

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 7 (1961)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: BESTIMMUNG DER UNENDLICH FERNEN PUNKTE EBENER
ALGEBRAISCHER KURVEN IN INHOMOGENEN KOORDINATEN
DURCH BESTRAHLUNG MITTELS EINES STRAHLENBÜSCHELS

Autor: Kraker, Johann
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-37136>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 17.01.2026

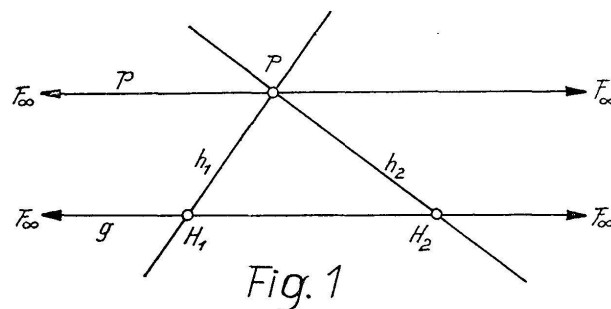
ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

BESTIMMUNG DER UNENDLICH FERNEN PUNKTE EBENER ALGEBRAISCHER KURVEN IN INHOMOGENEN KOORDINATEN DURCH BESTRAHLUNG MITTELS EINES STRAHLENBÜSCHELS

von Johann KRAKER

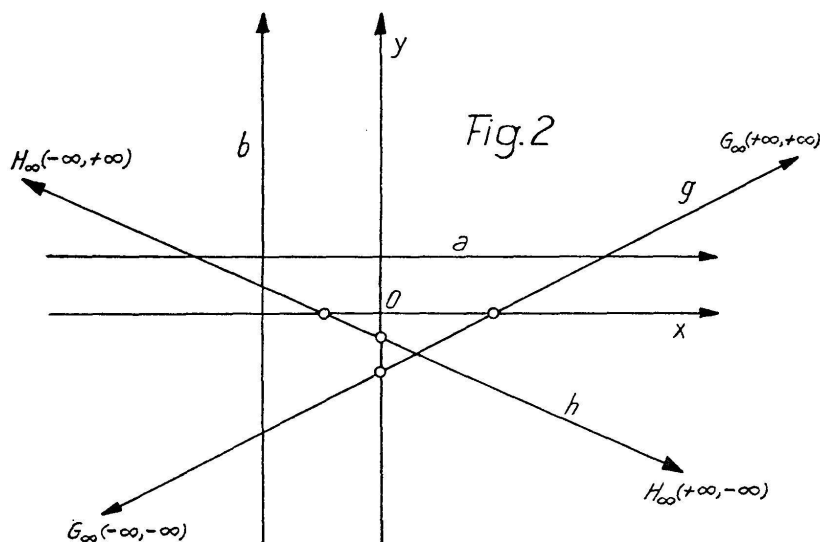
(*Reçu le 15 janvier 1961*)

I. Bekennt man sich zum Parallelenpostulat von Euklid, dann gibt es durch jeden Punkt ausserhalb einer Geraden zu dieser eine und nur eine parallele Gerade. Jede nichtparallele Gerade durch einen solchen Punkt schneidet die ursprüngliche Gerade in einem einzigen, eigentlichen Punkt, nur die Parallele macht eine Ausnahme (Fig. 1).



Um diese Ausnahme zu beseitigen, weist man jeder Geraden g einen, aber auch nur einen unendlich fernen Punkt oder uneigentlichen Punkt F_∞ zu, auch kurz Fernpunkt genannt, der in der von der Geraden angegebenen Richtung im Unendlichen liegt. Man sagt dann: Eine Parallele p durch einen Punkt P ausserhalb von g schneidet g in ihrem Fernpunkt F_∞ . Jede Gerade g gibt eine Richtung an. Man kann sich auf der Geraden jedoch noch in zweierlei Sinn orientieren (Durchlaufungssinn). Trotz der möglichen zweifachen Orientierung weist man jeder Geraden nur einen einzigen Fernpunkt zu, weil jede zu ihr nicht parallele Gerade z. B. h_1 oder h_2 auch nur einen eigentlichen Punkt H_1 bzw. H_2 mit der ursprünglichen Geraden gemein hat. Das heisst, dass alle zu einer Geraden parallelen Geraden denselben Fern-

