

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 8 (1962)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** DIE VORBEREITUNG DES GRENZWERTBEGRIFFS IN DER UNTER-  
UND MITTELSTUFE DER GYMNASIEN  
**Autor:** Baur, A.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-37973>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 21.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# DIE VORBEREITUNG DES GRENZWERTBEGRIFFS IN DER UNTER- UND MITTELSTUFE DER GYMNASIEN <sup>1)</sup>

VON A. BAUR

## 1. GESCHICHTLICHE UND PÄDAGOGISCHE ENTWICKLUNG

Das Eindringen neuer Gedanken und neuer Stoffe in den Unterricht der deutschen Gymnasien beginnt mit der Analytischen Geometrie seit 1849 in Österreich und seit 1877 in Deutschland. Die Einführung des Funktionsbegriffs in den Unterricht der Gymnasien geht auf die Meraner Vorschläge von 1905 zurück. Von diesem Zeitpunkt an fließt die Quelle der inneren Reform des Mathematischen Unterrichts an den deutschen Gymnasien. Auch in den letzten Jahren zeigt sich die Bereitschaft der Lehrer, neue Methoden zu erproben und zur Diskussion zu stellen, in sehr starkem Masse. Dabei wird namentlich das Streben nach grösserer Strenge im Unterricht der Schulen deutlich.

Frühere Zeiten kannten in der Elementarmathematik auch schon das Streben nach Strenge. Als Beispiel nenne ich das Buch von Baltzer, *Elemente der Mathematik*, I 1860, II 1862. Dort ist die Kreismessung ganz sauber und streng mit Hilfe von doppelten Abschätzungen behandelt. Es bedarf nur geringer Änderungen der Bezeichnung und einer Ergänzung, um die Kreisfläche und den Kreisbogen mit Hilfe von Intervallschachtelungen ganz exakt zu messen.

Die Baltzersche Darstellung zeigt das Streben nach Strenge. Dieses Streben ist jedoch in der Folgezeit zurückgedrängt worden. Sehr deutlich zeigt sich diese Tendenz in dem damals weitverbreiteten Lehrbuch von Stegemann (seit 1862, später Stegemann — Kiepert, noch heute im Gebrauch). Die

---

<sup>1)</sup> Am 27. Juni 1961 als Vortrag beim Seminar der C.I.E.M. in Lausanne gehalten.

Einwirkung solcher Darstellungen blieb auf die Generation von Mathematiklehrern nicht ohne Einfluss, die als erste die Differentialrechnung in die Schule einführen sollten. Ich habe selbst eine sehr deutliche Erinnerung an meine Schulzeit, wo durch mystische Operationen, die vom Schüler ganz zweifellos gar nicht verstanden werden konnten, die richtigen Ergebnisse mehr oder weniger geschickt erschlichen wurden. Zwar lernte der Schüler durch Übung, wie der Kalkül anzuwenden sei; es blieb jedoch hinsichtlich der Grundlagen ein beträchtliches Unbehagen, mehr oder weniger stark ausgeprägte Ratlosigkeit oder sogar Verwirrung zurück.

Der heutige Unterricht darf diese Schwierigkeiten gar nicht erst aufkommen lassen. Das kann u.a. dadurch erreicht werden, dass man dem Begriff des Grenzwerts schon frühzeitig die nötige Aufmerksamkeit schenkt. Dabei begegnen sich die Forderung nach sachlicher Richtigkeit und der Wunsch nach Berücksichtigung psychologischer Erkenntnisse. Eine Möglichkeit in dieser Hinsicht besteht eben darin, dass man den Begriff des Grenzwerts schon auf früher Stufe in einer Form vorbereitet, die dem jeweiligen Alter angepasst erscheint.

In der deutschen Bundesrepublik unterscheidet man:

- |                            |                                    |
|----------------------------|------------------------------------|
| 1. Die Grundschule:        | 6- 9-jährige Schüler               |
| 2. Das Gymnasium, und zwar |                                    |
|                            | Unterstufe: 10-13-jährige Schüler  |
|                            | Mittelstufe: 14-16-jährige Schüler |
|                            | Oberstufe: 17-19-jährige Schüler   |

Ich will im folgenden im einzelnen Vorschläge machen, wie man den Begriff des Grenzwerts schon auf früher Stufe in den Unterricht einbeziehen kann.

## 2. GRENZWERTBETRACHTUNGEN AUF DER UNTERSTUFE

Das einzige Objekt, bei dem schon auf der Unterstufe Grenzwertbetrachtungen angestellt werden können, ist zugleich eines der wichtigsten; es handelt sich um die periodischen Dezimalbrüche.

### 2.1. Der periodische Dezimalbruch.

Die Behandlung muss sich auf das einzelne Zahlenbeispiel beschränken. Aus dem echten Bruch  $3/11$  ergibt sich der Reihe nach:

$$\begin{aligned} 3 : 11 &= 0, 27 + \frac{3}{11} \cdot \frac{1}{100} \\ &= 0, 27\,27 + \frac{3}{11} \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^2 \\ &= 0, 27\,27\,27 + \frac{3}{11} \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^3 \text{ usf. usf.} \end{aligned}$$

Hierfür schreibt man üblicherweise:

$x = 3 : 11 = 0, 27\,27\,27 \dots$ . Der Schüler muss nun lernen, dass die Zahl  $x = 0, 27\,27\,27 \dots$  eine Zahl bedeutet, die die folgenden Eigenschaften hat:

$$\begin{aligned} 0, 27 &< x < 0, 28 \\ 0, 27\,27 &< x < 0, 27\,28 \\ 0, 27\,27\,27 &< x < 0, 27\,27\,28 \text{ usf. usf.} \end{aligned}$$

Kurz, die Zahl  $x$  wird durch eine *Schachtelung* erklärt.

Das bedeutet eine *erste methodische Forderung*:

Schon bei den 12-jährigen Schülern soll das Kleinerzeichen und das Grösserzeichen eingeführt werden.

