EINE KENNZEICHNENDE EIGENSCHAFT DER KUGEL

von Helmut GROEMER

(Reçu le 1er septembre 1960)

In seinem Buch „A Collection of Mathematical Problems" stellt S.M.Ulam die folgende Aufgabe: Es sei K ein konvexer Körper konstanter Dichte, der die Eigenschaft hat, dass er sich in jeder Stellung auf einer ebenen horizontalen Unterlage im Gleichgewicht befindet. Folgt daraus, dass K eine Kugel ist ? Im folgenden soll diese Frage bejahend beantwortet werden. Es wird sich dabei zeigen, dass die Voraussetzung konstanter Dichte überflüssig ist, woraus dann insbesondere folgt, dass die Annahme der Konvexität von K nicht notwendig ist, da man ja zur konvexen Hülle $\overline{\mathrm{K}}$ von K übergehen kann, wenn man die Dichte in $\overline{\mathrm{K}}$ — K null setzt.

Dafür, dass sich K im Gleichgewicht befindet, ist notwendig, dass die vom Berührungspunkt von K mit der Unterlage ausgehende auf diese Ebene senkrecht stehende Gerade durch den Schwerpunkt von K geht. Die Behauptung ist demnach in dem folgenden Satz enthalten, der eine kennzeichnung der n-dimensionalen Kugel darstellt. Ist P ein Punkt des Randes von K, so heisse eine durch P gehende Gerade g eine Normale, wenn g auf einer P enthaltenden Stützebene von K senkrecht steht.

Satz: Hat ein n-dimensionaler konvexer Körper K die Eigenschaft, dass alle Normalen durch einen festen Punkt Q gehen, so ist K eine n-dimensionale Kugel mit dem Mittelpunkt Q.

Beweis: Es seien P_1 und P_2 zwei beliebige Punkte am Rande von K und r_1, r_2 die Entfernungen $\overline{QP_1}$ bzw. $\overline{QP_2}$. Es genügt offenbar für alle P_1, P_2

$$r_2 \leqq r_1 \tag{1}$$

zu beweisen. Schneidet man K mit einer durch Q, P_1, P_2 gehenden zweidimensionalen Ebene E, so erhält man in E einen konvexen Bereich C, auf dessen Rande P_1, P_2 liegen und dessen Normale alle durch Q gehen. Der Winkel zwischen r_1 und r_2 sei α ($\alpha \leqq \pi$). N bedeute irgendeine natürliche Zahl. g_i ($i = 0, 1, \dots N$) sei definiert als eine durch Q gehende Gerade, die mit r_1 den Winkel $i \frac{\mathrm{N}}{\alpha}$ einschliesst und in dem durch α bestimmten Winkelraum liegt. Man ziehe nun von P_1 ausgehend senkrecht zu g_0 eine Strecke l_1, bis man g_1 etwa in einem Punkt A_1 trifft. Von A_1 ziehe man eine Strecke l_2, bis man g_2 in einem Punkte A_2 trifft. So kann man fortfahren, bis man g_{N} erreicht. Die Strecken l_i liegen alle ausserhalb oder am Rande von C. Für l_1 folgt dies daraus, dass l_1 in einer durch P_1 gehenden Stützgeraden von C liegt. Da l_1 ausserhalb oder am Rande von C liegt, gilt dies auch für A_1 und daher auch für l_2, weil die auf g_2 senkrecht stehende Stützgerade von C zwischen l_2 und C liegt. Auf diese Weise gelangt man bis A_{N}. Es ist somit A_{N} ausserhalb oder am Rande von C. Wegen $A_{\mathrm{N}} \in g_{\mathrm{N}}$, $P_2 \in g_{\mathrm{N}}$, $P_2 \in C$ gilt daher für den Abstand $d_{\mathrm{N}} = \overline{QA_{\mathrm{N}}}$

$$r_2 \leqq d_{\mathrm{N}} . \tag{2}$$

Berechnet man d_{N}, so erhält man

$$d_{\mathrm{N}} = \frac{r_1}{\left(\cos \frac{\alpha}{\mathrm{N}}\right)^{\mathrm{N}}},$$

was mit (2)

$$r_2 \leqq \frac{r_1}{\left(\cos \frac{\alpha}{\mathrm{N}}\right)^{\mathrm{N}}} \tag{3}$$

ergibt. Wegen

$$\lim_{\mathrm{N}\to\infty} \left(\cos \frac{\alpha}{\mathrm{N}}\right)^{\mathrm{N}} = 1$$

folgt aus (3) die mit dem zu beweisenden Satz äquivalente Behauptung (1).

Department of Mathematics
Oregon State College
Corvallis, Oregon, U.S.A.