punkt besitzen oder mit anderen Worten: Richtung ist dasselbe wie Fernpunkt; zur selben Richtung gehört ein und derselbe Fernpunkt, zu verschiedenen Richtungen gehören verschiedene Fernpunkte. Im übrigen handelt es sich bei der Einführung der unendlich fernen Elemente, wie schon H. Poincaré bemerkt hat, nur um eine „façon de parler“, um eine „Sprechweise“.



Nun wollen wir noch die Gesamtheit der möglichen reellen unendlich fernen Punkte aller Geraden der Koordinatenebene klarstellen.

Zur Charakterisierung der Fernpunkte aller dieser Geraden hat man lediglich drei Fälle zu unterscheiden (Fig. 2):

a) Jene Geraden g , die gegenüber den Koordinatenachsen allgemeine Lage haben, das heisst, sowohl die x -Achse als auch die y -Achse in einem eigentlichen Punkt schneiden. Der Fernpunkt G_∞ einer solchen Geraden ist dadurch gekennzeichnet, dass sein $x = +\infty$ oder $-\infty$ und auch sein $y = +\infty$ oder $-\infty$ ist. In Fig. 2 sind zwei verschiedene solche Fälle dargestellt, nämlich $G_\infty(+\infty, +\infty)$ und $H_\infty(-\infty, +\infty)$. Dabei genügt es, sich im geordneten Zahlenpaar x, y , welches zu einem Fernpunkt gehört, auf eine einzige, entsprechende Kombination der $+\infty$ und $-\infty$ zu beschränken, weil man jeder Geraden nur einen einzigen Fernpunkt beigelegt hat.

Es gelten in diesem Sinne die Identitäten

$$G_\infty(+\infty, +\infty) \equiv G_\infty(-\infty, -\infty)$$

und

$$H_{\infty}(+\infty, -\infty) \equiv H_{\infty}(-\infty, +\infty);$$

b) Geraden a , die zur x -Achse parallel sind. Ihr gemeinsamer Fernpunkt ist charakterisiert durch $x = +\infty$ oder $-\infty$, wogegen sein y für jede solche Gerade einen bestimmten endlichen Wert besitzt. Für den Fernpunkt X_{∞} von zwei verschiedenen zur x -Achse parallelen Geraden $y = a_1$, $y = a_2$ besteht daher die Identität $X_{\infty}(\pm\infty, a_1) \equiv X_{\infty}(\pm\infty, a_2)$;

c) Geraden b parallel zur y -Achse; für sie gilt *mutatis mutandis* dasselbe wie für den Fall *b)*; die Identität lautet in diesem Fall

$$Y_{\infty}(b_1, \pm\infty) \equiv Y_{\infty}(b_2, \pm\infty).$$

Die Gesamtheit der Fernpunkte der Koordinatenebene sehen wir als lineares Gebilde an, weil jede eigentliche Gerade dieses Gebilde in einem einzigen unendlich fernen Punkt schneidet. Wir nennen dieses Gebilde die unendlich ferne Gerade der Koordinatenebene, auch ihre uneigentliche Gerade oder kurz die Ferngerade der Koordinatenebene.

II. Unter der Bestrahlung einer ebenen Kurve durch ein Strahlenbüschel, welches der Ebene der Kurve angehört, wollen wir die Bestimmung der Schnittpunkte der Strahlen des Büschels mit der Kurve verstehen, insbesondere die Bestimmung der Schnittpunkte, die im Unendlichen liegen. Die Schnittpunkte eines Strahlenbüschels mit einer Kurve seiner Ebene wollen wir Strahlungspunkte nennen; liegt ein solcher Punkt im Unendlichen, heiße er Strahlungsfernpunkt. Bei der Bestimmung der Strahlungsfernpunkte einer Kurve ist es nach dem eben Gesagten offenbar völlig gleichgültig, wo man in der Ebene der Kurve den Mittelpunkt S des Strahlenbüschels wählt; es kommt nur auf die Richtung an, in welcher ein bestimmter Strahlungsfernpunkt liegt (Fig. 3: a_1 , a_2 sind die Asymptoten der Hyperbel h , a'_1 , a'_2 die parallelen Strahlen dazu durch S). Diese Richtung aber wird analytisch durch den Richtungskoeffizienten jenes Strahles des Büschels S angegeben, dessen unendlich ferner Punkt der gesuchte Fernpunkt der Kurve h ist.