Die Erfahrung lehrt, dass das unbedenklich geschehen kann; irgendwelche Schwierigkeiten entstehen dabei nicht.

### 2.2. Das Problem der Addition periodischer Dezimalbrüche.

Die Brüche  $x = 0, 38\,38\,38 \dots$  und  $y = 0, 25\,25\,25 \dots$  sollen addiert werden. Aus den Schachtelungen:

$$\begin{array}{ll} 0, 38 < x < 0, 39 & 0, 25 < y < 0, 26 \\ 0, 38\,38 < x < 0, 38\,39 & 0, 25\,25 < y < 0, 25\,26 \\ 0, 38\,38\,38 < x < 0, 38\,38\,39 & 0, 25\,25\,25 < y < 0, 25\,25\,26 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$



$$\begin{array}{l}
\text{folgt:} \quad 0,38 + 0,25 < x+y < 0,39 + 0,26 \\
\quad 0,3838 + 0,2525 < x+y < 0,3839 + 0,2526 \\
\quad 0,383838 + 0,252525 < x+y < 0,383839 + 0,252526 \\
\quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\text{oder:} \quad 0,63 < x+y < 0,65 \\
\quad 0,6363 < x+y < 0,6365 \\
\quad 0,636363 < x+y < 0,636365 \\
\quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots
\end{array}$$

Ergebnis:  $0,383838 \dots + 0,252525 \dots = 0,636363 \dots$   
 Diese Durchführung der Addition zweier periodischer Dezimalbrüche bedeutet eine *zweite methodische Forderung* für den Unterricht der Unterstufe:

Das Rechnen mit Ungleichungen muss frühzeitig geübt werden.

### 2.3. Das Problem der Subtraktion zweier periodischer Dezimalbrüche.

Um z.B. die Zahl  $y = 0,252525 \dots$  von der Zahl  $x = 0,383838 \dots$  abzuziehen, muss man wieder mit den Schachtelungen, bzw. mit den Ungleichungen operieren. Jedoch ist die nun folgende Operation schon anspruchsvoller. Es handelt sich um die Ausführung des folgenden Schlusses:

$$\begin{array}{ll}
\text{Aus} & a < A \\
\text{und} & b < B \\
\text{folgt} & a - B < A - b.
\end{array}$$

Für einen 12-jährigen Schüler ist die Einsicht, die dieses Verfahren fordert, nicht einfach. Es wird aber *nicht zuviel* verlangt. Die Aufnahme dieses Schlussverfahrens in den Unterricht der 12-jährigen bedeutet die *dritte methodische Forderung*:

Die Behandlung der einfachsten Regeln für das Rechnen mit Ungleichungen soll rechtzeitig, d.h. aber frühzeitig erfolgen. Das ist nicht schwerer als z.B. die Ausrechnung der Differenz

$$\frac{6}{7} - \frac{2}{3} = \frac{6.3 - 7.2}{7.3} = \frac{4}{21}.$$

Die Durchführung der Rechnung sieht so aus:

$$\begin{array}{rclcl} 1. \text{ Schritt:} & 0,38 < x < 0,39 \\ & - 0,26 > y > 0,25 \end{array}$$

---


$$0,12 < x - y < 0,14$$

$$\begin{array}{rclcl} 2. \text{ Schritt:} & 0,3838 < x < 0,3839 \\ & 0,2526 > y > 0,2525 \end{array}$$

---


$$0,1312 < x - y < 0,1314$$

$$\begin{array}{rclcl} 3. \text{ Schritt:} & 0,383838 < x < 0,383839 \\ & 0,252526 > y > 0,252525 \end{array}$$

---


$$0,131312 < x - y < 0,131314 \text{ usf. usf.}$$

$$\text{Ergebnis: } 0,383838 \dots - 0,252525 \dots = 0,131313 \dots$$

#### 2.4. Umwandlung eines periodischen Dezimalbruchs in einen gemeinen Bruch.

Sofern auf den Gymnasien diese Umwandlung gelehrt wird, bedient man sich in der Regel des folgenden Verfahrens:

Aus  $x = 0,272727 \dots$  folgt  $100x = 27,272727 \dots$

Durch Subtraktion findet man:

$$99x = 27, \text{ also } x = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}.$$

Bei der Ausführung dieser Rechnung hat man aber unerlaubter Weise mit konvergenten Reihen gerechnet, und zwar hat man

1) eine unendliche Reihe mit 100 multipliziert,

2) zwei unendliche Reihen voneinander abgezogen.

Beide Prozesse sind unstreng durchgeführt. Sie können sauber behandelt werden:

$x = 0,27\,27\,27 \dots$  bedeutet die Schachtelung oder die Kette von Ungleichungen:

$$\begin{array}{rcl} 0,27 < x < 0,28 \\ 0,27\,27 < x < 0,27\,28 \\ 0,27\,27\,27 < x < 0,27\,27\,28 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Hieraus findet man:

$$\begin{array}{rcl} 27 < 100x < 28 \\ 27,27 < 100x < 27,28 \\ 27,27\,27 < 100x < 27,27\,28 \\ 27,27\,27\,27 < 100x < 27,27\,27\,28 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Durch geeignete Subtraktion gewinnt man eine Kette von Ungleichungen, die ihrerseits eine Schachtelung darstellen:

$$\begin{array}{rcl} 27,27 - 0,28 < 99x < 27,28 - 0,27 \\ 27,27\,27 - 0,27\,28 < 99x < 27,27\,28 - 0,27\,27 \\ 27,27\,27\,27 - 0,27\,27\,28 < 99x < 27,27\,27\,28 - 0,27\,27\,28 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

oder:

$$\begin{array}{rcl} 26,99 < 99x < 27,01 \\ 26,99\,99 < 99x < 27,00\,01 \\ 26,99\,99\,99 < 99x < 27,00\,00\,01 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

D.h.  $99x = 27$  oder  $x = 27 : 99 = 3 : 11$ .

