

<b>Zeitschrift:</b>	L'Enseignement Mathématique
<b>Herausgeber:</b>	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
<b>Band:</b>	7 (1961)
<b>Heft:</b>	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
<b>Artikel:</b>	UNGLEICHUNGEN UND IHRE VERWENDUNG ZUR ELEMENTAREN LÖSUNG VON MAXIMUMUND MINIMUMAUFGABEN
<b>Autor:</b>	Aczél, J.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-37132">https://doi.org/10.5169/seals-37132</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# UNGLEICHUNGEN UND IHRE VERWENDUNG ZUR ELEMENTAREN LÖSUNG VON MAXIMUM- UND MINIMUMAUFGABEN

von J. ACZÉL

(Reçu le 26 janvier 1961)

*Meinem geehrten Lehrer und Freund T. Gallai  
zum 50-sten Geburtstag gewidmet.*

1. *Einführung.* In diesem Artikel werden wir ein dreifaches Ziel verfolgen: 1. Die Feststellung grundlegender Tatsachen über Ungleichungen und über einige Anwendungen derselben; 2. Die Mitteilung der hierzu benötigten Vorkenntnisse; und endlich 3. Zu zeigen, daß der dargelegte einheitliche Gedankengang auch in konkreten Spezialfällen verwertet werden kann. — Dabei werden wir uns mit der Herleitung und mit den Anwendungen allgemeingültiger Ungleichungen beschäftigen (und nicht mit der Bestimmung von Werten die gegebene Ungleichungen befriedigen, d. h. nicht mit der „Lösung“ von Ungleichungen).

Eine der am häufigsten auftretenden und wohl auch der am besten bekannten Ungleichungen, diejenige zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel, sagt in ihrer einfachsten Gestalt folgendes aus:

$$(1) \quad \frac{t_1 + t_2}{2} > \sqrt{t_1 t_2} \quad (t_1 > 0, t_2 > 0) \quad \text{für} \quad t_1 \neq t_2$$

und wird bekanntlicherweise wie folgt bewiesen:

$$(2) \quad \frac{t_1 + t_2}{2} - \sqrt{t_1 t_2} = \frac{(\sqrt{t_1} - \sqrt{t_2})^2}{2} > 0 \quad \text{für} \quad t_1 \neq t_2 .$$

2. *Formale Regeln.* Um uns im oben dargelegten Sinne mit Ungleichungen beschäftigen zu können, müssen wir vor allem die formalen Regeln des Rechnens mit Ungleichungen feststellen (und dazu auch den Begriff der Ungleichung präzisieren).

Das Fehlen einer solchen vorangehenden Klärung ist ein ernster Mangel mehrerer einschlägiger Werke.

Wie dies bereits aus der Herleitung (2) der Ungleichung (1) hervorgeht, wird ein Ausdruck  $A$  dann (und für jene Werte der auftretenden Veränderlichen) größer als  $B$  genannt, was man durch

$$(3) \quad A > B$$

bezeichnet, falls  $A - B$  positiv ist ( $A - B > 0$ ). Der Tatbestand, daß  $A$  größer als  $B$  oder aber gleich  $B$  ist, wird so bezeichnet:

$$(4) \quad A \geqq B$$

(in Worten:  $A$  nicht kleiner als  $B$ ). (4) ist also mit der *Nichtnegativität* der Differenz  $A - B$  äquivalent ( $A - B \geqq 0$ ). (3) bzw. (4) können auch so geschrieben werden:

$$(5) \quad B < A$$

bzw.

$$B \leqq A$$

( $B$  kleiner bzw. nicht größer als  $A$ ). Offenbar gilt für dieselben Ausdrücke  $A$  und  $B$  (bei denselben Werten der Veränderlichen) entweder  $A \geqq B$  oder  $A < B$ , und es gibt keine andere Möglichkeit und auch das gleichzeitige Bestehen dieser beiden Möglichkeiten ist ausgeschlossen. Zum Beweis einer Ungleichung der Form (3) (oder (5)) bzw. (4) muß man also zeigen, daß  $A - B > 0$  (oder  $B - A < 0$ ), bzw.  $A - B \geqq 0$  ist.

So lassen sich die folgenden Rechenregeln herleiten:

Ist  $A > B$  und  $C \geqq D$ , dann ist auch  $A + C > B + D$ , denn aus  $A - B > 0$  und  $C - D \geqq 0$  folgt durch Addition  $(A + C) - (B + D) > 0$ , da die Summe einer positiven und einer nichtnegativen Zahl jedenfalls positiv ist.

Aus  $A > B$  folgt  $cA > cB$  bzw.  $cA < cB$  je nachdem  $c > 0$  oder  $c < 0$  ist (da  $cA - cB = c(A - B) > 0$  bzw.  $< 0$  ist: das Produkt zweier positiver Zahlen ist positiv, das Produkt einer positiven und einer negativen Zahl hingegen negativ). — Aus  $C \geqq D$  und  $c \geqq 0$  folgt  $cC \geqq cD$  (da  $cC - cD = c(C - D) \geqq 0$  ist). — Aus  $A > B$  und  $B \geqq D$  folgt  $A > D$  ( $A - D$

$= (A - B) + (B - D) > 0$ . — Aus diesen Regeln folgt bereits:

Ist  $A > B \geq 0$ ,  $C \geq D$  und  $C > 0$ , dann ist  $AC > BD$ , da aus  $AC > BC$  und  $BC \geq BD$  tatsächlich  $AC > BD$  folgt. (Dasselbe läßt sich auch unmittelbar aus der Zerlegung  $AC - BD = (A - B)C + B(C - D)$  folgern.) Weiterhin folgt daraus im Falle  $A > B \geq 0$  ( $C = A$ ,  $D = B$ , bzw.  $C = A^2$ ,  $D = B^2$ , usw.)

$$A^2 > B^2, \quad A^3 > B^3, \dots$$

und im allgemeinen für einen beliebigen positiven ganzen Exponenten  $n$ :

$$(6) \quad A^n > B^n$$

Ist  $A > B > 0$ , dann gilt

$$A^{-n} - B^{-n} = \frac{1}{A^n} - \frac{1}{B^n} = \frac{B^n - A^n}{A^n B^n} < 0 ,$$

also für positive ganze Werte von  $n$

$$(7) \quad A^{-n} < B^{-n} .$$

Für 'ganze positive Werte von  $p$  und von  $q$  gilt im Falle  $A > B > 0$  auch  $A^{\frac{p}{q}} > B^{\frac{p}{q}}$  (d. h. (6) gilt auch für positive rationale Exponenten), wäre nämlich  $A^{\frac{p}{q}} \leq B^{\frac{p}{q}}$ , dann würde auf Grund von (6) durch Erhebung auf die  $q$ -te Potenz ( $q$  eine ganze positive Zahl)  $A^p \leq B^p$  folgen, im Widerspruch zu (6) (auch  $p$  ist eine positive ganze Zahl).

