

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 8 (1962)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA STABILITÉ TOPOLOGIQUE DES APPLICATIONS
POLYNOMIALES
Autor: Thom, René
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-37950>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 18.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

LA STABILITÉ TOPOLOGIQUE DES APPLICATIONS POLYNOMIALES¹

par René THOM

Soient E, E' deux espaces euclidiens de dimension n, p respectivement, $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_p)$ deux systèmes de coordonnées pour E et E' . Une application F de E dans E' sera dite *polynomiale*, si elle s'exprime à l'aide d'équations de la forme: $y_j = P_j(x_i), i \leq n, j \leq p$ où les P_j sont des polynômes en les variables x_i . L'espace E sera dit la *source*, E' le *but* de l'application F .

Etant données deux applications f et g de E dans E' , on dira que f et g sont de même type topologique, s'il existe des homéomorphismes h, h' de E et E' dans eux-mêmes, tels que le diagramme d'applications:

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ E & \longrightarrow & E' \\ h \downarrow & & \downarrow h' \\ E & \longrightarrow & E' \\ & g & \end{array}$$

soit commutatif.

Ceci définit entre applications de E dans E' une relation d'équivalence; on sait peu de choses sur l'ensemble des classes d'équivalence ainsi définies; le but essentiel de ce papier est de donner l'exemple d'une application polynomiale P de E dans E' , dépendant algébriquement d'un paramètre k , dont le type topologique *varie continuellement* avec le paramètre k ; par là j'entends que deux applications correspondant à des valeurs différentes du paramètre t ne sont pas de même type topologique. Ceci montre que l'ensemble des types topologiques des applications polynomiales a la puissance du continu, ceci au moins si les dimensions de E et E' sont supérieures à trois.

¹) Conférence prononcée au Colloque sur la géométrie différentielle et la topologie, Zürich, juin 1960.

La démonstration exige une description de la structure des applications polynomiales; il n'est pas question de donner ici une justification complète des propriétés énoncées, qui entraînerait à des développements techniques très étendus; je me bornerai à donner les définitions nécessaires ainsi que l'énoncé des théorèmes principaux sans démonstration; les théorèmes 1 à 3 cités ici ne jouent d'ailleurs pas de rôle dans la discussion de notre exemple.

Les notions fondamentales sont celles d'*ensembles stratifiés*, et d'*applications stratifiées*. Nous allons les définir:

I. ENSEMBLES STRATIFIÉS.

Un *ensemble stratifié* (Manifold Collection) est un fermé de l'espace R^n ; si k est la dimension de l'ensemble stratifié E , il existe dans E des sous-ensembles fermés $E^{k-1} \supset, E^{k-i} \supset \dots \supset E^0$, également stratifiés, tels que la différence $E^j - E^{j-1}$, soit une *variété différentiablement plongée* de dimension j ; en particulier E^0 est constitué d'un ensemble de points isolés.

On appellera *strate* de dimension j de l'ensemble E toute composante connexe de la variété $E^j - E^{j-1}$. Les sous-ensembles stratifiés de E doivent satisfaire aux propriétés suivantes:

- i) L'adhérence de toute strate est un sous-ensemble stratifié;
- ii) La frontière de l'adhérence d'une strate X constitue un ensemble stratifié de dimension strictement inférieure à $\dim X$, le bord de X (noté ∂X);
- iii) Toute réunion et toute intersection finies de sous-ensembles stratifiés sont des sous-ensembles stratifiés;
- iv) Le nombre des strates de E est fini.

Il importe ensuite de préciser comment les strates se raccordent entre elles; on va donner dans ce but un certain nombre d'axiomes auxquels doit satisfaire tout ensemble stratifié.

Si Y est une strate de E , on appellera *étoile* de Y (notée $Et(Y)$) l'ensemble des strates X telles que $Y \subset \bar{X}$; l'adhérence de $Et(Y)$ est un ensemble stratifié.

A toute strate Y de E on associe un voisinage tubulaire $T(Y)$ assez petit au voisinage de ∂Y pour que la condition suivante soit

satisfaite. Si Y et Z sont deux strates, et si $T(Y) \cap T(Z)$ n'est pas vide, alors l'une des strates Y (ou Z) est adhérente à l'autre.

