Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 8 (1962)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: DIE EINFÜHRUNG DES STETIGKEITS- UND GRENZWERTBEGRIFFS IN DER SCHULE.

Autor: Pickert, Gunter

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-37971

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 22.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

DIE EINFÜHRUNG DES STETIGKEITS- UND GRENZWERTBEGRIFFS IN DER SCHULE [1])

von Günter PICKERT

Zuerst möchte ich ein Verfahren auf seine Vor- und Nachteile hin untersuchen, das vielfach der Einführung des Grenzwertbegriffs in der Schule zugrunde liegt. Zur Beschreibung dieses Verfahrens benutze ich im folgenden nicht die der jeweiligen Unterrichtsstufe angepassten Formulierungen sondern die nach wissenschaftlichen Gesichtspunkten zweckmässigen; die Zeichen $\wedge$, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$ stehen für « alle », « es gibt », « und », « wenn ..., so ».

Man definiert als erstes den Grenzwert $g = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ einer Folge $(a_n)_{n\in N}$ (d.h. einer Abbildung der Menge N der natürlichen Zahlen in die Menge der reellen Zahlen) durch die Aussage

$$\wedge_{\varepsilon>0} \vee_{n_0\in N} \wedge_{n\in N} n > n_0 \Rightarrow |g - a_n| < \varepsilon . \qquad (1)$$

Der Grenzwert $g = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ der Funktion f an der Stelle a (die Häufungspunkt des Definitionsbereiches D_f von f sein, d.h. in der abgeschlossenen Hülle $\overline{D_f - \{a\}}$ von $D_f - \{a\}$ liegen muss) wird erst unter Rückgriff auf den Folgengrenzwert definiert durch

$$\wedge_{(x_n)_{n\in N}} (a = \lim_{n\to\infty} x_n \wedge \wedge_{n\in N} a \neq x_n \in D_f) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g . \qquad (2)$$

Mit Hilfe dieses Grenzwertbegriffes lässt sich dann die Stetigkeit der Funktion f an der Stelle $a \in D_f$ definieren durch

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) , \qquad (3)$$

[1]) Am 27. Juni 1961 als Vortrag beim Seminar der C.I.E.M. in Lausanne gehalten.

wobei in dieser Gleichung die Existenz des Grenzwertes, also insbesondere auch $a \in \overline{D_f - \{a\}}$ eingeschlossen sein soll.

Dieses Verfahren hat gewisse Vorteile:

(A) Von den Dezimalbrüchen und Näherungsberechnungen her kommt man zwangsläufig zuerst zum Folgengrenzwertbegriff.

(B) Die Implikation in (2) geht « von x zu $f(x)$ », also « gleichsinnig » mit der Abbildung f, und dies wird nicht durch eine « gegenläufige » Quantorenreihenfolge « gestört » (wie in (1), wo sich der erste Quantor auf die Abschätzung der Folgenglieder, der zweite dagegen auf die der Folgenindizes bezieht).

(C) Für (2) bietet sich die kinematisch interpretierbare Formulierung an « Wenn x gegen a strebt, so strebt $f(x)$ gegen g ».

Diesen Vorteilen gegenüber scheinen mir aber die Nachteile zu überwiegen:

(D) Die Definition durch (2) ist logisch zu kompliziert, einmal wegen der Quantifizierung über alle Folgen, zum zweiten durch eine Häufung von Quantoren, was man erst deutlich sieht, wenn man die Folgengrenzwertaussagen in (2) gemäss (1) durch ihre expliziten Bedeutungen ersetzt. Diese Kompliziertheit ist unnötig, da es bekanntlich die zu (1) völlig analoge, mit (2) gleichwertige Formulierung (6) gibt.

(E) Die Formulierung (2) verführt erfahrungsgemäss den Lernenden dazu, den Nachweis von $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = g$ für nur eine einzige Folge $(x_n)_{n \in N}$ (mit den in (2) genannten Eigenschaften) bereits für ausreichend zu halten.

