Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 8 (1962)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: DIE VORBEREITUNG DES GRENZWERTBEGRIFFS IN DER UNTER- UND MITTELSTUFE DER GYMNASIEN

Autor: Baur, A.

Kapitel: 3. GRENZWERTBETRACHTUNGEN AUF DER MITTELSTUFE

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-37973

Damit ist dann auch der nichtperiodische unendliche Dezimalbruch in die Nähe gerückt. Wird die Existenz der nichtperiodischen Dezimalbrüche vorausgesetzt, so ist in gewissem Umfang auch das Problem der reellen Zahl in Angriff genommen, und die Lösung dieses für die Schule sehr wichtigen Problems scheint angebahnt. Die Folgen sind schwerwiegend: Nun können auf der Mittelstufe die Irrationalitätsbeweise für Zahlen wie etwa $\sqrt{2}$ oder lg 3 sauber durchgeführt werden.

Eine *vierte methodische Forderung* ist wichtig: Die Behandlung der einzelnen Grenzwerte kann und soll auch auf der Unterstufe sauber erfolgen. Numerische Berechnungen bilden die Grundlage. Die Behandlung soll sich auf *das einzelne Zahlenbeispiel* beschränken.

Die systematische Behandlung der Grenzwerte, insbesondere der Kalkül des Rechnens mit Grenzwerten soll der Oberstufe vorbehalten bleiben.

3. GRENZWERTBETRACHTUNGEN AUF DER MITTELSTUFE

3.1. *Forderungen methodischer und psychologischer Art.*

Auch auf der Mittelstufe soll sich die Behandlung auf das einzelne Beispiel beschränken. Jedes Beispiel soll elementar, wenn möglich unter Zuhilfenahme anschaulicher Methoden, jedoch streng behandelt werden. Die systematische Behandlung kann nur vorbereitet werden; der Grenzwertkalkül gehört nicht auf die Mittelstufe.

Die Untersuchung vorkommender Funktionen auf Monotonie ist sehr wichtig; gerade die Monotonie hat noch durchaus anschaulichen Charakter.

Das Hilfsmittel der Intervallschachtelung ist anschaulicher Herkunft, führt jedoch über den Gebrauch der blossen Anschauung hinaus.

Es muss in der Mittelstufe angestrebt werden, dass der Schüler zwar von der Anschauung ausgeht, aber schliesslich erfährt, dass die Anschauung allein ein unvollkommenes Hilfsmittel ist.

3.2. *Grenzwertprobleme aus dem Gebiet der Arithmetik.*

3.2.1. Hier wird die Weiterführung der einfachsten Rechnungen mit Ungleichungen vorgeschlagen, ferner die Behandlung von Abschätzungen. Beides erfordert sehr wenig Zeit. Weiter ist der Monotoniecharakter von Funktionen wie etwa x^2, x^3, ... $x^{1/2}$, $x^{p/q}$, 10^x, a^x $(a > 0)$ usf. nachzuweisen. Nun kann man die oben erwähnten Irrationalitätsbeweise behandeln, z.B.

1) $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl (indirekter Beweis).

2) lg 3 ist keine rationale Zahl (Aus $\frac{p}{q} = \lg 3$ folgt $10^p = 3^q$. Die links stehende ganze Zahl ist nur durch 2 und durch 5, die rechts stehende ganze Zahl ist nur durch 3 teilbar).

3.2.2. Ein besonders wichtiges Beispiel zu unserem Thema bietet die numerische Berechnung der Quadratwurzeln. In den letzten Jahren ist hier methodisch viel gearbeitet worden. Es handelt sich stets um die Berechnung der ersten Schritte einer passenden Schachtelung. Da die Funktion $y = x^{1/2}$ für positive Werte von x monoton wachsend ist, kann eine passende Schachtelung stets konstruiert werden.

Seit einiger Zeit ist in der Bundesrepublik das einst fast ausschliesslich verwendete Verfahren verpönt. Es handelt sich um die folgende Rechnung:

$$\begin{array}{l}
\sqrt{3,\ 00\ 00\ 00\ 00\ \ldots} \quad = 1,\ 7\ 3\ 2\ 0\ \ldots \\
-1 \\
\overline{} \\
2\ 00 : 2\ 7 \\
-1\ 89 \\
\overline{} \\
11\ 00 : 34\ 3 \\
-10\ 29 \\
\overline{} \\
71\ 00 : 346\ 2 \\
-69\ 24 \\
\overline{} \\
1\ 76\ 00\ 00 \\
\cdots\cdots
\end{array}$$

Dieses Verfahren ist nicht nur eine exakte Intervallschachtelung, sondern sogar eine solche Schachtelung, die bei jedem Schritt genau eine weitere Dezimale der gesuchten Entwickelung liefert. Sie ist bezüglich des Arbeitsaufwands und hinsichtlich der erreichten Genauigkeit optimal. Allerdings ist der genaue Beweis nicht einfach.