Chaque tube $T(Y)$ est muni d'une rétraction $k_Y: T(Y) \rightarrow Y$, de rang maximum sur $T(Y)$; si Z est une strate de l'étoile de Y , alors $T(Y) \cap Z$ n'est pas vide, on désignera par k_{YZ} la restriction de k_Y à $T(Y) \cap Z$. Le système des tubes $T(Y)$ et de leurs retractions k_Y sera supposé satisfaire aux axiomes:

IR) (*Incidence régulière*): La restriction $k_{YZ}: T(Y) \cap Z \rightarrow Y$ est de rang maximum ($= \dim Y$).

RT) (*Raccordement des tubes*): Si on a trois strates X, Y, Z telles que $X \subset \partial Y$, $Y \subset \partial Z$, alors dans $T(X) \cap T(Y) \cap Z$, on a:

$$k_{XZ} = k_{XY} \circ k_{YZ}.$$

Enfin on suppose définie sur toute strate X une fonction réelle G_X nulle sur ∂X , strictement positive sur X et de classe C^1 , telle que la différentielle dG_X ne s'annule pas dans un voisinage $G_X \leq a$ de ∂X dans \bar{X} . Une telle fonction (dite « fonction tapisante » pour la strate X) devra satisfaire à l'axiome:

FT) (*Fonction tapisante*): Si $X \subset \partial Y$, la restriction de k_{XY} à une hypersurface de niveau de la fonction $G_Y = b$ est de rang maximum dans $T(X) \cap Y$, pour toute valeur b assez petite.

On peut observer que l'axiome FT) implique l'axiome IR), tout au moins pour un tube T' contenu dans T .

DÉFINITION. — Une application différentiable $F: R^n \rightarrow R^p$ est dite *transversale* (*t-régulière* au sens de [1]) sur un sous-ensemble stratifié E de R^p , si F est *transversale* sur toutes les strates de E .

En vertu des théorèmes connus de transversalité [1], « presque-toute » application (au sens de la C^r -topologie) est transversale sur E . On a alors:

THÉORÈME 1. — Si $F: R^n \rightarrow R^p$ est une immersion transversale sur E , l'image réciproque $E' = F^{-1}(E)$ est un ensemble stratifié de E' .

Les strates de E' constituent évidemment les variétés $F^{-1}(Y)$, où Y est une strate de E ; il reste à s'assurer que ces strates

vérifient les axiomes de raccordement; cela implique la construction, pour les strates de E' , de tubes et de rétractions satisfaisant à IR) et RT); de même on construira des fonctions tapissantes comme images réciproques de celles données sur E qui satisfont à FT).

II. APPLICATIONS STRATIFIÉES.

Une application F d'un ensemble stratifié E dans un ensemble stratifié E' sera dite *stratifiée*, si:

- 1° F est continue;
- 2° L'image par F de toute strate de E est une strate de E' ;
- 3° La restriction de F à toute strate X de E est une application différentiable de rang maximum de la strate X sur la strate image $X' = F(X)$.

Par exemple, si E est l'image réciproque d'un ensemble E' par une application transversale $F: R^n \rightarrow R^p \supset E'$, alors l'application F restreinte à E est stratifiée.

THÉORÈME 2 DE TRIVIALITÉ. — Si F est une application stratifiée de l'ensemble E dans le segment I (muni de sa stratification banale), et si F est *propre*, alors F est localement triviale sur tout segment intérieur à I.

Esquisse de la démonstration. — On construit dans E un champ de vecteurs (H) tel que: 1° En tout point x de E , $H(x)$ est un vecteur de la strate contenant x ; 2° Dans chaque strate Y de E , H est différentiable; 3° L'image par l'application F de $H(x)$ est le vecteur unitaire de I; 4° Bien que non nécessairement continu dans l'espace ambiant contenant E , le champ (H) donne par intégration des homéomorphismes de toute image réciproque $F^{-1}(a)$ sur $F^{-1}(b)$, $a, b \in I$.

La construction se fait par induction sur la dimension des strates. On obtient la continuité requise pour l'intégration de H en imposant au champ (H) d'admettre des intégrales premières locales (notamment les fonctions tapissantes, dont c'est là la fonction).

Dégénérescence et éclatement.

Soit F une application stratifiée de E dans E' ; si la strate X de E a pour image la strate X' de E' , on a nécessairement $\dim X \geq \dim X'$; la différence $q(X) = \dim X - \dim X'$ sera appelée la *dégénérescence* de F sur X .