## 2.5. Zusammenfassung.

Die anspruchsvolle Forderung, die periodischen Dezimalbrüche strenger als üblich auf der Unterstufe zu behandeln, lässt sich erfüllen. Die Behandlung erfordert die Einbeziehung der Zeichen  $<$  und  $>$  sowie der einfachsten Regeln des Rechnens mit Ungleichungen in den Unterricht der 12-jährigen Schüler.

Die Behandlung kommt darauf hinaus, dass man die nicht-abbrechenden periodischen Dezimalbrüche als Schachtelungen definiert.

Damit ist dann auch der nichtperiodische unendliche Dezimalbruch in die Nähe gerückt. Wird die Existenz der nichtperiodischen Dezimalbrüche vorausgesetzt, so ist in gewissem Umfang auch das Problem der reellen Zahl in Angriff genommen, und die Lösung dieses für die Schule sehr wichtigen Problems scheint angebahnt. Die Folgen sind schwerwiegend: Nun können auf der Mittelstufe die Irrationalitätsbeweise für Zahlen wie etwa  $\sqrt{2}$  oder  $\lg 3$  sauber durchgeführt werden.

Eine *vierte methodische Forderung* ist wichtig: Die Behandlung der einzelnen Grenzwerte kann und soll auch auf der Unterstufe sauber erfolgen. Numerische Berechnungen bilden die Grundlage. Die Behandlung soll sich auf *das einzelne Zahlenbeispiel* beschränken.

Die systematische Behandlung der Grenzwerte, insbesondere der Kalkül des Rechnens mit Grenzwerten soll der Oberstufe vorbehalten bleiben.

### 3. GRENZWERTBETRACHTUNGEN AUF DER MITTELSTUFE

#### 3.1. *Forderungen methodischer und psychologischer Art.*

Auch auf der Mittelstufe soll sich die Behandlung auf das einzelne Beispiel beschränken. Jedes Beispiel soll elementar, wenn möglich unter Zuhilfenahme anschaulicher Methoden, jedoch streng behandelt werden. Die systematische Behandlung kann nur vorbereitet werden; der Grenzwertkalkül gehört nicht auf die Mittelstufe.

Die Untersuchung vorkommender Funktionen auf Monotonie ist sehr wichtig; gerade die Monotonie hat noch durchaus anschaulichen Charakter.

Das Hilfsmittel der Intervallschachtelung ist anschaulicher Herkunft, führt jedoch über den Gebrauch der blossen Anschauung hinaus.

Es muss in der Mittelstufe angestrebt werden, dass der Schüler zwar von der Anschauung ausgeht, aber schliesslich erfährt, dass die Anschauung allein ein unvollkommenes Hilfsmittel ist.

## 3.2. Grenzwertprobleme aus dem Gebiet der Arithmetik.

3.2.1. Hier wird die Weiterführung der einfachsten Rechnungen mit Ungleichungen vorgeschlagen, ferner die Behandlung von Abschätzungen. Beides erfordert sehr wenig Zeit. Weiter ist der Monotoniecharakter von Funktionen wie etwa  $x^2$ ,  $x^3$ , ...  $x^{1/2}$ ,  $x^{p/q}$ ,  $10^x$ ,  $a^x$  ( $a > 0$ ) usf. nachzuweisen. Nun kann man die oben erwähnten Irrationalitätsbeweise behandeln, z.B.

- 1)  $\sqrt{2}$  ist keine rationale Zahl (indirekter Beweis).
- 2)  $\lg 3$  ist keine rationale Zahl (Aus  $\frac{p}{q} = \lg 3$  folgt  $10^p = 3^q$ . Die links stehende ganze Zahl ist nur durch 2 und durch 5, die rechts stehende ganze Zahl ist nur durch 3 teilbar).

3.2.2. Ein besonders wichtiges Beispiel zu unserem Thema bietet die numerische Berechnung der Quadratwurzeln. In den letzten Jahren ist hier methodisch viel gearbeitet worden. Es handelt sich stets um die Berechnung der ersten Schritte einer passenden Schachtelung. Da die Funktion  $y = x^{1/2}$  für positive Werte von  $x$  monoton wachsend ist, kann eine passende Schachtelung stets konstruiert werden.

Seit einiger Zeit ist in der Bundesrepublik das einst fast ausschliesslich verwendete Verfahren verpönt. Es handelt sich um die folgende Rechnung:

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{3,00\,00\,00\,00\,00\,\dots} = 1,7320\dots \\
 \underline{\phantom{3,00\,00\,00\,00\,00\,\dots} 1} \\
 2\,00 : 2\,7 \\
 \underline{\phantom{2\,00\,00\,00\,00\,00\,\dots} 1\,89} \\
 11\,00 : 34\,3 \\
 \underline{\phantom{11\,00\,00\,00\,00\,00\,\dots} 10\,29} \\
 71\,00 : 346\,2 \\
 \underline{\phantom{71\,00\,00\,00\,00\,00\,\dots} 69\,24} \\
 1\,76\,00\,00 \\
 \dots\dots\dots
 \end{array}$$

Dieses Verfahren ist nicht nur eine exakte Intervallschachtelung, sondern sogar eine solche Schachtelung, die bei jedem Schritt genau eine weitere Dezimale der gesuchten Entwicklung liefert. Sie ist bezüglich des Arbeitsaufwands und hinsichtlich der erreichten Genauigkeit optimal. Allerdings ist der genaue Beweis nicht einfach.

3.2.3. Sehr wichtig ist das Problem der Logarithmen. Der Schüler möchte an einigen Beispielen eine numerische Berechnung eines Logarithmus auf 4 (oder auch auf 5) Dezimalen durchgeführt haben. In den letzten Jahren sind auch hier verschiedene Vorschläge gemacht worden. Ich möchte die einfachste Methode empfehlen; sie gibt wieder ein Beispiel für die Berechnung einer Intervallschachtelung.

