de Grenoble.

---

<sup>1</sup>) Signalons à ce propos que la majoration de Blichfeldt pour la densité d'empilement de boules de  $R^n$ , est valable même si l'empilement n'est pas construit à partir d'un réseau.