Läßt sich (6) auch auf den Fall beliebiger positiver reeller Exponenten übertragen? Wir werden zeigen, daß dies tatsächlich der Fall ist, d. h., daß

$$(8) \quad A^x > B^x \quad \text{für} \quad A > B \geq 0, x > 0$$

gilt. Es sei nämlich  $\{r_n\}$  eine gegen  $x$  konvergierende Folge positiver rationaler Zahlen (z. B. die Folge der dezimalen Näherungsbrüche von  $x$ ). Wie wir bereits gesehen haben, gilt

$$(9) \quad A^{r_n} > B^{r_n}$$

woraus wir einstweilen

$$(10) \quad A^x \geq B^x$$

folgern. Wäre nämlich  $A^x < B^x$  d. h.  $D = B^x - A^x > 0$  dann würden für ein zu  $x$  genügend nahe liegendes  $r_n$   $A^x$  und  $A^{r_n}$  beliebig wenig voneinander abweichen und (s. Abb. 1) es wäre

$$A^{r_n} < A^x + \frac{D}{2} = \frac{A^x + B^x}{2} = B^x - \frac{D}{2} < B^{r_n}$$

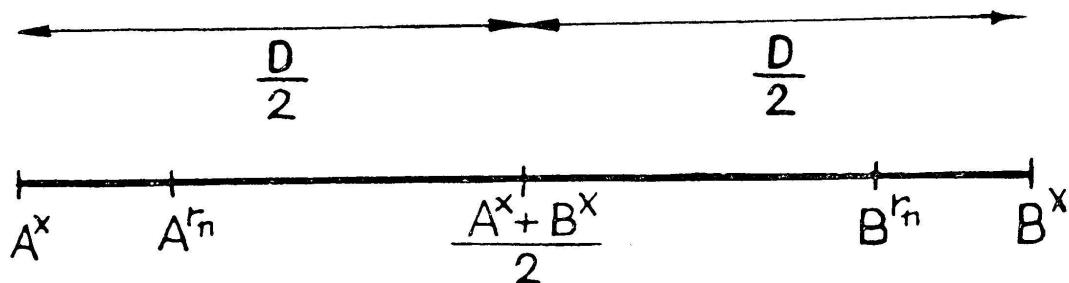


Abb. 1.

im Gegenzatz zu (9). In (10) kann aber  $A^x = B^x$  unmöglich gelten, da daraus (durch Erhebung beider Seiten auf die  $\frac{1}{x}$ -te Potenz)  $A = B$  folgen würde. Also ist (8) richtig. — Aus (7) folgt auf ähnliche Weise, daß

$$A^x < B^x \quad \text{für} \quad A > B > 0 \quad \text{und} \quad x < 0$$

gilt.

Es mag vielleicht so erscheinen, als ob die angeführten Beweise komplizierter wären, als die oft ziemlich evidenten Behauptungen; dennoch sind solche Betrachtungen zur strengen Begründung des Rechnens mit Ungleichungen unerlässlich. Dabei ist es auch nicht so ganz evident, unter welchen Bedingungen sich z. B. zwei Ungleichungen multiplizieren lassen. (Z. B. ist  $2 > -3$  und  $4 > -3$  aber  $2 \cdot 4 < (-3) \cdot (-3)$ , während mit  $2 > -3$  und  $4 > -2$  zugleich auch  $2 \cdot 4 > (-3) \cdot (-2)$  gilt.) — Sind wir nun aber einmal im Besitz dieser Regeln, so können wir ohne weiteres zur Erörterung der grundlegenden Ungleichungen schreiten, und auch im späteren Laufe unserer Darlegungen werden wir keine Schwierigkeiten haben, wenn es

gilt einzusehen, warum man z. B. von der Untersuchung der Extremaleigenschaften irgendeines Ausdrucks zur Untersuchung der Extremaleigenschaften einer Potenz desselben übergehen kann.

3. *Konvexe Funktionen.* In den Arbeiten [5, 11, 12, 17, 21] (s. das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit) werden die einzelnen Ungleichungen aus der Theorie der konvexen Funk-

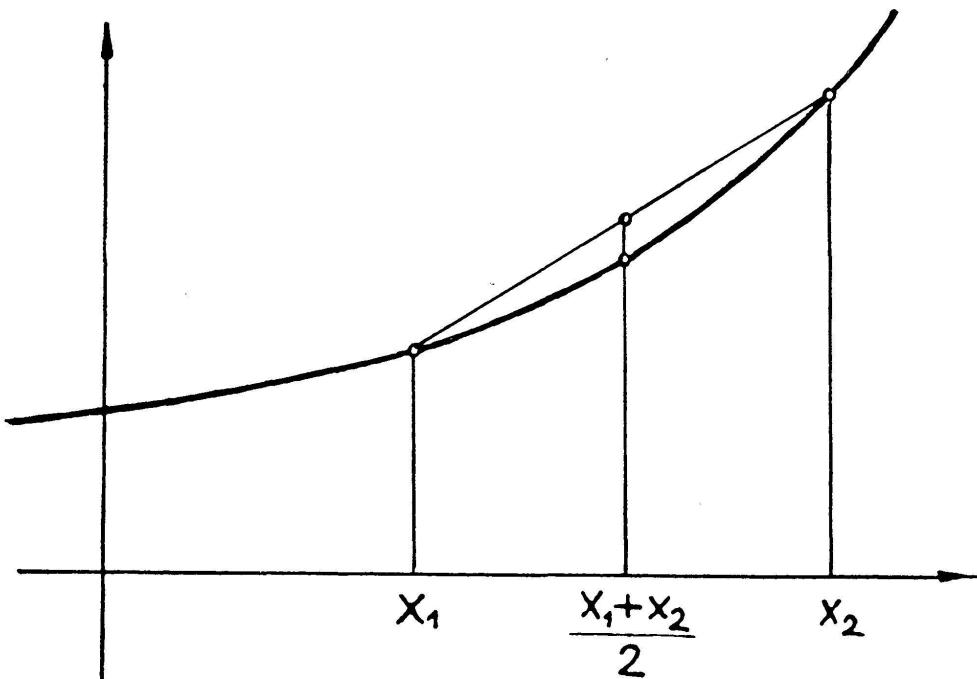


Abb. 2.

tionen hergeleitet. Um verständlich zu machen, worum es sich dabei handelt, betrachten wir z. B. die Ungleichung (1) zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel. Führen wir die Bezeichnungen  $t_1 = a^{x_1}$ ,  $t_2 = a^{x_2}$  ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ) ein, so geht dieselbe in die Ungleichung

$$a^{\frac{x_1+x_2}{2}} < \frac{a^{x_1} + a^{x_2}}{2} \quad \text{für } x_1 \neq x_2$$

über. Diese Ungleichung (s. Abb. 2) bringt nun ihrerseits die Tatsache zum Ausdruck, daß für die Kurve der Funktion  $a^x$  der Mittelpunkt jeder echten (d. h. nicht in einen Punkt entarteten) Sehne über der Kurve liegt. Solche Funktionen werden *Jensen-konvex* genannt.

