

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 8 (1962)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LA STABILITÉ TOPOLOGIQUE DES APPLICATIONS  
POLYNOMIALES  
**Autor:** Thom, René  
**Kapitel:** I. Ensembles stratifiés.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-37950>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

La démonstration exige une description de la structure des applications polynomiales; il n'est pas question de donner ici une justification complète des propriétés énoncées, qui entraînerait à des développements techniques très étendus; je me bornerai à donner les définitions nécessaires ainsi que l'énoncé des théorèmes principaux sans démonstration; les théorèmes 1 à 3 cités ici ne jouent d'ailleurs pas de rôle dans la discussion de notre exemple.

Les notions fondamentales sont celles d'*ensembles stratifiés*, et d'*applications stratifiées*. Nous allons les définir:

### I. ENSEMBLES STRATIFIÉS.

Un *ensemble stratifié* (Manifold Collection) est un fermé de l'espace  $R^n$ ; si  $k$  est la dimension de l'ensemble stratifié  $E$ , il existe dans  $E$  des sous-ensembles fermés  $E^{k-1} \supset, E^{k-i} \supset \dots \supset E^0$ , également stratifiés, tels que la différence  $E^j - E^{j-1}$ , soit une *variété différentiablement plongée* de dimension  $j$ ; en particulier  $E^0$  est constitué d'un ensemble de points isolés.

On appellera *strate* de dimension  $j$  de l'ensemble  $E$  toute composante connexe de la variété  $E^j - E^{j-1}$ . Les sous-ensembles stratifiés de  $E$  doivent satisfaire aux propriétés suivantes:

- i) L'adhérence de toute strate est un sous-ensemble stratifié;
- ii) La frontière de l'adhérence d'une strate  $X$  constitue un ensemble stratifié de dimension strictement inférieure à  $\dim X$ , le bord de  $X$  (noté  $\partial X$ );
- iii) Toute réunion et toute intersection finies de sous-ensembles stratifiés sont des sous-ensembles stratifiés;
- iv) Le nombre des strates de  $E$  est fini.

Il importe ensuite de préciser comment les strates se raccordent entre elles; on va donner dans ce but un certain nombre d'axiomes auxquels doit satisfaire tout ensemble stratifié.

Si  $Y$  est une strate de  $E$ , on appellera *étoile* de  $Y$  (notée  $Et(Y)$ ) l'ensemble des strates  $X$  telles que  $Y \subset \bar{X}$ ; l'adhérence de  $Et(Y)$  est un ensemble stratifié.

A toute strate  $Y$  de  $E$  on associe un voisinage tubulaire  $T(Y)$  assez petit au voisinage de  $\partial Y$  pour que la condition suivante soit

satisfaite. Si  $Y$  et  $Z$  sont deux strates, et si  $T(Y) \cap T(Z)$  n'est pas vide, alors l'une des strates  $Y$  (ou  $Z$ ) est adhérente à l'autre.

Chaque tube  $T(Y)$  est muni d'une rétraction  $k_Y: T(Y) \rightarrow Y$ , de rang maximum sur  $T(Y)$ ; si  $Z$  est une strate de l'étoile de  $Y$ , alors  $T(Y) \cap Z$  n'est pas vide, on désignera par  $k_{YZ}$  la restriction de  $k_Y$  à  $T(Y) \cap Z$ . Le système des tubes  $T(Y)$  et de leurs retractions  $k_Y$  sera supposé satisfaire aux axiomes:

IR) (*Incidence régulière*): La restriction  $k_{YZ}: T(Y) \cap Z \rightarrow Y$  est de rang maximum ( $= \dim Y$ ).

