

# EINE KENNZEICHNENDE EIGENSCHAFT DER KUGEL

Autor(en): **Groemer, Helmut**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **7 (1961)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-37137>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# EINE KENNZEICHNENDE EIGENSCHAFT DER KUGEL

von Helmut GROEMER

(Reçu le 1<sup>er</sup> septembre 1960)

In seinem Buch „A Collection of Mathematical Problems“ stellt S.M.Ulam die folgende Aufgabe: Es sei  $K$  ein konvexer Körper konstanter Dichte, der die Eigenschaft hat, dass er sich in jeder Stellung auf einer ebenen horizontalen Unterlage im Gleichgewicht befindet. Folgt daraus, dass  $K$  eine Kugel ist? Im folgenden soll diese Frage bejahend beantwortet werden. Es wird sich dabei zeigen, dass die Voraussetzung konstanter Dichte überflüssig ist, woraus dann insbesondere folgt, dass die Annahme der Konvexität von  $K$  nicht notwendig ist, da man ja zur konvexen Hülle  $\overline{K}$  von  $K$  übergehen kann, wenn man die Dichte in  $\overline{K} - K$  null setzt.

Dafür, dass sich  $K$  im Gleichgewicht befindet, ist notwendig, dass die vom Berührungspunkt von  $K$  mit der Unterlage ausgehende auf diese Ebene senkrecht stehende Gerade durch den Schwerpunkt von  $K$  geht. Die Behauptung ist demnach in dem folgenden Satz enthalten, der eine kennzeichnung der  $n$ -dimensionalen Kugel darstellt. Ist  $P$  ein Punkt des Randes von  $K$ , so heisse eine durch  $P$  gehende Gerade  $g$  eine Normale, wenn  $g$  auf einer  $P$  enthaltenden Stützebene von  $K$  senkrecht steht.

*Satz:* Hat ein  $n$ -dimensionaler konvexer Körper  $K$  die Eigenschaft, dass alle Normalen durch einen festen Punkt  $Q$  gehen, so ist  $K$  eine  $n$ -dimensionale Kugel mit dem Mittelpunkt  $Q$ .

*Beweis:* Es seien  $P_1$  und  $P_2$  zwei beliebige Punkte am Rande von  $K$  und  $r_1, r_2$  die Entfernungen  $\overline{QP_1}$  bzw.  $\overline{QP_2}$ . Es genügt offenbar für alle  $P_1, P_2$

$$r_2 \leq r_1 \tag{1}$$

zu beweisen. Schneidet man  $K$  mit einer durch  $Q, P_1, P_2$  gehenden zweidimensionalen Ebene  $E$ , so erhält man in  $E$  einen

konvexen Bereich  $C$ , auf dessen Rande  $P_1, P_2$  liegen und dessen Normale alle durch  $Q$  gehen. Der Winkel zwischen  $r_1$  und  $r_2$  sei  $\alpha$  ( $\alpha \leq \pi$ ).  $N$  bedeute irgendeine natürliche Zahl.  $g_i$  ( $i = 0, 1, \dots, N$ ) sei definiert als eine durch  $Q$  gehende Gerade, die mit  $r_1$  den Winkel  $i \frac{\alpha}{N}$  einschliesst und in dem durch  $\alpha$  bestimmten Winkelraum liegt. Man ziehe nun von  $P_1$  ausgehend senkrecht zu  $g_0$  eine Strecke  $l_1$ , bis man  $g_1$  etwa in einem Punkt  $A_1$  trifft. Von  $A_1$  ziehe man eine Strecke  $l_2$ , bis man  $g_2$  in einem Punkte  $A_2$  trifft. So kann man fortfahren, bis man  $g_N$  erreicht. Die Strecken  $l_i$  liegen alle ausserhalb oder am Rande von  $C$ . Für  $l_1$  folgt dies daraus, dass  $l_1$  in einer durch  $P_1$  gehenden Stützgeraden von  $C$  liegt. Da  $l_1$  ausserhalb oder am Rande von  $C$  liegt, gilt dies auch für  $A_1$  und daher auch für  $l_2$ , weil die auf  $g_2$  senkrecht stehende Stützgerade von  $C$  zwischen  $l_2$  und  $C$  liegt. Auf diese Weise gelangt man bis  $A_N$ . Es ist somit  $A_N$  ausserhalb oder am Rande von  $C$ . Wegen  $A_N \in g_N, P_2 \in g_N, P_2 \in C$  gilt daher für den Abstand  $d_N = \overline{QA_N}$

$$r_2 \leq d_N. \quad (2)$$

Berechnet man  $d_N$ , so erhält man

$$d_N = \frac{r_1}{\left(\cos \frac{\alpha}{N}\right)^N},$$

was mit (2)

$$r_2 \leq \frac{r_1}{\left(\cos \frac{\alpha}{N}\right)^N} \quad (3)$$

ergibt. Wegen

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{\alpha}{N}\right)^N = 1$$

folgt aus (3) die mit dem zu beweisenden Satz äquivalente Behauptung (1).

Department of Mathematics  
Oregon State College  
Corvallis, Oregon, U.S.A.