Genauer: Eine Funktion wird im Intervall  $[a, b]$  Jensen-konvex genannt, falls für beliebige in  $[a, b]$  liegende Punkte  $x_1, x_2$  die folgende, sog. *Jensensche Ungleichung* erfüllt ist:

$$(11) \quad f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \quad \text{für } x_1 \neq x_2.$$

Im folgenden werden wir immer im Intervall  $[a, b]$  liegende Stellen betrachten, ohne dies jedesmal ausdrücklich zu betonen. Befriedigt eine Funktion eine zu (11) analoge Ungleichung, wobei aber statt  $<$  das Zeichen  $\leq$ ,  $>$  bzw.  $\geq$  steht, so wird sie *im weiteren Sinne* Jensen-konvex, bzw. *Jensen-konkav* bzw. im weiteren Sinne Jensen-konkav genannt. Im Falle  $x_1 = x_2$  gilt natürlich für jede Funktion

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

Aus (11) folgt die  $n$ -gliedrige *Jensensche Ungleichung*:

$$(12) \quad f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}$$

falls nicht  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$  ist,

$$\begin{aligned} & \left( \text{im letzten Falle gilt offenbar } f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) = \right. \\ & \quad \left. = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n} \right). \end{aligned}$$

Es ist üblich, diese Ungleichung durch sog. Cauchy'sche Induktion zu beweisen, wobei von  $n$  auf  $2n$  und von  $m$  auf  $m - 1$  gefolgert wird. Da nun erfahrungsgemäß auch das Verständnis der gewöhnlichen vollständigen Induktion mit gewissen Schwierigkeiten verbunden ist, scheint es wenig wünschenswert, den der diese Schwierigkeiten glücklich überwunden hat, sogleich durch einen noch komplizierteren Induktionsschluß in Verlegenheit zu setzen. Eben darum geben wir im folgenden gleich zwei Beweise der Ungleichung (12), die beide mit der gewöhnlichen vollständigen Induktion geführt werden. Da gemäß (11) die Ungleichung (12) für  $n = 2$  Gültigkeit hat, wird es genügen zu

zeigen, daß aus der Gültigkeit von (12) für  $n$  auch seine Gültigkeit für  $n + 1$  folgt. Der erste Beweis (vgl. [17]) verläuft folgendermassen:

Wir setzen

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1}}{n + 1}$$

und erhalten so

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1}}{n + 1}\right) \\ &= f\left(\frac{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} + \frac{x_{n+1} + (n - 1)x}{n}}{2}\right) \leq \\ &\leq \frac{f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) + f\left(\frac{x_{n+1} + (n - 1)x}{n}\right)}{2} < \\ &< \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) + f(x_{n+1}) + (n - 1)f(x)}{2n} \end{aligned}$$

(hier haben wir (11) einmal und (12) zweimal nacheinander verwendet: im ersten Falle mußten wir  $\leq$  schreiben, da der Fall

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{x_{n+1} + (n - 1)x}{n}$$

nicht ausgeschlossen ist, im zweiten Falle jedoch war  $<$  stichhaltig, da Gleichheit nur im

$$\begin{aligned} \text{Falle } x_1 &= x_2 = \dots = x_n \text{ und } x_{n+1} = x = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1}}{n + 1} = \\ &= \frac{n x_n + x_{n+1}}{n + 1} \text{ also } x_{n+1} = x_n = \dots = x_2 = x_1 \text{ auftreten könnte,} \end{aligned}$$

was jedoch auch hier ausgeschlossen wird). Durch Umordnung (mit Hilfe der anfangs kennengelernten formalen Regeln) erhalten wir nunmehr

$$\begin{aligned} (13) \quad f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1}}{n + 1}\right) &= \\ &= f(x) < \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) + f(x_{n+1})}{n + 1} \end{aligned}$$

falls nicht  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x_{n+1}$  ist.

Wie kann man sich nun diesen Gedankengang einprägen? Es ist ein häufiger Irrtum, daß man glaubt, das arithmetische Mittel von  $n + 1$  Zahlen sei gleich dem arithmetischen Mittel des arithmetischen Mittels der ersten  $n$  Zahlen und der Zahl  $x_{n+1}$ , wogegen freilich im allgemeinen

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1}}{n+1} \neq \frac{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} + x_{n+1}}{2}$$

gilt. Wenden wir diesen Fehler zum Nutzen und fragen wir nun nach der Zahl  $y$ , für welche

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1}}{n+1} = \frac{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} + y}{2}$$

richtig ist. Diese Zahl ist

$$y = \frac{x_{n+1} + (n-1) \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1}}{n+1}}{n} = \frac{x_{n+1} + (n-1)x}{n}$$

und auf die somit erhaltene Zerlegung

$$(14) \quad x = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1}}{n+1} = \\ = \frac{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} + \frac{x_{n+1} + (n-1)x}{n}}{2}$$

gründet sich der angeführte Beweis.

Den anderen Beweis verdanke ich einer Mitteilung des Herrn Alfréd Rényi:

$$f(x) = f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1}}{n+1}\right) = \\ = f\left(\frac{(n-1)\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} + \frac{x + (n-1)x_{n+1}}{n}}{n}\right) \leqq$$

$$\begin{aligned} &\leqq \frac{(n-1)f\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}\right) + f\left(\frac{x+(n-1)x_{n+1}}{n}\right)}{n} < \\ &< \frac{(n-1)[f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_n)] + f(x) + (n-1)f(x_{n+1})}{n^2}. \end{aligned}$$

Durch Umordnung erhalten wir wiederum (13). Dieser Beweis hat den Vorteil, daß — wie man dessen bei der vollständigen Induktion gewohnt ist — beim Beweis der für  $n+1$  geltenden Relation (13) nur die auf  $n$  bezügliche Relation (12) herangezogen wird (und zwar dreimal; daß man im ersten Falle nur  $\leqq$ , in den beiden anderen hingegen  $<$  schreiben kann, läßt sich wie vorher einsehen) nicht aber der auf  $n=2$  bezügliche Spezialfall (11). Freilich ist auch an der Verwendung von (11) nichts auszusetzen, da wir einmal schon wissen, daß dieselbe gültig ist. Die Zerlegung

$$(15) \quad x = \frac{x_1+x_2+\dots+x_n+x_{n+1}}{n+1} = \\ = \frac{(n-1)\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n} + \frac{x+(n-1)x_{n+1}}{n}}{n}$$

welche diesem zweiten Beweis zugrunde liegt, kann man sich wie folgt merken: Wir teilen das Intervall zwischen  $\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}$  und  $x_{n+1}$  in  $n+1$  gleiche Teile (s. die Abb. 3, wo wir  $x_{n+1} > \frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}$  angenommen haben, was keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet) und die Teilpunkte seien der Reihe nach  $z_0 = \frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}, z_1, z_2, \dots, z_n,$

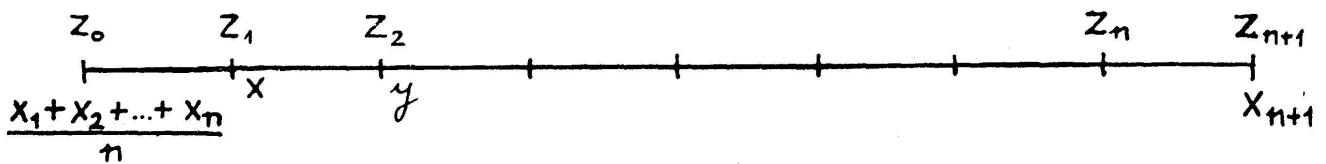


Abb. 3.