Aus Fig. 2 geht für reelle unendlich ferne Punkte hervor, dass zu G_∞ und H_∞ ein endlicher, von Null verschiedener Richtungskoeffizient m gehört, zu a ein $m = 0$, zu b ein $m = \pm \infty$.

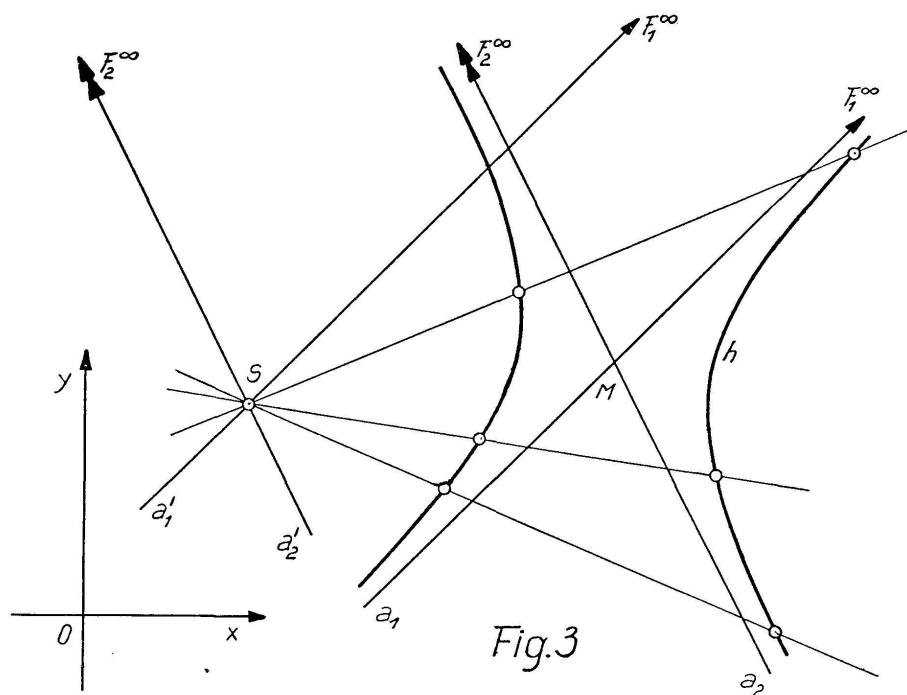


Fig. 3

III. Unter diesem Gesichtspunkt sollen zunächst die Kurven zweiter Ordnung, also die Kegelschnitte betrachtet werden.

Die allgemeine Kegelschnittsgleichung in inhomogenen cartesischen Koordinaten lautet:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0. \quad (1)$$

Nun bestrahlen wir (1) mit dem Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt wir der Einfachheit halber mit dem Koordinatenursprung zusammenfallen lassen $y = mx$.

Man erhält dann für das x der Strahlungspunkte die Gleichung

$$ax^2 + bmx^2 + cm^2 x^2 + dx + emx + f = 0$$

und daraus

$${}_1x_2 = \frac{-d - em \pm \sqrt{(d + em)^2 - 4f(a + bm + cm^2)}}{2(a + bm + cm^2)}.$$

Das Kennzeichen jedes Strahlungsfernpointes von (1) ist im allgemeinen $x = +\infty$ oder $-\infty$ oder, anders ausgedrückt,

wenn x gegen $+\infty$ oder $-\infty$ strebt, konvergiert $\frac{1}{x}$ gegen Null.