3.2.3. Sehr wichtig ist das Problem der Logarithmen. Der Schüler möchte an einigen Beispielen eine numerische Berechnung eines Logarithmus auf 4 (oder auch auf 5) Dezimalen durchgeführt haben. In den letzten Jahren sind auch hier verschiedene Vorschläge gemacht worden. Ich möchte die einfachste Methode empfehlen; sie gibt wieder ein Beispiel für die Berechnung einer Intervallschachtelung.

Die heute im Unterricht der deutschen Gymnasien in der Regel vorliegenden Verhältnisse fordern die Arbeit mit einer vierstelligen Tafel für das Zahlenrechnen. Die folgende Rechnung ist vollständig mit einer solchen vierstelligen Quadratzahlentafel durchgeführt worden. Man geht aus von $3^8 = 6\,561 = 6,561 \,.\, 10^3$. Durch Weiterquadrieren mittels der Quadratzahlentafel ergibt sich für die vierziffrige Rechnung:

$$
\begin{aligned}
3^{16} &= 4,304 \,.\, 10^{7}\\
3^{32} &= 1,853 \,.\, 10^{15}\\
3^{64} &= 3,434 \,.\, 10^{30}\\
3^{128} &= 1,179 \,.\, 10^{61}\\
3^{256} &= 1,390 \,.\, 10^{122}\\
3^{512} &= 1,932 \,.\, 10^{244}\\
3^{1\,024} &= 3,733 \,.\, 10^{488}\\
3^{2\,048} &= 1,393 \,.\, 10^{977}\\
3^{4\,096} &= 1,940 \,.\, 10^{1\,954}\\
3^{8\,192} &= 3,764 \,.\, 10^{3\,908}\\
3^{163\,84} &= 1,417 \,.\, 10^{7\,817}
\end{aligned}
$$

Die Ausgangszeile liefert wegen der Monotonie der Funktion 10^4 die doppelte Ungleichung: $10^3 < 3^8 < 10^4$ oder $10^3 < 10^{8\ lg 3} < 10^x$ also: $3/8 < \lg\ 3 < 4/8$ oder $0,3750 < \lg\ 3 < 0,5000$. Man findet entsprechend eine fortlaufende Kette von Ungleichungen, die eine Schachtelung ergeben. Auf diese Weise findet man:

$$
\begin{aligned}
0,375\,0 &< \lg 3 < 0,500\,0\\
0,437\,5 &< \lg 3 < 0,500\,0\\
0,468\,8 &< \lg 3 < 0,500\,0\\
0,468\,8 &< \lg 3 < 0,484\,4\\
0,476\,6 &< \lg 3 < 0,484\,4\\
0,476\,6 &< \lg 3 < 0,480\,5\\
0,476\,6 &< \lg 3 < 0,478\,5\\
0,476\,6 &< \lg 3 < 0,477\,5\\
0,477\,05 &< \lg 3 < 0,477\,54\\
0,477\,05 &< \lg 3 < 0,477\,30\\
0,477\,05 &< \lg 3 < 0,477\,17\\
0,477\,12 &< \lg 3 < 0,477\,17
\end{aligned}
$$

Damit findet man den Wert des lg 3 auf vier Dezimalen. Mit Benutzung der vierstelligen Quadratzahlentafel nimmt das Verfahren nicht viel Zeit in Anspruch.