$z_{n+1} = x_{n+1}$ . Da  $z_1$  der Schwerpunkt des Systems bestehend aus der im Punkt  $z_{n+1}$  angebrachten Masseneinheit und einer im Punkte  $z_0$  angebrachten Masse von  $n$  Einheiten darstellt (der Abstand des Schwerpunktes von den beiden Massenpunkten ist zu den Massen derselben umgekehrt proportional) gilt

$$z_1 = \frac{n z_0 + z_{n+1}}{n+1} = \frac{n \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} + x_{n+1}}{n+1} = x$$

und aus demselben Grunde ist  $z_n$  der Schwerpunkt einer Masse in  $z_1$  und einer Masse ( $n - 1$ ) in  $z_{n+1}$ :

$$z_n = \frac{z_1 + (n-1) z_{n+1}}{n} = \frac{x + (n-1) x_{n+1}}{n}$$

und  $z_1$  ist der Schwerpunkt einer Masse ( $n - 1$ ) in  $z_0$  und einer Masse 1 in  $z_n$ :

$$x = z_1 = \frac{(n-1) z_0 + z_n}{n} = \frac{(n-1) \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} + \frac{x + (n-1) x_{n+1}}{n}}{n},$$

das ist nun aber gerade (15). Auf Grund von Abb. 3 lässt sich (14) auf ähnliche oder noch einfachere Weise veranschaulichen:

$$z_1 = x, \quad z_2 = \frac{(n-1)x + x_{n+1}}{n} = y,$$

$$x = z_1 = \frac{z_0 + z_2}{2} = \frac{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} + \frac{(n-1)x + x_{n+1}}{n}}{2}.$$

Da aus der Jensen-Konvexität (12) und aus der von uns bezüglich des arithmetischen und des geometrischen Mittels zweier Zahlen bewiesenen Ungleichung (1) die Jensen-Konvexität der Funktion  $a^x$  folgt, gilt

$$a^{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}} < \frac{a^{x_1} + a^{x_2} + \dots + a^{x_n}}{n} \text{ falls nicht } x_1 = x_2 = \dots = x_n$$

ist, und indem wir  $a^{x_k} = t_k$  setzen ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) erhalten wir

daraus

$$(16) \quad \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_n}{n} > \sqrt[n]{t_1 t_2 \dots t_n}, \quad (t_k > 0; k = 1, 2, \dots, n)$$

falls nur nicht  $t_1 = t_2 = \dots = t_n$  ist.

Dies ist die *Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel von n Zahlen*. Wollen wir etwa nur diese Ungleichung herleiten, dann erübrigt es sich natürlich die allgemeine Theorie der Jensen-konvexen Funktionen heranzuziehen, jede der oben angeführten Methoden ermöglicht es uns, aus (1) die Ungleichung (16) unmittelbar herzuleiten.

In (12) können — wie wir dies bereits gesehen haben — gewisse  $x_k$ -s — nur nicht alle — einander auch gleich sein, so daß wir die folgende, *mit Gewichten versehene m-gliedrige Jensensche Ungleichung* erhalten:

$$(17) \quad f\left(\frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_m x_m}{p_1 + p_2 + \dots + p_m}\right) < \\ < \frac{p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) + \dots + p_m f(x_m)}{p_1 + p_2 + \dots + p_m}, \quad (p_k > 0, k = 1, 2, \dots, m)$$

mit Ausnahme des Falles  $x_1 = x_2 = \dots = x_m$ .

Dabei gilt diese Ungleichung nicht nur für positive ganze Zahlen  $p_1, p_2, \dots, p_m$ , sondern auch im Falle, wo die  $p_1, p_2, \dots, p_m$  positiv rational sind, da wir ja in diesem letzteren Falle eine Erweiterung mit dem gemeinsamen Nenner der Brüche  $p_1, p_2, \dots, p_m$  vornehmen können. (Für  $x_1 = x_2 = \dots = x_m$  gilt wiederum

$$f\left(\frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_m x_m}{p_1 + p_2 + \dots + p_m}\right) = \frac{p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) + \dots + p_m f(x_m)}{p_1 + p_2 + \dots + p_m}.$$

Ist die Funktion  $f(x)$  stetig, so können wir die Gültigkeit unseres Ergebnisse auch auf den Fall beliebiger positiver reeller Zahlen  $p_k$  ausdehnen. (Freilich eignet sich zu diesem Zwecke ein einfacher Grenzübergang nicht, da infolge desselben die Relation  $<$  in (17) in  $\leq$  übergehen könnte.) Indessen benötigen wir aus der Theorie der stetigen Funktionen nur das folgende Ergebnis: Ist eine stetige Funktion an einer Stelle kleiner, an

einer anderen Stelle aber größer als eine lineare Funktion, so gibt es eine Zwischenstelle, an welcher beide Funktionen einander gleich sind; anschaulich gesprochen: Verläuft eine stetige Kurve an einer Stelle oberhalb, an einer anderen Stelle unterhalb einer Geraden, so schneidet sie die Gerade irgendwo zwischen diesen beiden Stellen, und im Falle des Vorhandenseins mehrerer solcher Stellen gibt es unter diesen eine erste und eine letzte. Auf Grund dieser Tatsache zeigen wir nun, daß aus (11) die zweigliedrige gewichtete Jenseinsche Ungleichung

$$(18) \quad f\left(\frac{p_1 x_1 + p_2 x_2}{p_1 + p_2}\right) < \frac{p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2)}{p_1 + p_2},$$

$(p_1 > 0, p_2 > 0)$ , falls  $x_1 \neq x_2$  ist,

für beliebige positive reelle Zahlen  $p_1, p_2$ , folgt. — In der Tat bedeutet (18), daß alle innere (d. h. vom Anfangs- und vom Endpunkt verschiedene) Punkte sämtlicher Sehnen der Kurve der Funktion  $f(x)$  oberhalb der Kurve liegen. Solche Funktionen werden *konvex* genannt. (Auf ähnliche Weise werden auch *im weiteren Sinne* konvexe, *konkav*e und im weiteren Sinne konkave Funktionen definiert, indem man in (18) statt  $<$  die Relationen  $\leq$ ,  $>$  bzw.  $\geq$  setzt.) Wie wir uns daran erinnern, bedeutet (11), daß der Mittelpunkt jeder zur Kurve gehöriger Sehne oberhalb der Kurve liegt. Jetzt beweisen wir das folgende Resultat, welches allgemeiner ist, als unsere vorige Behauptung: *Liegt je ein Punkt jeder Sehne eines stetigen Kurvenstückes oberhalb der Kurve, so liegen auch sämtliche Punkte aller dieser Sehnen oberhalb der Kurve.* (D. h. gibt es für beliebige Werte  $x_1 \neq x_2$  je ein positives reelles Paar  $p_1 > p_2 > 0$  für welches (18) erfüllt ist, so gilt (18) für beliebige  $x_1 \neq x_2$ ,  $p_1 > 0$ ,  $p_2 > 0$ .) Läge nämlich irgendein Punkt der Kurve oberhalb einer Sehne, dann gäbe es zu diesem Punkt (Abb. 4) infolge der erwähnten Eigenschaft der stetigen Funktionen einen letzten vorangehenden und einen ersten nachfolgenden auf der Sehne liegenden Punkt  $P_1$  bzw.  $P_2$ . Dann läge aber jeder innere Punkt der Sehne  $P_1 P_2$  unterhalb der Kurve, was unserer Annahme widerspricht. Also kann kein Punkt irgendeiner Sehne oberhalb der Kurve liegen. Dann liegen aber sämtliche inneren Punkte jeder Sehne unterhalb der Kurve,

denn es sei (Abb. 5)  $AB$  eine beliebige Sehne und  $P$  ein beliebiger innerer Punkt des Kurvenstückes  $AB$ . Unserer Voraussetzung gemäß liegt ein Punkt  $P'$  des Kurvenstückes  $AB$  unterhalb der