Aus

$$\frac{1}{x} = \frac{2(a + bm + cm^2)}{-d - em \pm \sqrt{(d + em)^2 - 4f(a + bm + cm^2)}} = 0$$

folgt aber

$$a + bm + cm^2 = 0$$

oder

$$m_1 m_2 = -\frac{b}{2c} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4c^2}}. \quad (2)$$

Durch diese beiden Richtungskoeffizienten m_1, m_2 sind die Fernpunkte eines Kegelschnittes (1) fixiert. Aus (2) erkennt man, dass

a) $m_1 \neq m_2$ und beide reell, wenn $b^2 - 4ac > 0$; dann stellt (1) eine Hyperbel dar

b) $m_1 = m_2$ und reell, wenn $b^2 - 4ac = 0$; (1) ist dann die Gleichung einer Parabel

c) m_1, m_2 konjugiert komplex, wenn $b^2 - 4ac < 0$; in diesem Fall ist (1) die Gleichung einer Ellipse.

IV. Die charakteristischen Besonderheiten der dargelegten Methode seien noch an zwei Beispielen dargetan:

1.) Zur Ermittlung der unendlich fernen Punkte der Kurve

$$2x^2 - 2xy \sqrt{3} + 3 = 0$$

bestrahlen wir diese wieder mit $y = mx$.

Für das x der Strahlungspunkte ergibt sich

$$x = \sqrt{\frac{3}{2(m\sqrt{3} - 1)}}. \quad (3)$$

Lässt man in (3) x gegen $\pm\infty$ gehen oder $\frac{1}{x}$ gegen Null, so muss

$$m\sqrt{3} - 1 = 0$$

werden oder

$$m = \frac{1}{|\sqrt{3}|}.$$

Der zweite unendlich ferne Punkt der Kurve — als Kurve zweiter Ordnung hat sie mit der unendlich fernen Geraden ihrer Ebene zwei Punkte gemeinsam — kann nur ein solcher sein, für welchen $y = \pm \infty$ wird.

Bestrahlt man die Kurve nochmals mit $y = mx$ und setzt $x = \frac{y}{m}$ in die Kurvengleichung ein, so bekommt man für

$$y = \sqrt{\frac{3m^2}{2(m|\sqrt{3}| - 1)}} \text{ bzw. für } \frac{1}{y} = \sqrt{\frac{2(m|\sqrt{3}| - 1)}{3m^2}}.$$

Lässt man $\frac{1}{y}$ gegen Null gehen, so folgt zunächst aus $m|\sqrt{3}| - 1 = 0$ der schon bekannte Wert

$$m = \frac{1}{|\sqrt{3}|}.$$

$\frac{1}{y}$ kann aber auch Null werden, indem $m \rightarrow \pm \infty$ geht. Tatsächlich ist

$$\left. \frac{2(m|\sqrt{3}| - 1)}{3m^2} \right|_{m \rightarrow \pm \infty} = \left. \frac{2\left(|\sqrt{3}| - \frac{1}{m}\right)}{3m} \right|_{m \rightarrow \pm \infty} = 0.$$

$m = \pm \infty$ bestimmt einen einzigen unendlich fernen Punkt, weil die Funktion $m = \operatorname{tg} \alpha$ bei $\alpha = \frac{\pi}{2}$ eine Unstetigkeitsstelle besitzt.

2.) Zum Abschluss noch die Ermittlung der unendlich fernen Punkte der Kurven

$$x^3 + 3xy^2 = a|\sqrt{2}| \text{ mit } a > 0.$$

Bestrahlung mit $y = mx$ liefert für die Strahlungspunkte

$$x = \sqrt[3]{\frac{a|\sqrt{2}|}{1 + 3m^2}} \text{ bzw. } \frac{1}{x} = \sqrt[3]{\frac{1 + 3m^2}{a|\sqrt{2}|}}.$$

Aus $\frac{1}{x} = 0$ folgt $1 + 3m^2 = 0$ oder

$${}_1m_2 = \pm \frac{i|\sqrt{3}|}{3}.$$

Das gibt zwei konjugiert komplexe unendlich ferne Punkte. Die Kurven haben aber gemäss dem Fundamentalsatz der Algebra mit der uneigentlichen Geraden ihrer Ebene drei Punkte gemeinsam.