3.3 *Grenzwertprobleme aus dem Gebiet der Geometrie.*

a) Das wichtigste Problem der Flächen- und der Längenmessung bietet sich beim Kreis. In der Tat ist die Berechnung der Zahl π sachlich wie kulturgeschichtlich von eminenter Bedeutung. Vielfach wird in der Bundesrepublik die Archimedische Methode, die sich auf die Berechnung von regelmässigen Vierecken stützt, ganz aufgegeben. Ich kann dem nur teilweise zustimmen. Die numerische Berechnung der Zahl π ist nach Archimedes in der Tat höchst unvollkommen. Bei Benutzung der vierstelligen Quadrat- und Wurzeltafel findet man für das 24- Eck:

$$i_{24} = 3,105\,8\, r^2 < F < J_{24} = 3,159\,7\, r^2 \text{ und}$$
$$u_{24} = 3,132\,6\,.\,2r < u < U_{24} = 3,159\,7\,.\,2r\,.$$

Damit ist die Zahl π nur auf eine Stelle nach dem Komma ermittelt. Dieses Ergebnis der praktischen Mathematik ist aber tatsächlich im Verhältnis zu dem sehr hohen Aufwand an theoretischer Arbeit sehr wenig befriedigend. Dagegen gewährt das Archimedische Verfahren bedeutende theoretische Vorzüge:

1. Sowohl für die Flächen, wie für die Umfänge ergeben sich die Bedingungen der Intervallschachtelung auf anschaulicher Basis aus der Figur. Es seien i_n, J_n, u_n, U_n, s_n, S_n die Masszahlen der Flächen, der Umfänge und der Seiten des ein- bzw. des umbeschriebenen regulären Vielecks mit n Ecken, und es sei ferner ρ_n der Radius des dem n-Eck einbeschriebenen Kreises, also der Abstand der Seite des n-Ecks vom Kreismittelpunkt. Dann ist

$$i_n < i_{2n} < i_{4n} < i_{8n} < \ldots\ldots < J_{8n} < J_{4n} < J_{2n} < J_n \text{ und}$$
$$u_n < u_{2n} < u_{4n} < u_{8n} < \ldots\ldots < U_{8n} < U_{4n} < U_{2n} < U_n .$$

Die einbeschriebenen und die umbeschriebenen n-Ecke geben also zunächst für die Masszahlen der Flächen auf- bzw. absteigende Zahlenfolgen. Diese bilden eine Schachtelung, wenn die Differenzen $J_n - i_n$ eine Nullfolge bilden.

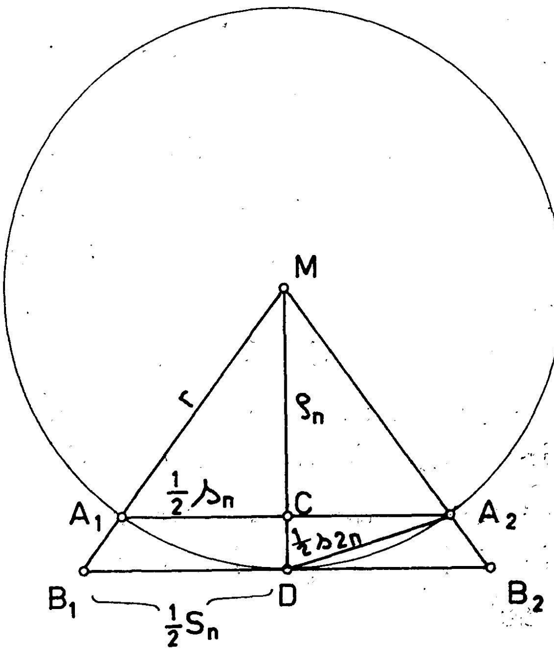

Abb. 1.

Aus Abb. 1 ergibt sich:

$$\frac{s_n^2}{4} + \rho_n^2 = r^2, \quad \frac{s_{2n}^2}{4} + \rho_{2n}^2 = r^2 \text{ und } s_{2n}^2 = \frac{1}{4}\, s_n^2 + (r - \rho_n)^2 .$$

Durch Elimination der Grössen s_n und s_{2n} findet man die Beziehung $r^2 - \rho_{2n}^2 = \frac{r}{2}(r - \rho_n)$ oder $r - \rho_{2n} = \frac{r}{2(r + \rho_{2n})}(r - \rho_n)$.

Hieraus gewinnt man leicht die Abschätzung

$$r-\rho_{2n} < \frac{1}{2}(r-\rho_n).$$

Für $n > 4$ ist $\rho_n > \frac{r}{2}$, d. h. $r-\rho_n < \frac{r}{2}$, somit

$$r-\rho_{2n} < \frac{r}{4},$$

$$r-\rho_{4n} < \frac{r}{8}, \quad \text{usf.}$$

Die Strecken $r-\rho_n$ bilden also mit wachsendem n eine Nullfolge.