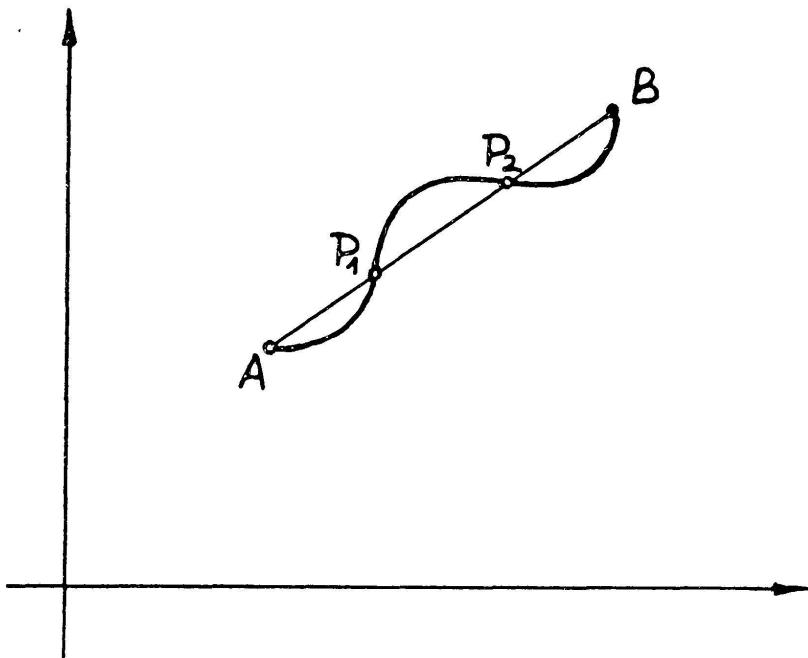


Abb. 4.

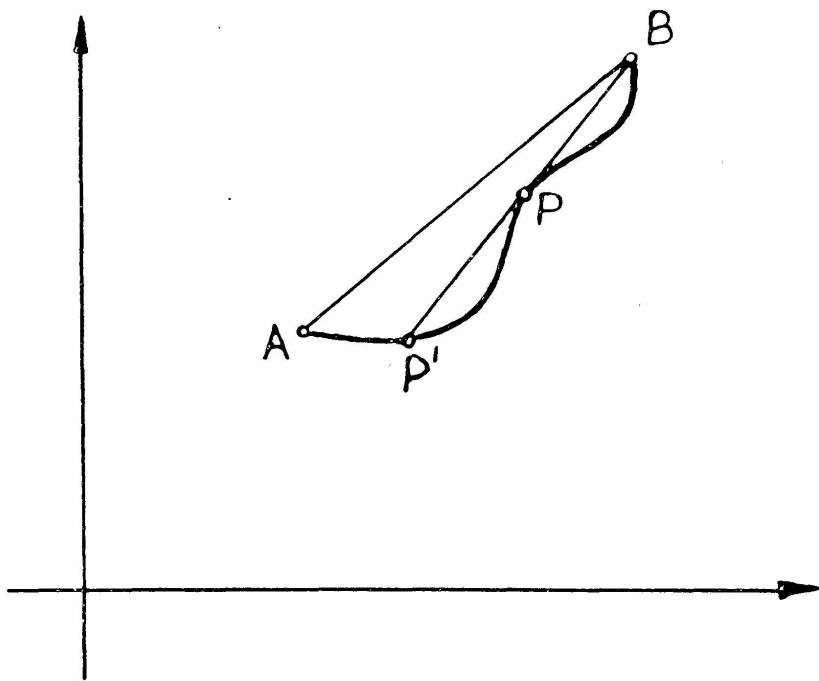


Abb. 5.

Sehne  $AB$ ; es soll dieser Punkt zum Kurvenstück  $AP$  gehören. Dann liegt  $P$  nicht oberhalb der Sehne  $P' B$ , also liegt er streng unterhalb der Sehne  $AB$ . Damit haben wir (18) aus (11) für beliebige positive reelle Werte  $p_1, p_2$  hergeleitet.

Jetzt beweisen wir (17) von (18) ausgehend bereits ohne Berufung auf die Stetigkeit für beliebige positive reelle Werte  $p_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) mit vollständiger Induktion. Gemäß (18) gilt (17) in der Tat für  $m = 2$ . Wir zeigen jetzt, daß aus der Gültigkeit für  $m$  auch die Gültigkeit dieser Relation für  $m + 1$  folgt: Hierbei verwenden wir zuerst (18) und dann (17). Es kann in

$$\begin{aligned}
 & f\left( \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_m x_m + p_{m+1} x_{m+1}}{p_1 + p_2 + \dots + p_m + p_{m+1}} \right) = \\
 & = f\left( \frac{(p_1 + p_2 + \dots + p_m) \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_m x_m}{p_1 + p_2 + \dots + p_m} + p_{m+1} x_{m+1}}{(p_1 + p_2 + \dots + p_m) + p_{m+1}} \right) \leq \\
 & \leq \frac{(p_1 + p_2 + \dots + p_m) f\left( \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_m x_m}{p_1 + p_2 + \dots + p_m} \right) + p_{m+1} f(x_{m+1})}{p_1 + p_2 + \dots + p_m + p_{m+1}} \leq \\
 & \leq \frac{(p_1 + p_2 + \dots + p_m) \frac{p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) + \dots + p_m f(x_m)}{p_1 + p_2 + \dots + p_m} + p_{m+1} f(x_{m+1})}{p_1 + p_2 + \dots + p_m + p_{m+1}} = \\
 & = \frac{p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) + \dots + p_m f(x_m) + p_{m+1} f(x_{m+1})}{p_1 + p_2 + \dots + p_m + p_{m+1}}.
 \end{aligned}$$

nicht an beiden Stellen für die Relation  $\leq$  der Fall  $=$  eintreten,

da dann  $\frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_m x_m}{p_1 + p_2 + \dots + p_m} = x_{m+1}$  und  $x_1 = x_2 = \dots = x_m$

also auch  $x_1 = x_2 = \dots = x_m = x_{m+1}$  wäre, was auch hier ausgeschlossen wird. Damit haben wir (17) in vollkommener Allgemeinheit bewiesen. — Hier läßt sich der Grundgedanke des Beweises noch leichter einprägen, als in den vorangehenden