Die heute im Unterricht der deutschen Gymnasien in der Regel vorliegenden Verhältnisse fordern die Arbeit mit einer vierstelligen Tafel für das Zahlenrechnen. Die folgende Rechnung ist vollständig mit einer solchen vierstelligen Quadratzahlentafel durchgeführt worden. Man geht aus von  $3^8 = 6\,561 = 6,561 \cdot 10^3$ . Durch Weiterquadrieren mittels der Quadratzahlentafel ergibt sich für die vierziffrige Rechnung:

$$\begin{aligned} 3^{16} &= 4,304 \cdot 10^7 \\ 3^{32} &= 1,853 \cdot 10^{15} \\ 3^{64} &= 3,434 \cdot 10^{30} \\ 3^{128} &= 1,179 \cdot 10^{61} \\ 3^{256} &= 1,390 \cdot 10^{122} \\ 3^{512} &= 1,932 \cdot 10^{244} \\ 3^{1\,024} &= 3,733 \cdot 10^{488} \\ 3^{2\,048} &= 1,393 \cdot 10^{977} \\ 3^{4\,096} &= 1,940 \cdot 10^{1\,954} \\ 3^{8\,192} &= 3,764 \cdot 10^{3\,908} \\ 3^{16\,384} &= 1,417 \cdot 10^{7\,817} \end{aligned}$$

Die Ausgangszeile liefert wegen der Monotonie der Funktion  $10^x$  die doppelte Ungleichung:  $10^3 < 3^8 < 10^4$  oder  $10^3 < 10^{8 \lg 3} < 10^x$  also:  $3/8 < \lg 3 < 4/8$  oder  $0,3750 < \lg 3 < 0,5000$ . Man findet entsprechend eine fortlaufende Kette von Ungleichungen, die eine Schachtelung ergeben. Auf diese Weise findet man:

$$\begin{aligned}
0,375\,0 &< \lg 3 < 0,500\,0 \\
0,437\,5 &< \lg 3 < 0,500\,0 \\
0,468\,8 &< \lg 3 < 0,500\,0 \\
0,468\,8 &< \lg 3 < 0,484\,4 \\
0,476\,6 &< \lg 3 < 0,484\,4 \\
0,476\,6 &< \lg 3 < 0,480\,5 \\
0,476\,6 &< \lg 3 < 0,478\,5 \\
0,476\,6 &< \lg 3 < 0,477\,5 \\
0,477\,05 &< \lg 3 < 0,477\,54 \\
0,477\,05 &< \lg 3 < 0,477\,30 \\
0,477\,05 &< \lg 3 < 0,477\,17 \\
0,477\,12 &< \lg 3 < 0,477\,17
\end{aligned}$$

Damit findet man den Wert des  $\lg 3$  auf vier Dezimalen. Mit Benutzung der vierstelligen Quadratzahlentafel nimmt das Verfahren nicht viel Zeit in Anspruch.

### 3.3 Grenzwertprobleme aus dem Gebiet der Geometrie.

a) Das wichtigste Problem der Flächen- und der Längenmessung bietet sich beim Kreis. In der Tat ist die Berechnung der Zahl  $\pi$  sachlich wie kulturgeschichtlich von eminenter Bedeutung. Vielfach wird in der Bundesrepublik die Archimedische Methode, die sich auf die Berechnung von regelmässigen Vierecken stützt, ganz aufgegeben. Ich kann dem nur teilweise zustimmen. Die numerische Berechnung der Zahl  $\pi$  ist nach Archimedes in der Tat höchst unvollkommen. Bei Benutzung der vierstelligen Quadrat- und Wurzeltafel findet man für das 24- Eck:

$$\begin{aligned}
i_{24} &= 3,105\,8\,r^2 < F < J_{24} = 3,159\,7\,r^2 \text{ und} \\
u_{24} &= 3,132\,6 \cdot 2r < u < U_{24} = 3,159\,7 \cdot 2r.
\end{aligned}$$

Damit ist die Zahl  $\pi$  nur auf eine Stelle nach dem Komma ermittelt. Dieses Ergebnis der praktischen Mathematik ist aber tatsächlich im Verhältnis zu dem sehr hohen Aufwand an theoretischer Arbeit sehr wenig befriedigend. Dagegen gewährt das Archimedische Verfahren bedeutende theoretische Vorzüge:

1. Sowohl für die Flächen, wie für die Umfänge ergeben sich die Bedingungen der Intervallschachtelung auf anschaulicher Basis aus der Figur. Es seien  $i_n$ ,  $J_n$ ,  $u_n$ ,  $U_n$ ,  $s_n$ ,  $S_n$  die Masszahlen der Flächen, der Umfänge und der Seiten des ein- bzw. des umbeschriebenen regulären Vielecks mit  $n$  Ecken, und es sei ferner  $\rho_n$  der Radius des dem  $n$ -Eck einbeschriebenen Kreises, also der Abstand der Seite des  $n$ -Ecks vom Kreismittelpunkt. Dann ist

$$i_n < i_{2n} < i_{4n} < i_{8n} < \dots < J_{8n} < J_{4n} < J_{2n} < J_n \text{ und}$$

$$u_n < u_{2n} < u_{4n} < u_{8n} < \dots < U_{8n} < U_{4n} < U_{2n} < U_n.$$

Die einbeschriebenen und die umbeschriebenen  $n$ -Ecke geben also zunächst für die Masszahlen der Flächen auf- bzw. absteigende Zahlenfolgen. Diese bilden eine Schachtelung, wenn die Differenzen  $J_n - i_n$  eine Nullfolge bilden.