Nun ist $U_n - u_n = nS_n - ns_n = \dfrac{nS_n}{r}(r-\rho_n) = \dfrac{U_n}{r}(r-\rho_n)$.

Für $n > 4$ ist $U_n < U_4 = 8r$, also

$$U_n - u_n < 8(r-\rho_n).$$

Weiter ist $J_n - i_n = \dfrac{n}{2}S_n r - \dfrac{n}{2}s_n = \dfrac{nS_n}{2r}(r^2-\rho_n{}^2) = \dfrac{U_n}{2r}(r^2-\rho_n^2)$,

also $J_n - i_n < \dfrac{U_n}{2r}(r+\rho_n).(r-\rho_n) < \dfrac{U_4.2r}{2r}(r-\rho_n) < 8r(r-\rho_n)$.

Damit ist nachgewiesen, dass die Folgen der Masszahlen der Flächen der ein – und der umbeschriebenen regulären n-Ecke eine Intervallschachtelung bilden; dasselbe ist für die Masszahlen der Umfänge der Fall. Diese Schachtelungen definieren den Kreisinhalt bzw. den Kreisumfang.

2. Das Archimedische Verfahren hat eine ausserordentliche Bedeutung hinsichtlich der Kulturgeschichte der Menschheit.

3. Mittels des Archimedischen Verfahrens kommt man zu dem Zusammenhang der Masszahlen von Fläche und Bogen.

4. Man kann sogar die Unabhängigkeit des Ergebnisses der Intervallschachtelungen vom Ausgangsvieleck nachweisen. Dieser Punkt ist jedoch schon sehr subtil; im allgemeinen hat der Schüler der Mittelstufe kein Bedürfnis für diesen Nachweis.

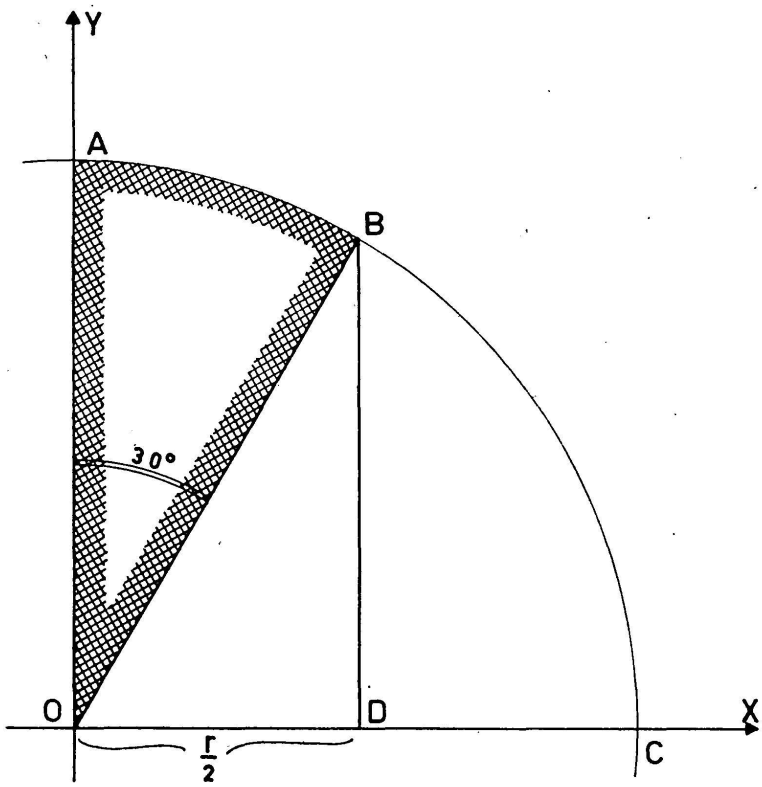

Abb. 2.