Dieser dritte Fernpunkt kann wieder nur ein Punkt sein, für den $y = \pm \infty$ ist. Setzt man $x = \frac{y}{m}$ in die Ausgangsgleichung ein, ergibt sich für

$$y = \sqrt[3]{\frac{m^3 a |\sqrt{2}|}{1 + 3m^2}} \text{ bzw. } \frac{1}{y} = \sqrt[3]{\frac{1 + 3m^2}{m^3 a |\sqrt{2}|}}.$$

Aus $\frac{1}{y} = 0$ bzw. aus $1 + 3m^2 = 0$ erhält man zunächst wieder die früheren beiden Werte für m .

$\frac{1 + 3m^2}{m^3 a |\sqrt{2}|}$ kann aber auch Null werden, indem $m = \pm \infty$ wird; der Bruch geht dabei in die unbestimmten Formen $\pm \frac{\infty}{\infty}$ über, und diese könnten den Wert Null annehmen. Die Regel von de l'Hospital überzeugt uns tatsächlich davon, dass

$$\left. \frac{6m}{3m^2 a |\sqrt{2}|} \right|_{m \rightarrow \pm \infty} = \left. \frac{2}{m a |\sqrt{2}|} \right|_{m \rightarrow \pm \infty} = 0.$$

Also entspricht $m = \pm \infty$ — man vergleiche die diesbezügliche Bemerkung im Beispiel 1 — dem dritten unendlich fernen Punkt.

Zusatz: a) Mit Hilfe der Methode der Bestrahlung einer ebenen algebraischen Kurve mittels eines Strahlenbüschels gelingt es auch, Licht in das Dunkel mancher Lehrbücher der Schulmathematik hinsichtlich der Auflösung gewisser algebraischer Gleichungen mit zwei Unbekannten zu bringen, von denen eine vom zweiten Grad, die andere linear ist. Man braucht

hiez u die beiden Gleichungen nur als Gleichungen geometrischer Gebilde — Kegelschnitt und Gerade — in inhomogenen cartesischen Koordinaten aufzufassen und ihre Schnittpunkte zu bestimmen.

Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 4x^2 - y^2 + 6y &= 13 \\ y - 2x &= 6. \end{aligned}$$

Drückt man y aus der zweiten Gleichung durch x aus und setzt dies in die erste Gleichung ein, so erhält man $x = -\frac{13}{12}$. Dieser Wert in die zweite Gleichung eingesetzt liefert

$$y = \frac{23}{6}.$$

Man bekommt also nur ein Lösungspaar und vermisst das zweite. Dies wird in der Schulmathematik meist mit dem Bemerk en abgetan, dass hier kein zweites Lösungspaar auftrete.

Bestrahlt man jedoch den durch die erste Gleichung des Systems gegebenen Kegelschnitt mit $y = mx$, so findet man für die Strahlungspunkte

$$x = \frac{-3m \pm \sqrt{52 - 4m^2}}{4 - m^2}.$$

Die Bedingung für Strahlungsfernpunkte $x \rightarrow \pm \infty$ oder $\frac{1}{x} \rightarrow 0$

liefert $m = \pm 2$. Das heisst, die Ausgangsgleichung zweiten Grades stellt eine Hyperbel dar, deren Asymptoten parallel zu den Geraden $y = \pm 2x$ sind. Die lineare Gleichung des Ausgangssystems ist die Gleichung einer Geraden mit der Steigung 2; sie ist also parallel zu einer Asymptote. Daher liegt der zweite Schnittpunkt dieser Geraden mit der Hyperbel im Unendlichen und die zu diesem Fernpunkt gehörige Richtung ist durch den Richtungskoeffizienten 2 bestimmt.

b) Die Methode der Bestrahlung ebener algebraischer Kurven mittels eines Strahlenbüschels zur Ermittlung ihrer unendlich fernen Punkte ist ebenso auf imaginäre Kurven anwendbar.