RT) (*Raccordement des tubes*): Si on a trois strates  $X, Y, Z$  telles que  $X \subset \partial Y$ ,  $Y \subset \partial Z$ , alors dans  $T(X) \cap T(Y) \cap Z$ , on a:

$$k_{XZ} = k_{XY} \circ k_{YZ}.$$

Enfin on suppose définie sur toute strate  $X$  une fonction réelle  $G_X$  nulle sur  $\partial X$ , strictement positive sur  $X$  et de classe  $C^1$ , telle que la différentielle  $dG_X$  ne s'annule pas dans un voisinage  $G_X \leq a$  de  $\partial X$  dans  $\bar{X}$ . Une telle fonction (dite « fonction tapisante » pour la strate  $X$ ) devra satisfaire à l'axiome:

FT) (*Fonction tapisante*): Si  $X \subset \partial Y$ , la restriction de  $k_{XY}$  à une hypersurface de niveau de la fonction  $G_Y = b$  est de rang maximum dans  $T(X) \cap Y$ , pour toute valeur  $b$  assez petite.

On peut observer que l'axiome FT) implique l'axiome IR), tout au moins pour un tube  $T'$  contenu dans  $T$ .

DÉFINITION. — Une application différentiable  $F: R^n \rightarrow R^p$  est dite *transversale* (*t-régulière* au sens de [1]) sur un sous-ensemble stratifié  $E$  de  $R^p$ , si  $F$  est *transversale* sur toutes les strates de  $E$ .

En vertu des théorèmes connus de transversalité [1], « presque-toute » application (au sens de la  $C^r$ -topologie) est transversale sur  $E$ . On a alors:

THÉORÈME 1. — Si  $F: R^n \rightarrow R^p$  est une immersion transversale sur  $E$ , l'image réciproque  $E' = F^{-1}(E)$  est un ensemble stratifié de  $E'$ .

Les strates de  $E'$  constituent évidemment les variétés  $F^{-1}(Y)$ , où  $Y$  est une strate de  $E$ ; il reste à s'assurer que ces strates

vérifient les axiomes de raccordement; cela implique la construction, pour les strates de  $E'$ , de tubes et de rétractions satisfaisant à IR) et RT); de même on construira des fonctions tapissantes comme images réciproques de celles données sur  $E$  qui satisfont à FT).

## II. APPLICATIONS STRATIFIÉES.

Une application  $F$  d'un ensemble stratifié  $E$  dans un ensemble stratifié  $E'$  sera dite *stratifiée*, si:

- 1°  $F$  est continue;
- 2° L'image par  $F$  de toute strate de  $E$  est une strate de  $E'$ ;
- 3° La restriction de  $F$  à toute strate  $X$  de  $E$  est une application différentiable de rang maximum de la strate  $X$  sur la strate image  $X' = F(X)$ .

Par exemple, si  $E$  est l'image réciproque d'un ensemble  $E'$  par une application transversale  $F: R^n \rightarrow R^p \supset E'$ , alors l'application  $F$  restreinte à  $E$  est stratifiée.

THÉORÈME 2 DE TRIVIALITÉ. — Si  $F$  est une application stratifiée de l'ensemble  $E$  dans le segment I (muni de sa stratification banale), et si  $F$  est *propre*, alors  $F$  est localement triviale sur tout segment intérieur à I.

*Esquisse de la démonstration.* — On construit dans  $E$  un champ de vecteurs ( $H$ ) tel que: 1° En tout point  $x$  de  $E$ ,  $H(x)$  est un vecteur de la strate contenant  $x$ ; 2° Dans chaque strate  $Y$  de  $E$ ,  $H$  est différentiable; 3° L'image par l'application  $F$  de  $H(x)$  est le vecteur unitaire de I; 4° Bien que non nécessairement continu dans l'espace ambiant contenant  $E$ , le champ ( $H$ ) donne par intégration des homéomorphismes de toute image réciproque  $F^{-1}(a)$  sur  $F^{-1}(b)$ ,  $a, b \in I$ .

La construction se fait par induction sur la dimension des strates. On obtient la continuité requise pour l'intégration de  $H$  en imposant au champ ( $H$ ) d'admettre des intégrales premières locales (notamment les fonctions tapissantes, dont c'est là la fonction).