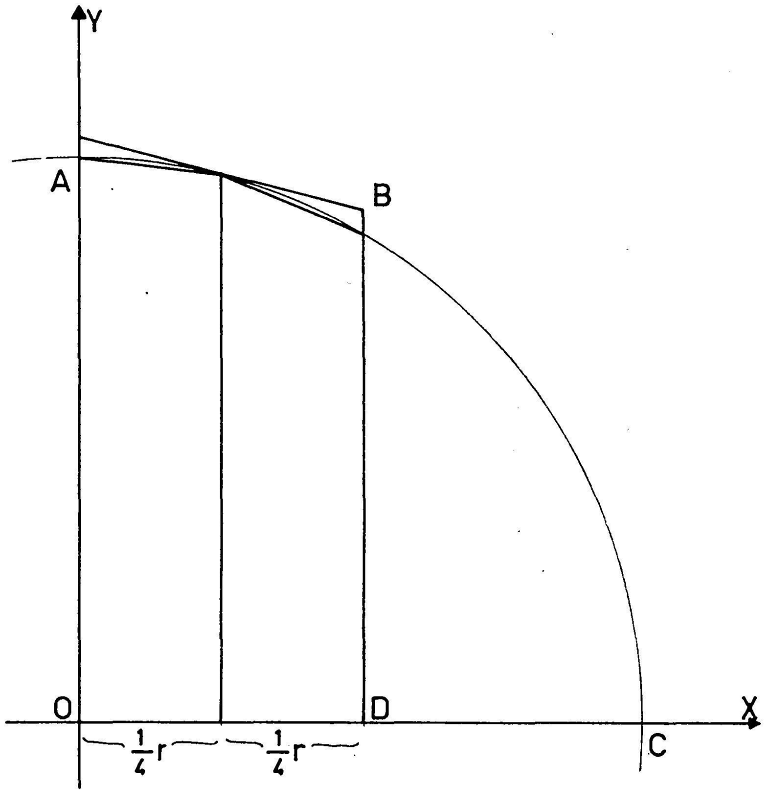

Abb. 3.

Die numerisch genauere Berechnung der Zahl π erfolgt am besten mittels der sogenannten Trapezmethoden (Abb. 2, 3). Mittels der einfachsten Verfahren der numerischen Integration, d.h. mittels der Sehnen- bzw. der Tangententrapeze wird das Integral

$$F = \int_0^{r/2} \sqrt{r^2 - x^2} \cdot dx$$

numerisch berechnet. Dann wird $\pi r^2 = 12\,F - 2{,}598\,1\,r^2$.

In der folgenden Tafel sind die Ergebnisse zusammengestellt, die man erhält, wenn man wieder (entsprechend den in der Bundesrepublik in der Regel vorliegenden Verhältnissen) die vierstellige Quadrattafel benutzt. Dabei bedeutet n die Anzahl der Flächenstreifen über dem Intervall $\left(0 \dots \frac{r}{2}\right)$. Abbildung 3 zeigt den Fall $n = 2$.

n	i_n	J_n	$F_n = J_n - i_n$	F_n in %
2	3,1057 r^2	3,2114 r^2	0,1057 r^2	3,36%
4	3,1326 r^2	3,1595 r^2	0,0269 r^2	0,86%
8	3,1393 r^2	3,1461 r^2	0,0068 r^2	0,22%
16	3,1410 r^2	3,1427 r^2	0,0017 r^2	0,054%

Die mit der Aufstellung dieser Tafel verbundene rechnerische Mühe ist im Verhältnis zu der erreichten zahlenmässigen Genauigkeit immerhin noch tragbar. Es erhebt sich die Frage, ob es nicht möglich erscheint, auf der Mittelstufe die Huygensschen Formeln abzuleiten, die eine wesentlich bessere Konvergenz geben. Mit ihnen käme man schon für $n = 4$ auf den Wert $\pi = 3{,}\,1416$. Leider muss diese Frage verneint werden.

b) Der Rauminhalt der Pyramide.

Sehr viel weniger mühevoll als die Kreismessung ist die Berechnung des Volumens der Pyramide. Früher wurde diese Bestimmung nahezu ausschliesslich mittels des sogenannten „Cavalierischen Prinzips“ durchgeführt. In der älteren Form haftete der Anwendung dieses Prinzips insofern etwas Mystisches an, als der Eindruck erweckt werden konnte, durch „die Addition von unendlich vielen Flächenstücken entstehe ein Raumstück". Die Raummessung darf auf der Mittelstufe nur so vorgenommen werden, dass dieser Eindruck gar nicht entstehen kann.