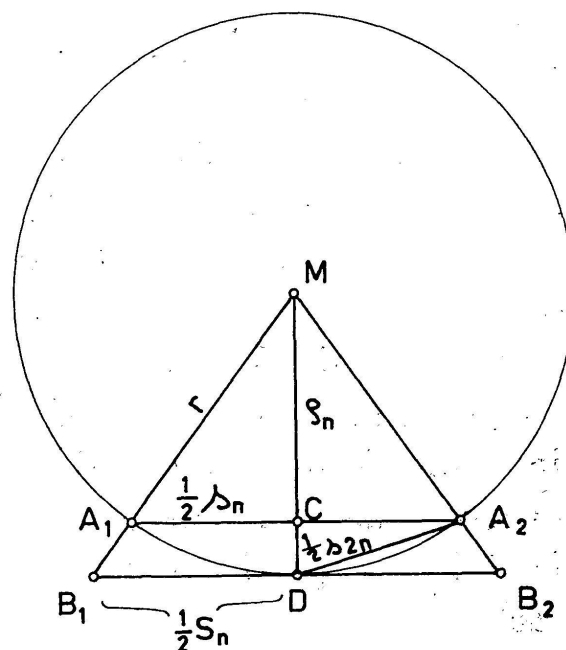


Abb. 1.

Aus Abb. 1 ergibt sich:

$$\frac{s_n^2}{4} + \rho_n^2 = r^2, \quad \frac{s_{2n}^2}{4} + \rho_{2n}^2 = r^2 \text{ und } s_{2n}^2 = \frac{1}{4} s_n^2 + (r - \rho_n)^2.$$

Durch Elimination der Grössen  $s_n$  und  $s_{2n}$  findet man die Be-

$$\text{ziehung } r^2 - \rho_{2n}^2 = \frac{r}{2}(r - \rho_n) \text{ oder } r - \rho_{2n} = \frac{r}{2(r + \rho_{2n})}(r - \rho_n).$$



Hieraus gewinnt man leicht die Abschätzung

$$r - \rho_{2n} < \frac{1}{2}(r - \rho_n).$$

Für  $n > 4$  ist  $\rho_n > \frac{r}{2}$ , d. h.  $r - \rho_n < \frac{r}{2}$ , somit

$$r - \rho_{2n} < \frac{r}{4},$$

$$r - \rho_{4n} < \frac{r}{8}, \quad \text{usf.}$$

Die Strecken  $r - \rho_n$  bilden also mit wachsendem  $n$  eine Nullfolge.

$$\text{Nun ist } U_n - u_n = nS_n - ns_n = \frac{nS_n}{r}(r - \rho_n) = \frac{U_n}{r}(r - \rho_n).$$

Für  $n > 4$  ist  $U_n < U_4 = 8r$ , also

$$U_n - u_n < 8(r - \rho_n).$$

$$\text{Weiter ist } J_n - i_n = \frac{n}{2} S_n r - \frac{n}{2} s_n = \frac{nS_n}{2r}(r^2 - \rho_n^2) = \frac{U_n}{2r}(r^2 - \rho_n^2),$$

$$\text{also } J_n - i_n < \frac{U_n}{2r}(r + \rho_n) \cdot (r - \rho_n) < \frac{U_4 \cdot 2r}{2r}(r - \rho_n) < 8r(r - \rho_n).$$

Damit ist nachgewiesen, dass die Folgen der Masszahlen der Flächen der ein- und der umbeschriebenen regulären  $n$ -Ecke eine Intervallschachtelung bilden; dasselbe ist für die Masszahlen der Umfänge der Fall. Diese Schachtelungen definieren den Kreisinhalt bzw. den Kreisumfang.

2. Das Archimedische Verfahren hat eine ausserordentliche Bedeutung hinsichtlich der Kulturgeschichte der Menschheit.

3. Mittels des Archimedischen Verfahrens kommt man zu dem Zusammenhang der Masszahlen von Fläche und Bogen.

4. Man kann sogar die Unabhängigkeit des Ergebnisses der Intervallschachtelungen vom Ausgangsvieleck nachweisen. Dieser Punkt ist jedoch schon sehr subtil; im allgemeinen hat der Schüler der Mittelstufe kein Bedürfnis für diesen Nachweis.

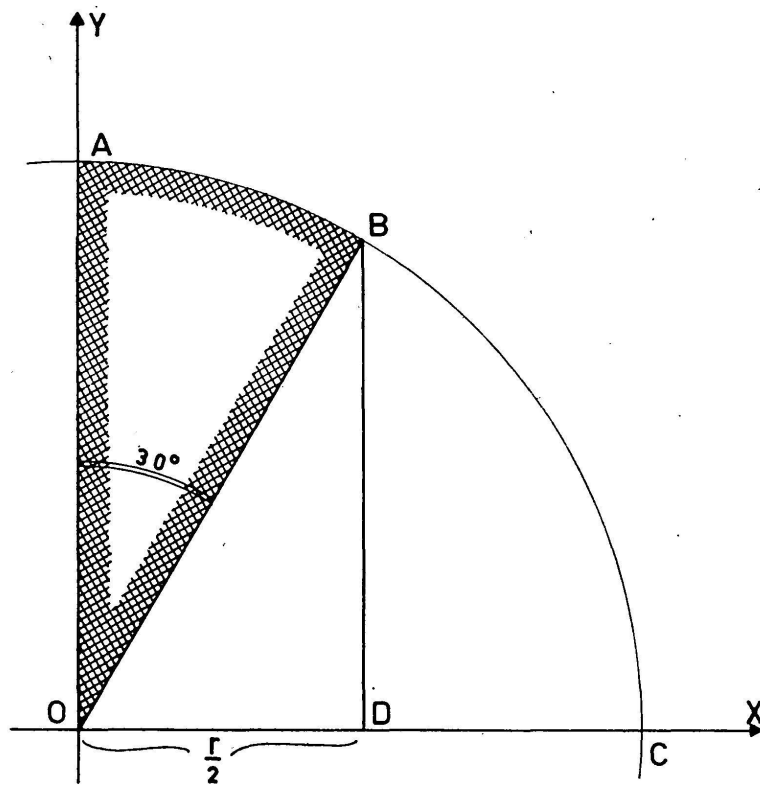


Abb. 2.