(F) Der anschaulich so naheliegende Stetigkeitsbegriff erscheint auf diese Weise erst als Schlussglied einer Reihe von garnicht einfachen Begriffsbildungen, weshalb wohl vielfach auf seine exakte Formulierung verzichtet wird.

(G) Der in (C) genannte Vorteil ist nur ein scheinbarer und im Grunde sogar ein Nachteil, weil dadurch die mathematische Variable x (Leerstelle!) mit einer variablen Grösse der Kinematik, d.i. mit einer auf einem Zeitintervall definierten Funktion φ, verwechselt wird; mit x als Leerstelle hat nämlich « x strebt

gegen a » gar keine Bedeutung. Die in (C) erwähnte Formulierung lässt sich exakt wohl nur so interpretieren: Wenn $\lim_{t \to t_0} \varphi(t) = a$ (und $\wedge_{t \in D\varphi}\, a \neq \varphi(t) \in D_f$), so $\lim_{t \to t_0} f(\varphi(t)) = g$. Das kann aber nicht zur Definition des Grenzwertes g benutzt werden, da der Grenzwertbegriff selber hierin vorkommt.

(H) Die psychologische Problematik, mit der die Ausdrucksweise « n strebt gegen ∞ » verknüpft ist, belastet unnötigerweise von vornherein die Grenzwertdefinition.

Alle die Nachteile (D-H) werden nun m.E. vermieden, wenn man zuerst die Stetigkeit einer Funktion f an der Stelle a erklärt, dann den Grenzwert an der Stelle a als denjenigen Zahlenwert definiert, den man als neuen Funktionswert an der Stelle a nehmen muss, damit die so abgeänderte Funktion bei a stetig wird, und schliesslich den Grenzwertbegriff sinngemäss auf die Stelle ∞ überträgt, womit auch der Grenzwertbegriff für Folgen eingeführt ist. Ich denke dabei an die Behandlung dieser Begriffe in den letzten zwei oder drei Jahren der höheren Schule, muss aber natürlich das Urteil darüber, in welchem Masse sich das Folgende für die Behandlung im Schulunterricht wirklich eignet, den mit der Praxis dieses Unterrichts Vertrauten überlassen.

Zur Stetigkeitsdefinition wird man zwangsläufig geführt, wenn man daran denkt, dass bei physikalischen oder technischen Anwendungen die Argumentwerte stets nur näherungsweise bekannt sind, andererseits aber an die Funktionswerte aus der Aufgabenstellung heraus oft gewisse Genauigkeitsforderungen gestellt werden. Es erscheint daher sinnvoll, von der Funktion f zu verlangen, dass der Funktionswert $f(a)$ mit vorgeschriebener Genauigkeit, d.h. bis auf einen Fehler von einem Betrag kleiner als eine vorgegebene Zahl ε (> 0) berechnet werden kann, sobald nur der Argumentwert a mit hinreichender Genauigkeit, d.h. bis auf einen Fehler von einem Betrag kleiner als eine geeignet (in Abhängigkeit von ε) zu wählende Zahl δ (> 0) bekannt ist. In mathematischer Formelsprache geschrieben wird das zu

$$\wedge_{\varepsilon > 0} \vee_{\delta > 0} \wedge_{x \in D_f} |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon . \qquad (4)$$

Vermutlich wird dem Schüler diese Eigenschaft von den Anwendungen her als ganz selbstverständlich vorkommen, so dass man erst an einfachen Gegenbeispielen (etwa $f(x) = 0$ für $x \leqq 0, f(x) = 1$ für $x > 0$) zeigen muss, dass (4) auch falsch sein kann. (4) wird nun als Stetigkeit von f an der Stelle a bezeichnet. Bei dieser Einführung wird die viel beklagte und vom Lernenden so oft vergessene « Gegenläufigkeit » der Quantorenreihenfolge in (4) (der erste Quantor bezieht sich auf die Funktionswertabschätzung, der zweite auf die der Argumentwerte) von der Anwendung her verständlich gemacht: Benötigt wird mit vorgeschriebener Genauigkeit der Funktionswert, was durch geeignete Genauigkeit des Argumentwertes erreicht wird. Dadurch scheint mir der Vorteil (B) des zuerst geschilderten Verfahrens etwas an Wert zu verlieren. Man beachte auch, dass sich (4) mit Vorteil in der graphischen Darstellung von f veranschaulichen lässt während man das von (3) nicht sagen kann.

