

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 7 (1961)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: EINE KENNZEICHNENDE EIGENSCHAFT DER KUGEL
Autor: Groemer, Helmut
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-37137>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 27.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

EINE KENNZEICHNENDE EIGENSCHAFT DER KUGEL

von Helmut GROEMER

(Reçu le 1^{er} septembre 1960)

In seinem Buch „A Collection of Mathematical Problems“ stellt S.M.Ulam die folgende Aufgabe: Es sei K ein konvexer Körper konstanter Dichte, der die Eigenschaft hat, dass er sich in jeder Stellung auf einer ebenen horizontalen Unterlage im Gleichgewicht befindet. Folgt daraus, dass K eine Kugel ist? Im folgenden soll diese Frage bejahend beantwortet werden. Es wird sich dabei zeigen, dass die Voraussetzung konstanter Dichte überflüssig ist, woraus dann insbesondere folgt, dass die Annahme der Konvexität von K nicht notwendig ist, da man ja zur konvexen Hülle \overline{K} von K übergehen kann, wenn man die Dichte in $\overline{K} - K$ null setzt.

Dafür, dass sich K im Gleichgewicht befindet, ist notwendig, dass die vom Berührungspunkt von K mit der Unterlage ausgehende auf diese Ebene senkrecht stehende Gerade durch den Schwerpunkt von K geht. Die Behauptung ist demnach in dem folgenden Satz enthalten, der eine kennzeichnung der n -dimensionalen Kugel darstellt. Ist P ein Punkt des Randes von K , so heisse eine durch P gehende Gerade g eine Normale, wenn g auf einer P enthaltenden Stützebene von K senkrecht steht.

Satz: Hat ein n -dimensionaler konvexer Körper K die Eigenschaft, dass alle Normalen durch einen festen Punkt Q gehen, so ist K eine n -dimensionale Kugel mit dem Mittelpunkt Q .

Beweis: Es seien P_1 und P_2 zwei beliebige Punkte am Rande von K und r_1, r_2 die Entfernungen $\overline{QP_1}$ bzw. $\overline{QP_2}$. Es genügt offenbar für alle P_1, P_2

$$r_2 \leq r_1 \tag{1}$$

zu beweisen. Schneidet man K mit einer durch Q, P_1, P_2 gehenden zweidimensionalen Ebene E , so erhält man in E einen

konvexen Bereich C , auf dessen Rande P_1, P_2 liegen und dessen Normale alle durch Q gehen. Der Winkel zwischen r_1 und r_2 sei α ($\alpha \leq \pi$). N bedeute irgendeine natürliche Zahl. g_i ($i = 0, 1, \dots, N$) sei definiert als eine durch Q gehende Gerade, die mit r_1 den Winkel $i \frac{\alpha}{N}$ einschliesst und in dem durch α bestimmten Winkelraum liegt. Man ziehe nun von P_1 ausgehend senkrecht zu g_0 eine Strecke l_1 , bis man g_1 etwa in einem Punkt A_1 trifft. Von A_1 ziehe man eine Strecke l_2 , bis man g_2 in einem Punkte A_2 trifft. So kann man fortfahren, bis man g_N erreicht. Die Strecken l_i liegen alle ausserhalb oder am Rande von C . Für l_1 folgt dies daraus, dass l_1 in einer durch P_1 gehenden Stützgeraden von C liegt. Da l_1 ausserhalb oder am Rande von C liegt, gilt dies auch für A_1 und daher auch für l_2 , weil die auf g_2 senkrecht stehende Stützgerade von C zwischen l_2 und C liegt. Auf diese Weise gelangt man bis A_N . Es ist somit A_N ausserhalb oder am Rande von C . Wegen $A_N \in g_N, P_2 \in g_N, P_2 \in C$ gilt daher für den Abstand $d_N = \overline{QA_N}$

$$r_2 \leq d_N. \quad (2)$$

Berechnet man d_N , so erhält man

$$d_N = \frac{r_1}{\left(\cos \frac{\alpha}{N}\right)^N},$$

was mit (2)

$$r_2 \leq \frac{r_1}{\left(\cos \frac{\alpha}{N}\right)^N} \quad (3)$$

ergibt. Wegen

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{\alpha}{N}\right)^N = 1$$

folgt aus (3) die mit dem zu beweisenden Satz äquivalente Behauptung (1).

Department of Mathematics
Oregon State College
Corvallis, Oregon, U.S.A.