Par exemple, si E est l'image réciproque de E' par une application $F: R^n \rightarrow R^p$ transversale sur E' , la dégénérescence q vaut $n - p$ si $n \geq p$, 0 si $n < p$ sur toute strate de E .

On dira qu'une application stratifiée $F: E \rightarrow E'$ présente de l'*éclatement*, s'il existe dans E au moins un couple de strates X, Y telles que $Y \in Et(X)$ et $q(Y) < q(X)$.

Par exemple, l'application associée au σ -Process de la géométrie algébrique, application de R^2 dans R^2 définie par $X = x$, $Y = xy$, présente de l'éclatement: en effet, sur la strate $x = 0$, qui a pour image le point $X = Y = 0$, la dégénérescence q vaut un, alors que sur tout demi-plan $x \neq 0$, la dégénérescence q vaut zéro.

Au contraire, l'application $F: E \rightarrow E'$ mentionnée ci-dessus (lorsque E est une image réciproque transversale de E') ne présente pas d'éclatement, car la dégénérescence q est la même sur toute strate de E .

Supposons qu'on ait affaire à la situation suivante: Deux ensembles stratifiés E, E' , et deux applications stratifiées F, G : $F: E \rightarrow E'$, $G: E' \rightarrow I$, telles que la composée $G \circ F: E \rightarrow I$ soit également stratifiée. Si a, b désignent deux valeurs intérieures à I , les images réciproques dans E et E' sont des ensembles stratifiés E_a, E_b, E'_a, E'_b ; on désignera par F_a, F_b les restrictions de F à E_a, E_b ; on a alors le théorème

THÉORÈME 3. — *Si l'application stratifiée $F: E \rightarrow E'$ est sans éclatement, les applications sections F_a, F_b ont même type topologique.*

Esquisse de la démonstration. — On construit d'abord un homéomorphisme g_{ab} de E'_a sur E'_b par intégration d'un champ (H) dans E' , ainsi que le donne le théorème 2 de trivialité; puis on relève le champ (H) dans E en un champ H_0 tel que, sur toute

strate de E , $\dot{F}(H_0) = H$; l'intégration de H_0 donne alors un homéomorphisme h_{ab} de E_a sur E_b tel que le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} & F_a & \\ & \longrightarrow & \\ h_{ab} \downarrow & E_a & \longrightarrow E'_a \\ & F_b & \\ & \longrightarrow & \\ & E_b & \longrightarrow E'_b \\ & & \downarrow g_{ab} \end{array}$$

soit commutatif.

L'hypothèse de non-éclatement de F intervient dans le relèvement de H en H_0 ; s'il y a de l'éclatement, alors le champ (H_0) devra admettre un système local d'intégrales premières en nombre supérieur à la dimension de la strate, ce qui peut conduire à une impossibilité.

3° Ensembles semi-algébriques.

On appelle *ensemble semi-algébrique* dans R^n l'ensemble des points dont les coordonnées (x_i) vérifient un système d'équations et d'inégalités polynomiales larges $P_j(x_i) = 0$, $Q_r(x_i) \leq 0$, ou encore une réunion finie de tels ensembles.

THÉORÈME 4. — *Tout ensemble semi-algébrique est un ensemble stratifié.*

H. Whitney a démontré que tout ensemble algébrique réel est pourvu d'une stratification [3] douée de la propriété d'incidence régulière (résultat non encore publié); la présence d'inégalités ne change pas substantiellement ce résultat; les tubes, les rétractions et les fonctions tapissant les strates peuvent dans ce cas être construits explicitement.

4° Applications polynomiales.

Soit P une application polynomiale de R^n dans R^p , E un ensemble quasi-algébrique compact de R^n ; on peut alors affirmer

THÉORÈME 5. — *L'ensemble image $E' = P(E)$ est un ensemble semi-algébrique.*

Ceci est une conséquence du théorème de Tarski-Seidenberg sur l'élimination réelle. Il est évident, par ailleurs, que la contre-

image d'un ensemble semi-algébrique par une application polynomiale P est un ensemble semi-algébrique localement.

THÉORÈME 6. — Si P est une application polynomiale, E un ensemble semi-algébrique compact de la source E , $E' = P(E)$ son image, il existe des stratifications de E et E' pour lesquelles la restriction de P à E est une application stratifiée.