Zweckmässig dürfte es auch im Schulunterricht sein, bei der Stetigkeitsdefinition den Umgebungsbegriff zu verwenden: Jede Menge $\{x; |x-a| < \delta\}$ mit einer Zahl $\delta > 0$ wird als Umgebung von a bezeichnet. (4) lässt sich dann so aussprechen: Zu jeder Umgebung von $f(a)$ gibt es eine Umgebung von a, die durch f in die Umgebung von $f(a)$ abgebildet wird. Damit hat man den letzten der drei Quantoren in (4) "versteckt" und zwar mittels einer mengentheoretischen Redeweise. Für den Schulunterricht wohl noch nicht brauchbar scheint mir die folgende Fortsetzung dieser « Quantorenbeseitigung ». Man bezeichnet auch jede Obermenge einer Menge $\{x; |x-a| < \delta\}$ (mit $\delta > 0$) als Umgebung von a und kann dann (4) mit nur einem Quantor so aussprechen: Das Urbild (bei f) jeder Umgebung von $f(a)$ ist eine Umgebung von a. Auch dieser eine Quantor kann noch "versteckt" werden, wenn man die Menge der Umgebungen einer Stelle als deren Umgebungsfilter bezeichnet; (4) lautet jetzt: Das Urbild (bei f) des Umgebungsfilters von $f(a)$ ist Teilmenge des Umgebungsfilters von a.

Die durch (4) definierte Stetigkeit kann bei einfachen rationalen Funktionen nachgewiesen werden, ohne dass man vorher allgemeine Sätze (Stetigkeit der Summe stetiger Funktionen z.B.) herleitet. Man sollte das m.E. im Unterricht nicht ver-

säumen; nur dadurch prägt sich der Sachverhalt (4) deutlich genug sein. Man darf dabei durchaus das scheinbar im Widerspruch zur Quantorenreihenfolge in (4) stehende Verfahren verwenden lassen: Zu gegebenem $\delta > 0$ bestimmt man ein $\varphi(\delta)$ mit $\wedge_{x \in D_f} |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varphi(\delta)$ (was bei den rationalen Funktionen wegen der stückweisen Monotonie einfach ist); nur muss dann anschliessend gezeigt werden, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $\varphi(\delta) \leqq \varepsilon$ gibt (was im günstigsten Fall sogar mit dem Gleichheitszeichen gilt). Abzulehnen dagegen ist der Versuch, entsprechend der Quantorenreihenfolge in (4) zu gegebenem ε ein δ mit $|f(x) - f(a)| < \varepsilon \Rightarrow |x - a| < \delta$ zu bestimmen, also sozusagen die geforderte Ungleichung $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ nach $|x - a|$ aufzulösen; denn das dabei geübte « Umformen » von Ungleichungen ist i.allg. durchaus nicht umkehrbar, so dass sehr wohl dann die eigentlich benötigte Implikation $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ verletzt sein kann. Bemerkt sei noch, dass derartige Stetigkeitsbeweise bei rationalen Funktionen durchaus schon im Bereich der rationalen Zahlen durchgeführt werden können.