Fällen.  $\frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_m x_m}{p_1 + p_2 + \dots + p_m}$  bedeutet nämlich den Schwerpunkt der Punkte  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , falls dieselben der Reihe nach mit den Massen  $p_1, p_2, \dots, p_m$  versehen sind, und der Schwerpunkt von  $m + 1$  Punkten läßt sich bestimmen, indem man die Massen der ersten  $m$  Punkte im Schwerpunkt derselben vereinigt denkt, und dann den Schwerpunkt dieses mit der

entsprechenden Masse versehenen Punktes und des Punktes  $x_{m+1}$  mit Masse  $p_{m+1}$  bildet:

$$\frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_m x_m + p_{m+1} x_{m+1}}{p_1 + p_2 + \dots + p_m + p_{m+1}} = \\ = \frac{(p_1 + p_2 + \dots + p_m) \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_m x_m}{p_1 + p_2 + \dots + p_m} + p_{m+1} x_{m+1}}{(p_1 + p_2 + \dots + p_m) + p_{m+1}}.$$

Wegen der Jensen-Konvexität und Stetigkeit der Funktion  $a^x$  gilt nach (17)

$$a^{\frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}} < \frac{p_1 a^{x_1} + p_2 a^{x_2} + \dots + p_n a^{x_n}}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$$

falls nur nicht  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$  ist, und falls wir wiederum  $a^{x_k} = t_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) setzen, so ergibt sich zwischen den gewichteten arithmetischen und geometrischen Mitteln von  $n$  Zahlen die Ungleichung

$$(19) \quad \frac{p_1 t_1 + p_2 t_2 + \dots + p_n t_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} > \\ < \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_n}{\sqrt[p_1 + p_2 + \dots + p_n]{t_1^{p_1} t_2^{p_2} \dots t_n^{p_n}}}, \quad (t_k > 0, p_k > 0; k = 1, 2, \dots, n)$$

falls nur nicht  $t_1 = t_2 = \dots = t_n$  ist.

Indem wir hierin  $t_1 = \frac{1}{t'_1}, t_2 = \frac{1}{t'_2}, \dots, t_n = \frac{1}{t'_n}$  setzen, erhalten

wir nun

$$\frac{\frac{p_1}{t'_1} + \frac{p_2}{t'_2} + \dots + \frac{p_n}{t'_n}}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} > \frac{1}{\sqrt[p_1 + p_2 + \dots + p_n]{t'^{p_1}_1 t'^{p_2}_2 \dots t'^{p_n}_n}}, \quad (t'_k > 0, p_k > 0).$$

Lassen wir hier die Kommas weg, und multiplizieren wir beide Seiten mit dem Produkt der reziproken Werte der beiden Seiten (dies ist nach den formalen Regeln der Umformung von Ungleichungen zulässig), so erhalten wir eine andere wichtige Ungleichung zwischen den gewichteten geometrischen und harmonischen Mitteln von  $n$  Zahlen:

$$(20) \quad \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_n}{\sqrt{t_1^{p_1} t_2^{p_2} \dots t_n^{p_n}}} > \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_n}{\frac{p_1}{t_1} + \frac{p_2}{t_2} + \dots + \frac{p_n}{t_n}}, \quad (t_k > 0, p_k > 0; k = 1, 2, \dots, n)$$

falls nur nicht  $t_1 = t_2 = \dots = t_n$  ist.

Ein Vergleich von (19) und von (20) ergibt folgende *Ungleichung zwischen den gewichteten arithmetischen und harmonischen Mitteln von n Zahlen*:

$$\begin{aligned} \frac{p_1 t_1 + p_2 t_2 + \dots + p_n t_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} &> \\ &> \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_n}{\frac{p_1}{t_1} + \frac{p_2}{t_2} + \dots + \frac{p_n}{t_n}}, \quad (t_k > 0, p_k > 0; k = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

falls nur nicht  $t_1 = t_2 = \dots = t_n$  ist.

Multiplizieren wir hier beide Seiten mit dem Produkt der Nenner, so folgt

$$(p_1 t_1 + p_2 t_2 + \dots + p_n t_n) \left( \frac{p_1}{t_1} + \frac{p_2}{t_2} + \dots + \frac{p_n}{t_n} \right) > (p_1 + p_2 + \dots + p_n)^2$$

und indem wir hier  $p_k = a_k b_k$ ,  $t_k = \frac{a_k}{b_k}$  setzen, erhalten wir abermals eine wichtige Ungleichung:

$$(21) \quad (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) > (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2$$

falls nur nicht  $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$  ist. (In diesem letzteren Falle steht in (21) statt  $>$  das Gleichheitszeichen.)

Dies ist die *Cauchy'sche Ungleichung*. Zwar gilt der obige Beweis wegen  $p_k > 0$ ,  $t_k > 0$  nur für  $a_k b_k > 0$ , doch lässt sich diese Beschränkung leicht eliminieren. Ist nämlich z. B.  $a_1 b_1 < 0$ , so gilt

$$\begin{aligned} (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 &< (-a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 < \\ &< [(-a_1)^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2](b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) = \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2), \end{aligned}$$

weil  $-a_1 b_1$  schon positiv ist, und ist z. B.  $a_n b_n = 0$  so erhält man, indem man (21) statt für  $n$  für  $n - 1$  schreibt,

$$\begin{aligned} (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_{n-1} b_{n-1} + a_n b_n)^2 &= \\ &= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_{n-1} b_{n-1})^2 < \\ &< (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_{n-1}^2) \leq \\ &\leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2 + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_{n-1}^2 + b_n^2) \end{aligned}$$

und auf ähnliche Weise kann man verfahren, auch wenn mehrere der  $a_k b_k$  negativ oder gleich Null sind. Damit haben wir (21) für sämtliche Werte der  $a_k b_k$  bewiesen.

Auf ähnliche Weise, wie (19) aus der Konvexität von  $a^x$ , folgt aus der Konvexität der Funktion  $x^{\frac{r}{q}}$  ( $r > q$ ), daß jede der Potenzmittel

$$\begin{aligned} \sqrt[r]{\frac{x_1^r + x_2^r}{2}}, \quad \sqrt[r]{\frac{x_1^r + x_2^r + \dots + x_n^r}{n}}, \quad \sqrt[r]{\frac{p_1 x_1^r + p_2 x_2^r}{p_1 + p_2}}, \\ \sqrt[r]{\frac{p_1 x_1^r + p_2 x_2^r + \dots + p_n x_n^r}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}} \end{aligned}$$

bei konstanten positiven Werten von  $x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n$  mit  $r$  zunimmt. Strebt  $r$  gegen 0, so ist der Grenzwert dieser Ausdrücke nichts anderes als das entsprechende geometrische Mittel, strebt  $r$  gegen  $-\infty$  bzw. gegen  $+\infty$ , so ist der Grenzwert die kleinste bzw. die größte der Zahlen  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Wächst  $r$  von  $-\infty$  bis  $+\infty$ , so durchläuft das  $r$ -te Potenzmittel das Intervall zwischen diesen beiden Zahlen (s. [17]).