Esquisse de la démonstration. — Soit Y une strate de E ; on forme le sous-ensemble $C(Y)$ sur lequel le rang de P restreint à Y s'abaisse; $\overline{C(Y)}$ est un ensemble semi-algébrique de dimension inférieure à $\dim Y$; on substratifie E' de manière que $P(\overline{C(Y)})$ soit un sous-ensemble stratifié contenu dans la nouvelle stratification s_1 de E' ; puis on prend la stratification contre-image de s_1 dans E par P ; après itération finie, ce processus s'arrête; on l'effectue alors sur toutes les strates de E en procédant par dimension décroissante.

Remarque. — Le caractère stratifié des applications algébriques ne semble pas avoir été explicité dans la littérature; en fait, les applications analytiques, et « presque-toutes » les applications différentiables sont très vraisemblablement stratifiées...

4° Un exemple.

Il s'agit de montrer que, dans le théorème 3, la condition de non éclatement ne peut être éliminée. On considère l'application $P(k)$ de $R^3(x, y, z)$ dans $R^3(X, Y, Z)$, dépendant algébriquement du paramètre k , définie par les équations:

$$\begin{aligned} X &= [x(x^2 + y^2 - a^2) - 2a yz]^2 \\ &\quad [(ky + x)(x^2 + y^2 - a^2) - 2az(y - kx)]^2 \\ Y &= x^2 + y^2 - a^2 \\ Z &= z. \end{aligned}$$

Conformément au théorème 6, cette application peut être stratifiée (par exemple dans une boule de $Oxyz$ de rayon arbitrairement grand); l'ensemble critique S_1 des points où le rang de P_k est ≤ 2 , ainsi que son image par $P(k)$ feront évidemment partie des stratifications de la source et du but. Or l'ensemble S_1 contient la surface (H) d'équation:

$$[x(x^2 + y^2 - a^2) - 2ayz]$$

$$[(ky + x)(x^2 + y^2 - a^2) - 2az(y - kx)] = 0 .$$

Cette surface (H) se décompose en deux surfaces (H_1), (H_2) d'équations:

$$(H_1) \quad \frac{x^2 + y^2 - a^2}{2az} = y/x$$

$$(H_2) \quad \frac{x^2 + y^2 - a^2}{2az} = \frac{y - kx}{ky + x} .$$

Ces deux surfaces se coupent suivant le cercle (C) $\begin{cases} x^2 + y^2 - a^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

qui fait nécessairement partie de la stratification de la source. L'application $P(k)$ applique (H_1) et (H_2) sur le plan $X = 0$; la contre-image par $P(k)$ de l'origine $Y = Z = 0$ de ce plan dans la surface (H) est le cercle (C); on en conclut que la restriction de $P(k)$ à (H) présente de l'éclatement. En effet, $P(k)$ est de dégénérescence un sur le cercle (C), et de dégénérescence nulle sur les 2-strates voisines de (H_1) ou (H_2). En tant qu'application stratifiée $P(k)$ présente par suite de l'éclatement pour toute valeur du paramètre k .

Paramétrons le cercle C par l'angle polaire $\theta = \widehat{Ox, OM}$; posant $m = \operatorname{tg} \theta$, on voit que la surface (H_1) est engendrée par la parabole $Q(m)$ variable avec m d'équations: $x^2 + y^2 - a^2 = 2amz$, $y = mx$. La parabole $Q(m)$ rencontre le cercle (C) aux deux points M, M' diamétralement opposés d'angles polaires $\theta, \theta + \pi$. Son image par $P(k)$ est la droite $Z = 2am Y$.

De même, la surface (H_2) est engendrée par la parabole variable $Q(m')$ $x^2 + y^2 - a^2 = 2am'z$, $m' = \frac{y - kx}{ky + x} = m - \frac{k}{1 + km}$.

Si l'on pose $k = \operatorname{tg} \alpha$, on voit que si $m' = m$, $Q(m')$ rencontre (C) aux points diamétralement opposés d'angles polaires $\theta = \alpha, \theta + \pi = \alpha$. Autrement dit: les paraboles $Q(m), Q(m')$ ont même image par $P(k)$, si et seulement si $m' = m$, ou encore si les diamètres suivant lesquels elles rencontrent (C) font entre eux un angle égal à α .