Die durch $\wedge_{x \neq 1} f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$ erklärte Funktion f und die durch $\wedge_x f^*(x) = x + 1$ erklärte Funktion f^* stimmen in ihren Funktionswerten dort überein, wo beide Funktionen definiert sind: $\wedge_{x \neq 1} f(x) = f^*(x)$. Dabei ist f^* stetig an der Stelle 1. Dieses und ähnlich gebildete Beispiele führen zu der folgenden Aufgabe: Aus der Funktion f soll mit einer vorgegebenen Zahl a und einer passend zu wählenden Zahl g eine durch

$$f^*(x) = f(x) \text{ für } a \neq x \in D_f, \qquad f^*(a) = g \tag{5}$$

definierte Funktion f^* so gebildet werden, dass diese an der Stelle a stetig ist. Dabei spielt es keine Rolle, ob $a \in D_f$ gilt oder nicht. Genau im Falle $a \in \overline{D_f - \{a\}}$ zeigt sich, dass es höchstens eine derartige Zahl g gibt; denn erfüllen $\tilde{g}$, $\tilde{f}$ an Stelle von g, f^* ebenfalls (5) und ist $\tilde{f}$ bei a stetig, so hat die bei a stetige Funktion $\tilde{f} - f^*$ den Wert 0 an allen Stellen $\neq a$ von D_f, bei a dagegen den Wert $\tilde{g} - g$, woraus $\tilde{g} = g$ oder aber $a \notin \overline{D_f - \{a\}}$ folgt. Im Falle

$a \in \overline{D_f - \{a\}}$ wird daher die Zahl g, sofern eine solche überhaupt existiert, durch f und a eindeutig bestimmt. Aus der Stetigkeitsdefinition (4) folgt, dass g sogar schon durch die Funktionswerte von f in einer beliebig kleinen Umgebung von a festgelegt wird. Das motiviert die Bezeichnung von g als Grenzwert von f an der Stelle a und die Schreibweise $g = \lim\limits_{x \to a} f(x)$. Dass (3) für $a \in D_f \cap \overline{D_f - \{a\}}$ wieder die Stetigkeit von f bei a besagt, ist sofort zu sehen; an einer Stelle a von D_f dagegen, die nicht Häufungspunkt von D_f ist, existiert $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ natürlich nicht, während f dort nach Definition (4) stetig ist. Insofern weicht die Definition (4) von der früher gegebenen Definition (3) ab. Für die Infinitesimalrechnung, sei es im Schulunterricht oder in den ersten Hochschulsemestern, dürfte das ohne Belang sein, da hier die Frage nach der Stetigkeit einer Funktion an isolierten Stellen ihres Definitionsbereiches gar nicht auftaucht. Vom Standpunkt der allgemeinen Topologie dagegen ist die Definition (4) durchaus vorzuziehen.

Natürlich kann man jetzt leicht für $g = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ die vom Stetigkeitsbegriff freie Kennzeichnung

$$\wedge_{\varepsilon > 0} \vee_{\delta > 0} \wedge_{x \in D_f} 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon \qquad (6)$$

herleiten, indem man (4) für f^* (statt f) anschreibt und (5) beachtet. Doch braucht man nicht erst auf (6) zurückzugehen, wenn man allgemeine Grenzwertsätze beweisen will, sofern man die entsprechenden Sätze für stetige Funktionen bereits hergeleitet hat. So folgt z.B. aus $\lim\limits_{x \to a} f_i(x) = g_i$ $(i = 1,2)$ mit den entsprechend (5) gebildeten, bei a stetigen Funktionen f_i^* für die Summenfunktionen $f = f_1 + f_2$, $f^* = f_1^* + f_2^*$ sofort (5) mit $g = g_1 + g_2$, so dass die Existenz von $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ und die Übereinstimmung dieses Grenzwertes mit der Summe der $\lim\limits_{x \to a} f_i(x)$ eine einfache Folge des Satzes über die Stetigkeit einer Summe stetiger Funktionen ist.