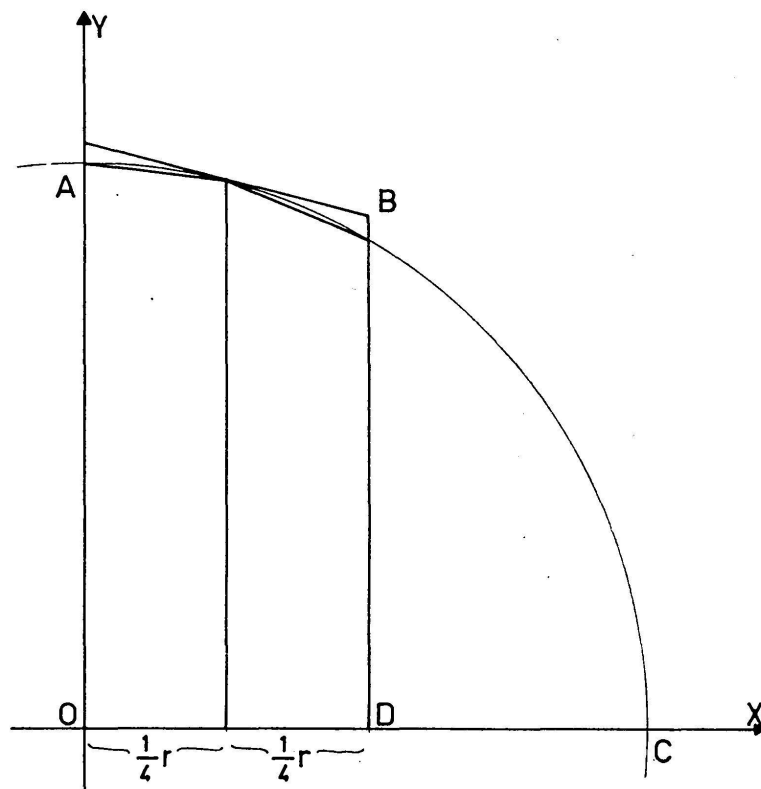


Abb. 3.

Die numerisch genauere Berechnung der Zahl  $\pi$  erfolgt am besten mittels der sogenannten Trapezmethode (Abb. 2, 3). Mittels der einfachsten Verfahren der numerischen Integration,

d.h. mittels der Sehnen- bzw. der Tangententrapeze wird das Integral

$$F = \int_0^{r/2} \sqrt{r^2 - x^2} \cdot dx$$

numerisch berechnet. Dann wird  $\pi r^2 = 12 F - 2,5981 r^2$ .

In der folgenden Tafel sind die Ergebnisse zusammengestellt, die man erhält, wenn man wieder (entsprechend den in der Bundesrepublik in der Regel vorliegenden Verhältnissen) die vierstellige Quadrattafel benutzt. Dabei bedeutet  $n$  die Anzahl der Flächenstreifen über dem Intervall  $\left(0 \dots \frac{r}{2}\right)$ . Abbildung 3 zeigt den Fall  $n = 2$ .

$n$	$i_n$	$J_n$	$F_n = J_n - i_n$	$F_n$ in %
2	3,1057 $r^2$	3,2114 $r^2$	0,1057 $r^2$	3,36%
4	3,1326 $r^2$	3,1595 $r^2$	0,0269 $r^2$	0,86%
8	3,1393 $r^2$	3,1461 $r^2$	0,0068 $r^2$	0,22%
16	3,1410 $r^2$	3,1427 $r^2$	0,0017 $r^2$	0,054%

Die mit der Aufstellung dieser Tafel verbundene rechnerische Mühe ist im Verhältnis zu der erreichten zahlenmässigen Genauigkeit immerhin noch tragbar. Es erhebt sich die Frage, ob es nicht möglich erscheint, auf der Mittelstufe die Huygensschen Formeln abzuleiten, die eine wesentlich bessere Konvergenz geben. Mit ihnen käme man schon für  $n = 4$  auf den Wert  $\pi = 3,1416$ . Leider muss diese Frage verneint werden.

#### b) Der Rauminhalt der Pyramide.

Sehr viel weniger mühevoll als die Kreismessung ist die Berechnung des Volumens der Pyramide. Früher wurde diese Bestimmung nahezu ausschliesslich mittels des sogenannten „Cavalierischen Prinzips“ durchgeführt. In der älteren Form

haftete der Anwendung dieses Prinzips insofern etwas Mystisches an, als der Eindruck erweckt werden konnte, durch „die Addition von unendlich vielen Flächenstücken entstehe ein Raumstück“. Die Raummessung darf auf der Mittelstufe nur so vorgenommen werden, dass dieser Eindruck gar nicht entstehen kann.