Auch die — meistens ungeklärt gelassene — Frage ist von Interesse, was sich z. B. in (18) ändert, falls die reellen Zahlen  $p_1, p_2$  nicht positiv sind. Für  $p_1 = p_2 = 0$  werden die auf beiden Seiten von (18) auftretenden Brüche offenbar sinnlos; ist  $p_1 = 0$  oder  $p_2 = 0$ , so gilt

$$f\left(\frac{p_1 x_1 + p_2 x_2}{p_1 + p_2}\right) = \frac{p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2)}{p_1 + p_2}.$$

Für  $p_1 < 0$  und  $p_2 < 0$  behält (18) unveränderte Gültigkeit, da sich die beiden Brüche durch  $(-1)$  erweitern lassen. Was

geschieht aber im Falle  $p_1 p_2 < 0$ ? Ist  $p_1 + p_2 = 0$ , so haben die in (18) auftretenden Brüche wiederum keinen Sinn. Anderseits haben wir gesehen, daß durch (18) die Tatsache zum Ausdruck gebracht wird, daß jeder innere Punkt der Sehne oberhalb der Kurve liegt. Zugleich (Abb. 6) liegt bei solchen konvexen

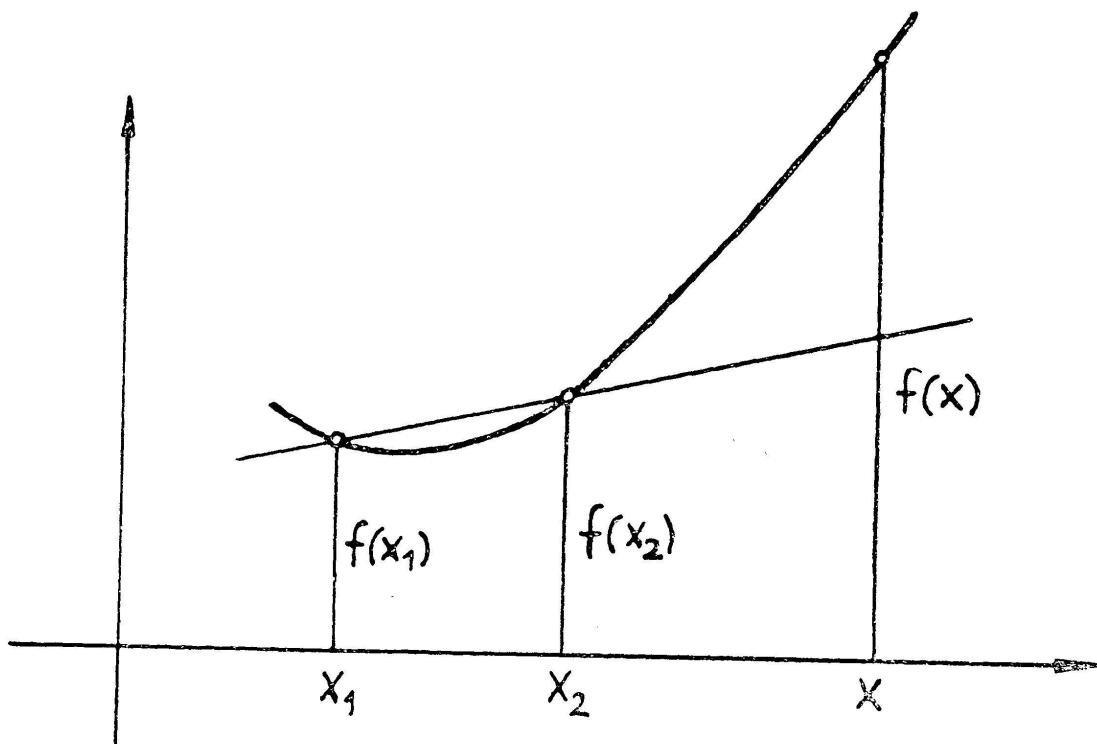


Abb. 6.

Funktionen jeder außerhalb der Sehne liegende Punkt einer jeden Sekante unterhalb der Kurve. Mit Formeln ausgedrückt bedeutet das, daß

$$f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_1) < f(x)$$

ist, falls  $x$  nicht in  $[x_1, x_2]$  liegt.

Setzen wir  $x_2 - x = p_1$ ,  $x - x_1 = p_2$ , so ist  $p_1 p_2 < 0$ , falls  $x$  nicht in  $[x_1, x_2]$  liegt, aber es ist  $p_1 + p_2 \neq 0$ . Das ergibt eben

$$f\left(\frac{p_1 x_1 + p_2 x_2}{p_1 + p_2}\right) > \frac{p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2)}{p_1 + p_2}, \quad (p_1 p_2 < 0, p_2 \neq -p_1, x_1 \neq x_2),$$

womit wir die zwischen  $f\left(\frac{p_1 x_1 + p_2 x_2}{p_1 + p_2}\right)$  und  $\frac{p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2)}{p_1 + p_2}$

herrschenden relativen Grösserverhältnisse für den Fall konvexer Funktionen vollends geklärt haben. — Insbesondere folgt aus der Konvexität von  $(1+h)^x$  ( $h > -1$ ,  $h \neq 0$ ) (s. Abb. 7), daß  $(1+h)^x < 1+hx$  für  $0 < x < 1$  und  $(1+h)^x > 1+hx$  für  $x < 0$  oder  $x > 1$  gilt. (Für  $x = 0$  und für  $x = 1$  gilt  $(1+h)^x = 1+hx$ .) Dies ist die *Bernoullische Ungleichung*.

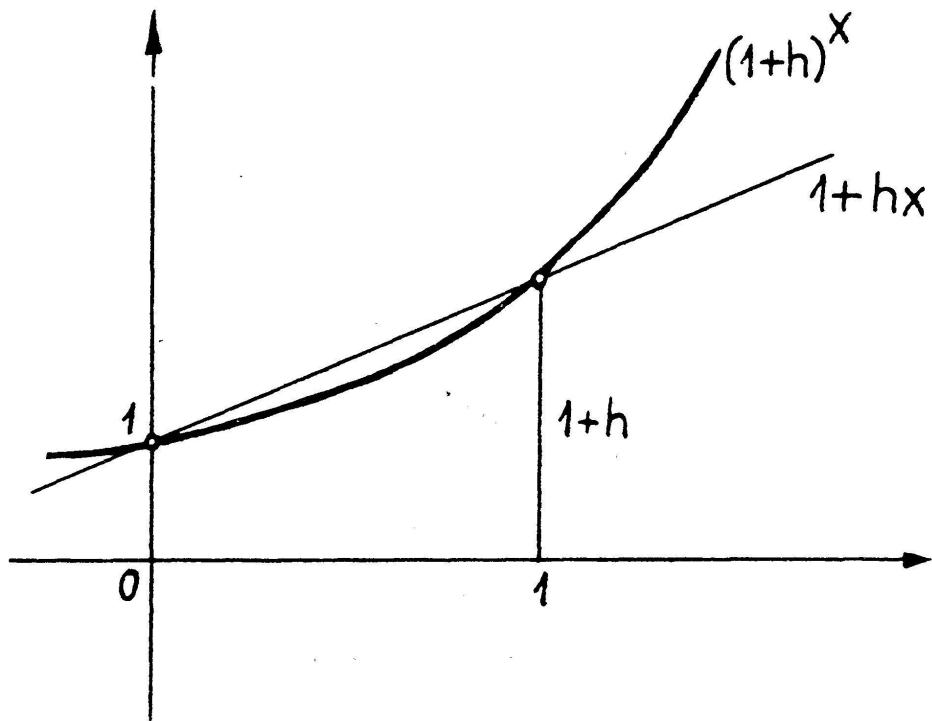


Abb. 7.