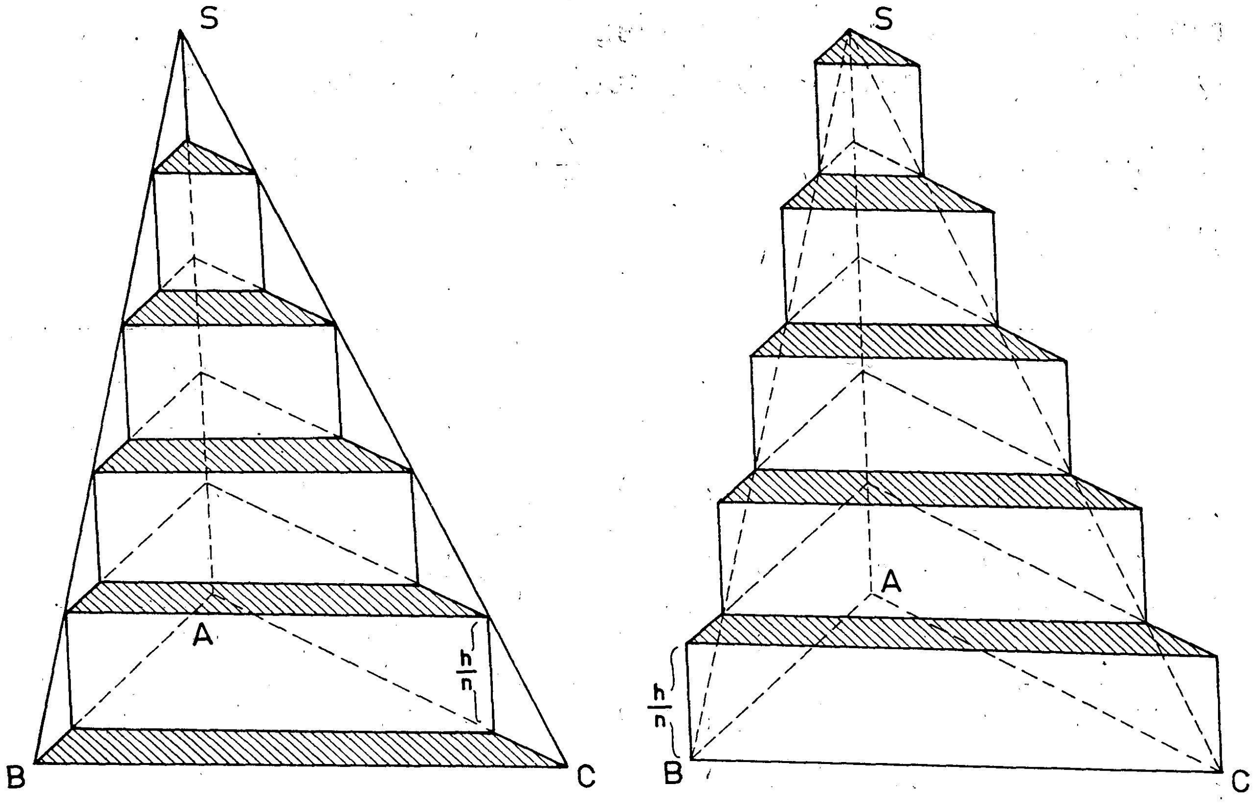

Abb. 4.

Ich möchte daher das Cavalierische Prinzip in diesem Sinn ganz aus der Schule verbannt wissen. Es ist zweckmässig, es durch strenge, doppelte Abschätzungen zu ersetzen, die wieder die Aufstellung einer Schachtelung erlauben.

Zunächst betrachte ich eine spezielle Sorte von Pyramiden, nämlich solche Pyramiden mit dreieckiger Basis, deren Spitze senkrecht über einer Ecke liegt. In Abbildung 4, liegt die Spitze S senkrecht über der Ecke A. Aus solchen, im engeren Sinne „senkrechten" Pyramiden kann jede Pyramide durch Addition oder Subtraktion zusammengesetzt werden.

1. Vorschlag. Die entsprechend Abb. 4 der Pyramide $S, A\,B\,C$ einbeschriebenen und umbeschriebenen Treppenkörper von gleicher Stufenhöhe $\frac{h}{n}$ haben solche Volumina, dass diese mit wachsender Anzahl n der Stufen eine Intervallschachtelung bilden. Diese Intervallschachtelung definiert eine Zahl V, und diese ist die Masszahl des Pyramidenvolumens.