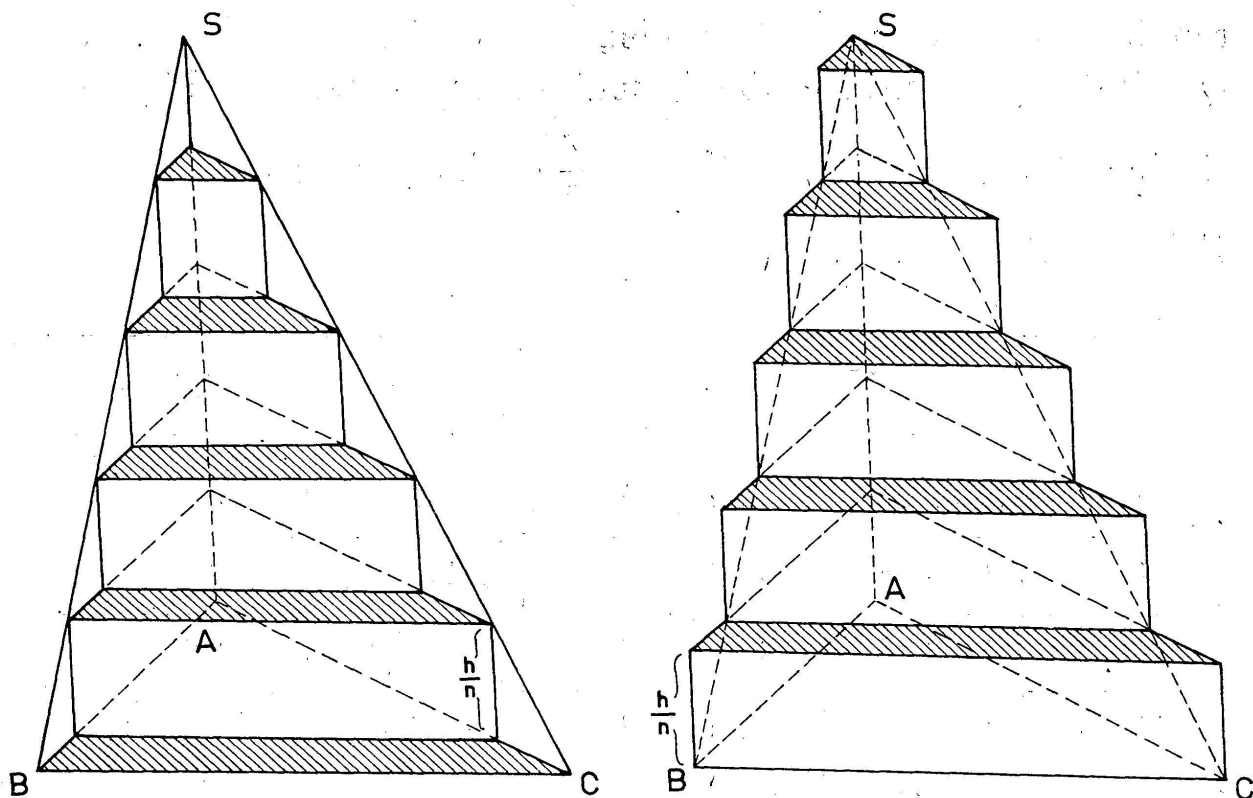


Abb. 4.

Ich möchte daher das Cavalierische Prinzip in diesem Sinn ganz aus der Schule verbannt wissen. Es ist zweckmässig, es durch strenge, doppelte Abschätzungen zu ersetzen, die wieder die Aufstellung einer Schachtelung erlauben.

Zunächst betrachte ich eine spezielle Sorte von Pyramiden, nämlich solche Pyramiden mit dreieckiger Basis, deren Spitze senkrecht über einer Ecke liegt. In Abbildung 4, liegt die Spitze  $S$  senkrecht über der Ecke  $A$ . Aus solchen, im engeren Sinne „senkrechten“ Pyramiden kann jede Pyramide durch Addition oder Subtraktion zusammengesetzt werden.

1. *Vorschlag.* Die entsprechend Abb. 4 der Pyramide  $S, A B C$  einbeschriebenen und umbeschriebenen Treppenkörper von

gleicher Stufenhöhe  $\frac{h}{n}$  haben solche Volumina, dass diese mit wachsender Anzahl  $n$  der Stufen eine Intervallschachtelung bilden. Diese Intervallschachtelung definiert eine Zahl  $V$ , und diese ist die Masszahl des Pyramidenvolumens.

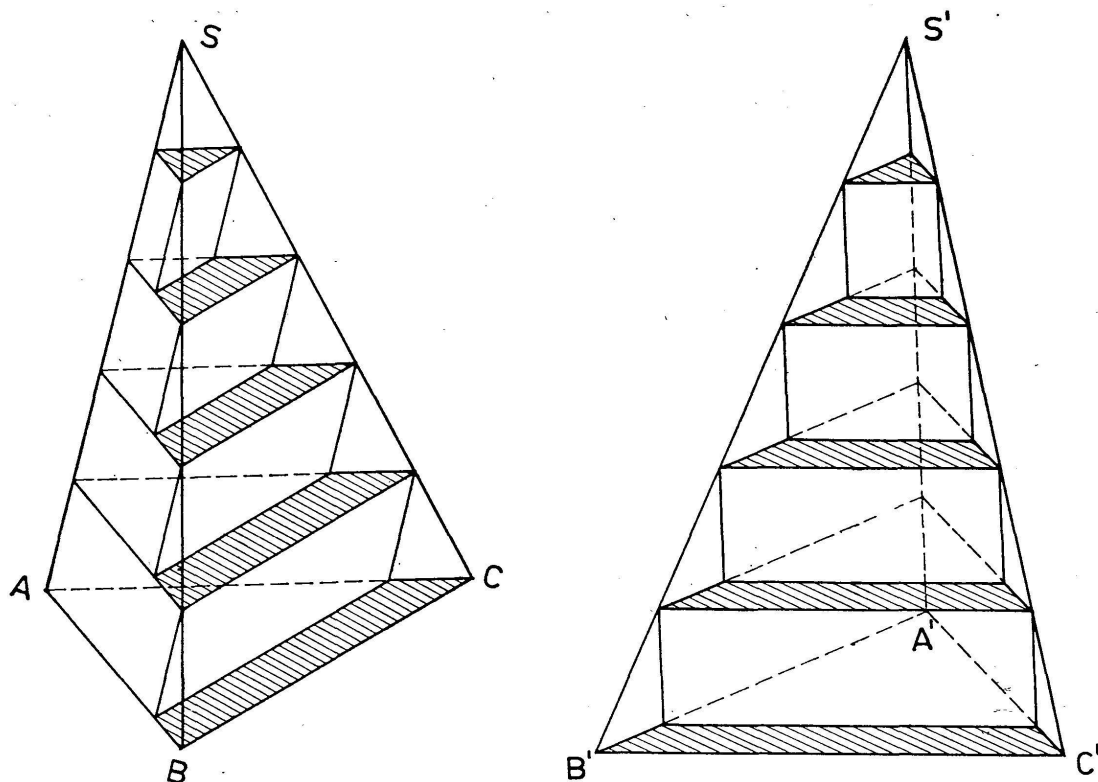


Abb. 5.