Je dis alors que deux applications $P(k)$, $P(k')$ correspondant à deux valeurs distinctes du paramètre k sont de types topologiques différents; en effet les homéomorphismes de raccord h et g de la source et du but doivent nécessairement conserver globalement et la surface (H) , et le cercle (C) qui en est une ligne double, donc aussi leurs images au but: le plan YOZ , et l'origine $X = Y = Z = O$. Or, pour qu'un chemin continu $g: I \rightarrow YOZ$, d'origine O ($g(O) = 0$) soit l'image par $P(k)$ d'un chemin continu ayant pour origine un point M de (C) , il faut et il suffit que le chemin g admette une tangente en O ; par suite, tout homéomorphisme g du but tel que $g \circ P(k') = P(k) \circ h$, doit nécessairement conserver globalement tous les chemins ayant une tangente en O ; or les directions issues de O dans YOZ sont mises en correspondance biunivoque par l'éclatement de $P(k)$ sur l'une des surfaces (H_1) ou (H_2) avec les diamètres de (C) , ou encore avec les points du cercle (C_1) quotient de (C) par la transformation antipodique. Donc l'application $P(k)$ détermine intrinsèquement une correspondance (t_k) sur (C_1) , à savoir la rotation $\theta \rightarrow (\theta - \alpha)$: des points homologues par (t_k) correspondent à la même direction issue de (O) dans YOZ ; il résulte de là que l'homéomorphisme h de la source doit transformer (C_1) en lui-même de façon que la correspondance (t_k) soit transformée en $(t_{k'})$. Or on sait classiquement [2] que deux rotations d'angles différents du cercle ne peuvent se transformer l'une dans l'autre par un homéomorphisme du cercle (théorie du « nombre de rotation » d'un homéomorphisme). Par suite, un tel homéomorphisme h ne peut exister.

5° *Remarques finales et conclusions.*

L'exemple précédent présente un caractère typique: la présence d'éclatement dans une application stratifiée peut conduire à l'instabilité du type topologique pour la raison suivante: dans un voisinage d'une strate éclatée, l'application opère des identifications qui se traduisent par une correspondance dans la strate (S) elle-même; or le problème qui consiste à classifier les correspondances d'un espace S sous l'action du groupe des homéomorphismes de (S) conduit à une classification encore plus fine que le problème d'équivalence topologique de deux applications.

Pour terminer, je voudrais signaler les applications possibles de la théorie des applications stratifiées au problème de la stabilité topologique des applications différentiables. Admettons que « presque-toute » application différentiable est stratifiée (ce qui est, semble-t-il, la majeure difficulté qui subsiste); pour qu'une application f soit topologiquement stable (c'est-à-dire de même type topologique que toute application assez voisine dans la C^r -topologie), il suffit qu'elle présente les caractères suivants: 1° f est stratifiée; 2° les strates de la source sont définies partout par des équations locales de rang maximum (dont les premiers membres sont des fonctions précises de f et de ses dérivées); 3° en tant qu'application stratifiée, f ne présente pas d'éclatement.

Or la condition 3, à elle seule, ne semble pas devoir présenter de grandes difficultés, et elle est certainement vraie de presque-toute application différentiable stratifiée.

Signalons enfin le rapport de cette théorie avec le problème suivant: peut-on « trianguler » une application différentiable, analytique, etc. ? Si V et M sont deux variétés différentiables compactes pourvues de triangulations différentiables et f une application simpliciale pour ces triangulations, alors il est clair que f peut être considérée comme une application stratifiée. *Mais alors f ne présente pas d'éclatement*: en effet, la dégénérescence d'une application simpliciale f sur un simplexe s^n est toujours au moins égale à la dégénérescence de f sur tout simplexe incident à s^n . On peut raisonnablement conjecturer qu'il s'agit là d'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une application analytique, par exemple, puisse être triangulée.

RÉFÉRENCES

- [1] THOM, R., Quelques propriétés globales des variétés différentiables. *Commentarii Math. Helv.*, t. 28, p. 17, 1954.
- [2] VAN KAMPEN, Topological transformations of a curve. *American Journal of Math.*, t. 57, p. 142, 1935.
- [3] WHITNEY, H., Elementary structure of real algebraic varieties. *Annals of Math.*, t. 66, p. 545, 1957.