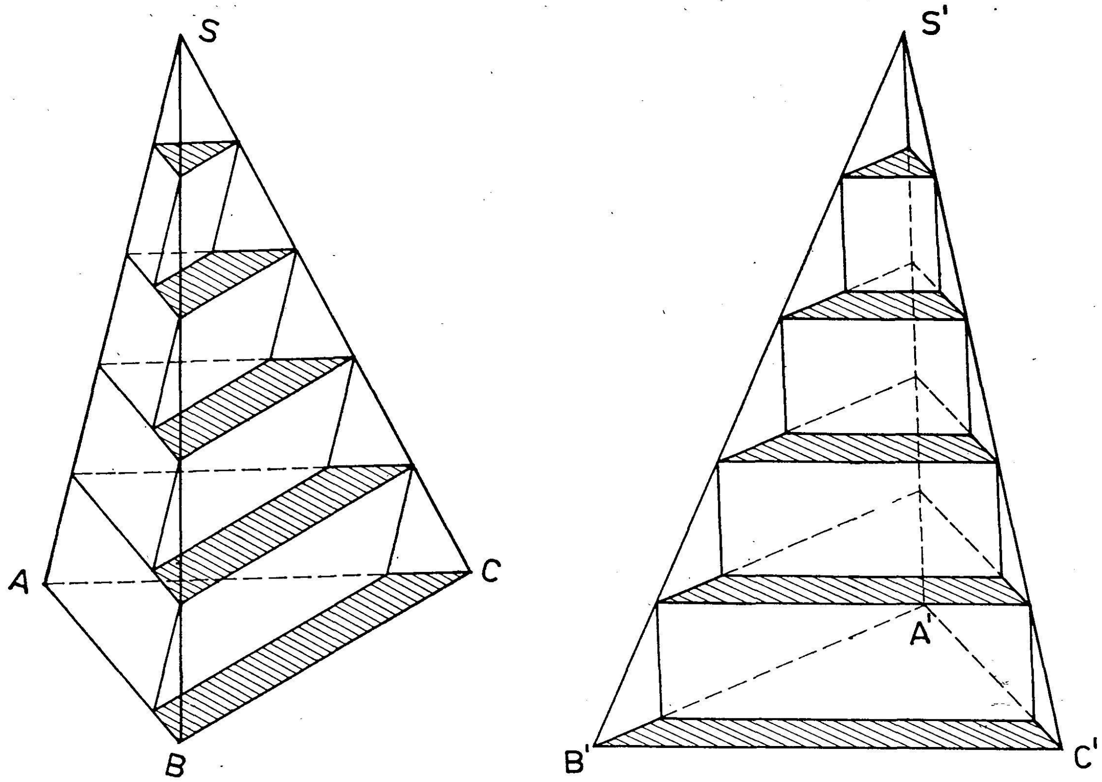

Abb. 5.

Sind wie in Abb. 5 zwei Pyramiden S, $A\ B\ C$ und S', $A'\ B'\ C'$ gegeben, so stimmen die Glieder der die Schachtelungen bei beiden Pyramiden definierenden Folgen überein; denn diese Glieder sind die Volumina von Treppenstufen mit gleichen Grundflächen und mit gleichen Höhen. Diese sind zwar gestaltlich verschieden, aber sie haben gleichen Rauminhalt. Die Folgen definieren bei beiden Pyramiden die gleiche Schachtelung: Beide Pyramiden sind inhaltsgleich.

Von der Inhaltsgleichheit der beiden Pyramiden mit gleich grossen Grundflächen und gleich grossen Höhen schliesst man in gewohnter Weise auf die Inhaltsgleichheit zweier allgemeiner Pyramiden mit gleich grossen Grundflächen und gleich grossen Höhen. Dann kommt man durch Zusammensetzung dreier raumgleicher, passender Pyramiden zum Spat und gewinnt die

Formel für den Pyramideninhalt: $V = \frac{1}{3} Gh$.

2. *Vorschlag:* Man entwickelt die Formel für die Summe der ersten n Quadratzahlen:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{3} n \left(n + \frac{1}{2}\right)(n+1).$$

Damit ist für den Unterricht der 15- oder 16- jährigen Schüler nicht zu viel gefordert.