Sind wie in Abb. 5 zwei Pyramiden  $S, A B C$  und  $S', A' B' C'$  gegeben, so stimmen die Glieder der die Schachtelungen bei beiden Pyramiden definierenden Folgen überein; denn diese Glieder sind die Volumina von Treppenstufen mit gleichen Grundflächen und mit gleichen Höhen. Diese sind zwar gestaltlich verschieden, aber sie haben gleichen Rauminhalt. Die Folgen definieren bei beiden Pyramiden die gleiche Schachtelung: Beide Pyramiden sind inhaltsgleich.

Von der Inhaltsgleichheit der beiden Pyramiden mit gleich grossen Grundflächen und gleich grossen Höhen schliesst man in gewohnter Weise auf die Inhaltsgleichheit zweier allgemeiner Pyramiden mit gleich grossen Grundflächen und gleich grossen Höhen. Dann kommt man durch Zusammensetzung dreier raumgleicher, passender Pyramiden zum Spat und gewinnt die

Formel für den Pyramideninhalt:  $V = \frac{1}{3} Gh$ .

2. *Vorschlag*: Man entwickelt die Formel für die Summe der ersten  $n$  Quadratzahlen:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{3} n \left( n + \frac{1}{2} \right) (n + 1).$$

Damit ist für den Unterricht der 15- oder 16-jährigen Schüler nicht zu viel gefordert.

Nach Abbildung 4 ist dann das Volumen  $t_n$  der der Pyramide  $S, A B C$  einbeschriebenen Treppe von  $n$  gleich hohen Stufen die Summe der  $(n - 1)$  Stufen, also die Summe von  $(n - 1)$  geraden dreiseitigen Prismen von den Grundflächen  $G_1, G_2, \dots, G_{n-1}$  und der Höhe  $\frac{h}{n}$ . Es ist also

$$\begin{aligned} t_n &= (G_1 + G_2 + G_3 + \dots + G_{n-1}) \frac{h}{n} = \left( G \frac{1^2}{n^2} + G \frac{2^2}{n^2} + \dots + G \frac{(n-1)^2}{n^2} \right) \frac{h}{n} \\ &= \frac{Gh}{n^3} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2) = \frac{Gh}{3n^3} n \left( n - \frac{1}{2} \right) (n - 1) \end{aligned}$$

oder endlich:

$$t_n = \frac{1}{3} Gh \left( 1 - \frac{1}{2n} \right) \left( 1 - \frac{1}{n} \right).$$

Ebenso findet man nun für das Volumen der umbeschriebenen  $n$ -stufigen Treppe den Wert:

$$T_n = \frac{1}{3} Gh \left( 1 + \frac{1}{2n} \right) \left( 1 + \frac{1}{n} \right).$$

Die Differenz der Volumina der umbeschriebenen und der einbeschriebenen Treppe wird durch die unterste Stufe dargestellt; d.h. es ist

$$T_n - t_n = Gh \cdot \frac{1}{n}.$$

Es ist nun leicht, den gemeinsamen Grenzwert der Zahlenfolgen  $T_n$  und  $t_n$  für  $n \rightarrow \infty$  zu berechnen. Entsprechend dem vor-

bereitenden Charakter unserer Überlegung ziehe ich es vor, diesen Grenzübergang durch geeignete Teilfolgen sichtbar zu machen. Mit der Wahl  $n = 10, 100, 1000, 10\ 000, \dots$  findet man folgende Übersicht:

$n$	$t_n$	$T_n$	$T_n - t_n$
10	$\frac{1}{3} G h \cdot 0,855$	$\frac{1}{3} G h \cdot 1,155$	$\frac{1}{3} G h \cdot 0,3$
100	$\frac{1}{3} G h \cdot 0,985\ 05$	$\frac{1}{3} G h \cdot 1,015\ 05$	$\frac{1}{3} G h \cdot 0,03$
1000	$\frac{1}{3} G h \cdot 0,998\ 500\ 5$	$\frac{1}{3} G h \cdot 1,001\ 500\ 5$	$\frac{1}{3} G h \cdot 0,003$
10 000	$\frac{1}{3} G h \cdot 0,999\ 850\ 005$	$\frac{1}{3} G h \cdot 1,000\ 150\ 005$	$\frac{1}{3} G h \cdot 0,0003$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
	$\frac{1}{3} G h$	$\frac{1}{3} G h$	

c) Auch bei den weiteren Körpern, deren Volumen oder auch deren Oberfläche man im Unterricht der Mittelstufe zu berechnen pflegt, treten Grenzwertprobleme auf. Diese Körper sind z.B. Kegelstumpf, Kugel, Kugelabschnitt, Kugelschicht usw. Grundsätzlich treten jedoch hier keine neuen Gedanken auf.

4. *Schlussbetrachtung*: An mehreren Stellen des Unterrichts der Unterstufe und der Mittelstufe unserer Gymnasien drängt sich der Begriff des Grenzwerts gebieterisch in den Vordergrund. Meine Ausführungen wollen einen Beitrag geben zu dem Nachweis, dass sich Grenzwerte auch schon auf diesen frühen Stufen in einer dem kindlichen Alter angemessenen, jedoch sauberen Form behandeln lassen.

Es ist eine alte Erfahrung jeden mathematischen Unterrichts, dass auch der Durchschnittsschüler schwierigeren Problemen gewachsen ist, wenn ihm die Dinge nur richtig erklärt werden. Dagegen bedeutet es sicher eine unerlaubte Überforderung des

Schülers, wenn erwartet wird, dass er aus einer fehlerhaften Darstellung das richtige lernen soll. Dann muss der Schüler eine überdurchschnittliche Begabung besitzen, oder aber der Lehrer vermag es, nach Art des Rattenfängers von Hameln den Schüler zu überreden, das richtige zu glauben.

Mit meinem Referat will ich Vorschläge zu einer Gestaltung des Unterrichts zur Diskussion stellen, die es ermöglichen sollen, auch bei Schülern von durchschnittlicher Begabung höhere Anforderungen an die Strenge der Methoden zu stellen, ohne doch diese Schüler zu überfordern.

Ploenniesstr. 24  
Lübeck.