Um nun schliesslich zum Grenzwertbegriff bei Folgen zu gelangen, wird man zweckmässigerweise erst das Verhalten

rationaler Funktionen wie z.B. $x \to x^{-1}$ für sehr grosse Argumentwerte untersuchen und in Analogie setzen zur Untersuchung des Verhaltens solcher Funktionen in grosser Nähe einer Stelle a. Um die Analogie vollkommen zu machen, wird der Menge der reellen Zahlen eine uneigentliche Zahl ∞ hinzugefügt mit der einzigen Festsetzung

$$\wedge_x \; x < \infty \; ; \tag{7}$$

dagegen ist ausdrücklich ∞ als Argumentwert bei den Rechenoperationen abzulehnen. Nun lässt sich die umgebungsbeschreibende Ungleichung $|x - a| < \delta$ auch durch $c < x < d$ für geeignete Zahlen c ($< a$) und d ($> a$) wiedergeben. Der rechte Teil dieser Ungleichung ist für $a = \infty$ wegen (7) unmöglich. Somit erscheint es sinnvoll, jede Menge $\{x; c < x\}$ als Umgebung von ∞ zu bezeichnen. Damit erhält man die (6) entsprechende Kennzeichnung

$$\wedge_{\varepsilon > 0} \; \vee_c \; \wedge_{x \in D_f} c < x \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon \tag{8}$$

für den Grenzwert $g = \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ der Funktion f an der (uneigentlichen) Stelle ∞. Um die Eindeutigkeit des Grenzwerts zu sichern, ist natürlich wieder ∞ als Häufungspunkt von D_f vorauszusetzen, d.h. D_f darf nicht nach oben beschränkt sein. Spezialisiert auf Folgen, d.h. auf Funktionen mit $D_f = N$, ergibt (8) gerade die Kennzeichnung (1) des Folgengrenzwerts, wenn man noch beachtet, dass in (8) c wegen der archimedischen Eigenschaft der Anordnung sogar als natürliche Zahl gefordert werden kann.

Zur Veranschaulichung der Einführung von ∞ empfiehlt sich die Projektion der Zahlengeraden auf einen die Gerade berührenden Halbkreis von dessen Mittelpunkt aus, wobei der Durchmesser durch die Halbkreisendpunkte natürlich parallel zur Zahlengeraden gewählt sei; gerade den Halbkreisendpunkten entspricht jetzt keine Zahl, so dass es naheliegt, diesen zwei neue "uneigentliche Zahlen" ∞ und $-\infty$ zuzuordnen. Natürlich ist darauf hinzuweisen, dass keine logische Notwendigkeit dafür besteht, die Menge der reellen Zahlen so und nicht anders zu

erweitern und dass daher kein Widerspruch zu der Einzigkeit des uneigentlichen Punktes (= Fernpunkt) einer Geraden (bei Uebergang zur projektiven Geometrie) und der Stelle ∞ in der komplexen Funktionentheorie vorliegt.

Von den Vorteilen (A-C) des zuerst beschriebenen Verfahrens hat sich (C) als Nachteil herausgestellt, während (B) durch die Motivierung der Stetigkeitsdefinition (4) ausgeglichen erscheint. Es bleibt also allein noch (A) als Vorzug bestehen, den das zweite Verfahren nicht besitzt. Nun wird zwar bei diesem die exakte Behandlung des Folgengrenzwertbegriffes weit nach hinten gerückt; doch ist damit nicht gesagt, dass eine propädeutische Behandlung dieses Begriffs nicht schon vorher unabhängig vom Stetigkeitsbegriff erfolgen darf. Auf dieser propädeutischen Stufe handelt es sich aber wohl immer nur um monotone Folgen: Man sollte sich daher überlegen, ob man hier (also etwa bei unendlichen Dezimalbrüchen, unendlichen geometrischen Reihen, Kreisberechnung) nicht besser den Grenzwert durch obere bzw. untere Grenze (definiert als kleinste obere bzw. grösste untere Schranke) ersetzt. Dadurch würde dann auch die Gefahr einer unverstandenen oder falsch verstandenen ∞-Symbolik vermieden. Bei solchem Vorgehen, für das mir manches zu sprechen scheint, würde dann auch noch (A) als Grund für die Wahl des ersten Verfahrens wegfallen.

Mathematisches Institut der Universität
Tübingen.