Nach Abbildung 4 ist dann das Volumen t_n der der Pyramide $S, A\,B\,C$ einbeschriebenen Treppe von n gleich hohen Stufen die Summe der $(n - 1)$ Stufen, also die Summe von $(n - 1)$ geraden dreiseitigen Prismen von den Grundflächen $G_1, G_2, \ldots G_{n-1}$ und der Höhe $\frac{h}{n}$. Es ist also

$$t_n = (G_1 + G_2 + G_3 + G_{n-1})\frac{h}{n} = \left(G\frac{1^2}{n^2} + G\frac{2^2}{n^2} + \ldots + G\frac{(n-1)^2}{n^2}\right)\frac{h}{n}$$

$$= \frac{Gh}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2) = \frac{Gh}{3n^3} n \left(n - \frac{1}{2}\right)(n-1)$$

oder endlich:

$$t_n = \frac{1}{3} Gh \left(1 - \frac{1}{2n}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Ebenso findet man nun für das Volumen der umbeschriebenen n-stufigen Treppe den Wert:

$$T_n = \frac{1}{3} Gh \left(1 + \frac{1}{2n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Die Differenz der Volumina der umbeschriebenen und der einbeschriebenen Treppe wird durch die unterste Stufe dargestellt; d.h. es ist

$$T_n - t_n = Gh \cdot \frac{1}{n}.$$

Es ist nun leicht, den gemeinsamen Grenzwert der Zahlenfolgen T_n und t_n für $n \to \infty$ zu berechnen. Entsprechend dem vorbereitenden Charakter unserer Überlegung ziehe ich es vor, diesen Grenzübergang durch geeignete Teilfolgen sichtbar zu machen. Mit der Wahl $n = 10, 100, 1000, 10\,000, \ldots$ findet man folgende Übersicht:

n	t_n	T_n	$T_n - t_n$
10	$\frac{1}{3}\,\mathrm{G\,h} \cdot 0{,}855$	$\frac{1}{3}\,\mathrm{G\,h} \cdot 1{,}155$	$\frac{1}{3}\,\mathrm{G\,h} \cdot 0{,}3$
100	$\frac{1}{3}\,\mathrm{G\,h} \cdot 0{,}985\,05$	$\frac{1}{3}\,\mathrm{G\,h} \cdot 1{,}015\,05$	$\frac{1}{3}\,\mathrm{G\,h} \cdot 0{,}03$
1000	$\frac{1}{3}\,\mathrm{G\,h} \cdot 0{,}998\,500\,5$	$\frac{1}{3}\,\mathrm{G\,h} \cdot 1{,}001\,500\,5$	$\frac{1}{3}\,\mathrm{G\,h} \cdot 0{,}003$
10 000	$\frac{1}{3}\,\mathrm{G\,h} \cdot 0{,}999\,850\,005$	$\frac{1}{3}\,\mathrm{G\,h} \cdot 1{,}000\,150\,005$	$\frac{1}{3}\,\mathrm{G\,h} \cdot 0{,}0003$
⋮	⋮	⋮	⋮
	$\frac{1}{3}\,\mathrm{G\,h}$	$\frac{1}{3}\,\mathrm{G\,h}$	

c) Auch bei den weiteren Körpern, deren Volumen oder auch deren Oberfläche man im Unterricht der Mittelstufe zu berechnen pflegt, treten Grenzwertprobleme auf. Diese Körper sind z.B. Kegelstumpf, Kugel, Kugelabschnitt, Kugelschicht usw. Grundsätzlich treten jedoch hier keine neuen Gedanken auf.

4. *Schlussbetrachtung:* An mehreren Stellen des Unterrichts der Unterstufe und der Mittelstufe unserer Gymnasien drängt sich der Begriff des Grenzwerts gebieterisch in den Vordergrund. Meine Ausführungen wollen einen Beitrag geben zu dem Nachweis, dass sich Grenzwerte auch schon auf diesen frühen Stufen in einer dem kindlichen Alter angemessenen, jedoch sauberen Form behandeln lassen.

Es ist eine alte Erfahrung jeden mathematischen Unterrichts, dass auch der Durchschnittsschüler schwierigeren Problemen gewachsen ist, wenn ihm die Dinge nur richtig erklärt werden. Dagegen bedeutet es sicher eine unerlaubte Überforderung des

Schülers, wenn erwartet wird, dass er aus einer fehlerhaften Darstellung das richtige lernen soll. Dann muss der Schüler eine überdurchschnittliche Begabung besitzen, oder aber der Lehrer vermag es, nach Art des Rattenfängers von Hameln den Schüler zu überreden, das richtige zu glauben.

Mit meinem Referat will ich Vorschläge zu einer Gestaltung des Unterrichts zur Diskussion stellen, die es ermöglichen sollen, auch bei Schülern von durchschnittlicher Begabung höhere Anforderungen an die Strenge der Methoden zu stellen, ohne doch diese Schüler zu überfordern.

Ploenniesstr. 24
Lübeck.