Unsere Ergebnisse für Jensen-konvexe und konvexe Funktionen bleiben in unveränderter Form und mit demselben Beweis auch im Falle *konvexer Funktionen mehrerer Veränderlichen* gültig. Gilt z. B. immer

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) < \frac{f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2)}{2}$$

mit Ausnahme von  $x_1 = x_2$ ,  $y_1 = y_2$ ,  
so gilt auch

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}, \frac{y_1+y_2+\dots+y_n}{n}\right) &< \\ &< \frac{f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) + \dots + f(x_n, y_n)}{n}, \end{aligned}$$

falls nur nicht  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$  und  $y_1 = y_2 = \dots = y_n$  ist. Einen ähnlichen Sachverhalt haben wir auch dann, falls statt  $<$  eine der Relationen  $\leq, >, \geq$  gilt. (Jensen-konvexe, im weiteren Sinne Jensen-konvexe, Jensen-konkave bzw. im weiteren Sinne Jensen-konkave Funktionen zweier Veränderlichen.) So folgt z. B. aus

$$\sqrt{\frac{x_1 + x_2}{2}} \sqrt{\frac{y_1 + y_2}{2}} > \frac{\sqrt{x_1 y_1} + \sqrt{x_2 y_2}}{2} \quad \text{mit Ausnahme von } \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$$

die Relation

$$\sqrt{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}} \sqrt{\frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}} > \frac{\sqrt{x_1 y_1} + \sqrt{x_2 y_2} + \dots + \sqrt{x_n y_n}}{n}$$

falls nur nicht  $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \dots = \frac{x_n}{y_n}$  ist.

Indem wir hier beide Seiten durch  $n$  multiplizieren und auf das Quadrat erheben, erhalten wir nach Einführung der Bezeichnungen  $x_k = a_k^2$ ,  $y_k = b_k^2$  gerade die Cauchy'sche Ungleichung (21). Um an der Hand eines Beispiels zu zeigen, wie man unsere allgemeinen Beweise auf konkrete Fälle anwenden kann, beweisen wir jetzt die Cauchy'sche Ungleichung bzw. die (für positive  $x_k, y_k$ ) äquivalente Ungleichung

$$(22) \quad \sqrt{x_1 + x_2 + \dots + x_n} \sqrt{y_1 + y_2 + \dots + y_n} > \sqrt{x_1 y_1} + \sqrt{x_2 y_2} + \dots + \sqrt{x_n y_n}$$

falls nur nicht  $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \dots = \frac{x_n}{y_n}$  ist,

auch so, wie wir (12) aus (11) gewonnen haben:

$$(23) \quad \sqrt{x_1 + x_2} \sqrt{y_1 + y_2} > \sqrt{x_1 y_1} + \sqrt{x_2 y_2}$$

mit Ausnahme von  $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ . Es ist nämlich

$$x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2 > x_1 y_1 + 2 \sqrt{x_1 y_1 x_2 y_2} + x_2 y_2$$

d. h.

$$\frac{x_1 y_2 + x_2 y_1}{2} > \sqrt{x_1 y_2 x_2 y_1}$$

falls nur nicht  $x_1 y_2 = x_2 y_1$  ist. (Das arithmetische Mittel ist größer als das geometrische.) (22) gilt also für  $n = 2$ . Um (22) durch vollständige Induktion zu beweisen, müssen wir zeigen, daß aus der Gültigkeit dieser Relation für  $n$  auch seine Gültigkeit für  $n+1$  folgt. Führen wir die Bezeichnungen  $x = x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1}$ ,  $y = y_1 + y_2 + \dots + y_n + y_{n+1}$  ein, so erhalten wir in der Tat

$$\begin{aligned} \sqrt{xy} &= \sqrt{x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1}} \sqrt{y_1 + y_2 + \dots + y_n + y_{n+1}} = \\ &= \sqrt{\frac{n+1}{2n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + \left[ \frac{n+1}{2n} x_{n+1} + \frac{n-1}{2n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1}) \right]} \cdot \\ &\quad \cdot \sqrt{\frac{n+1}{2n}(y_1 + y_2 + \dots + y_n) + \left[ \frac{n+1}{2n} y_{n+1} + \frac{n-1}{2n}(y_1 + y_2 + \dots + y_n + y_{n+1}) \right]} \geq \\ &\geq \sqrt{\frac{n+1}{2n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \frac{n+1}{2n}(y_1 + y_2 + \dots + y_n)} + \\ &\quad + \sqrt{\left( \frac{n+1}{2n} x_{n+1} + \frac{n-1}{2n} x \right) \left( \frac{n+1}{2n} y_{n+1} + \frac{n-1}{2n} y \right)} > \\ &> \frac{n+1}{2n} (\sqrt{x_1 y_1} + \sqrt{x_2 y_2} + \dots + \sqrt{x_n y_n}) + \left( \frac{n+1}{2n} \sqrt{x_{n+1} y_{n+1}} + \frac{n-1}{2n} \sqrt{xy} \right) \end{aligned}$$

falls nur nicht  $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \dots = \frac{x_n}{y_n}$

und  $\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} = \frac{x}{y} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{y_1 + y_2 + \dots + y_n}$  ist.

(Wir haben erst (23), dann (22) und dann wieder (23) verwendet.) Eine Umordnung der Glieder ergibt jetzt

$$\begin{aligned} (n+1) \sqrt{x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1}} \sqrt{y_1 + y_2 + \dots + y_n + y_{n+1}} &= \\ &= (n+1) \sqrt{xy} > (n+1) (\sqrt{x_1 y_1} + \sqrt{x_2 y_2} + \dots + \sqrt{x_n y_n} + \\ &\quad + \sqrt{x_{n+1} y_{n+1}}) \end{aligned}$$

falls nicht  $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \dots = \frac{x_n}{y_n} = \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}$  ist.

Durch Vereinfachung mit  $(n+1)$  ergibt sich daraus die zu beweisende Ungleichung (22) für  $(n+1)$ . (Ein dem zur Herleitung von (12) benutzten zweiten Beweis ähnlicher Gedankengang würde hier außer (22) wiederum auch (23) verwenden.) Somit haben wir (21) für positive Werte der  $a_k$  und der  $b_k$  bewiesen. Auf den Fall nichtpositiver Werte lässt sich unser Ergebnis auf ähnliche Weise übertragen, wie beim vorangehenden Beweis.

Die Cauchy'sche Ungleichung lässt sich auch auf den Fall von mehr als zwei Faktoren sowie auf den Fall von Exponenten die von zwei (bzw. von  $\frac{1}{2}$ ) verschieden sind, verallgemeinern (*Höldersche Ungleichung*), und ist der *Minkowskischen Ungleichung*

$$\sqrt[r]{\sum_{j=1}^m \left( \sum_{k=1}^n a_{jk} \right)^r} < \sum_{k=1}^n \sqrt[r]{\sum_{j=1}^m a_{jk}^r}$$

falls nur nicht  $\frac{a_{1k}}{a_{1l}} = \frac{a_{2k}}{a_{2l}} = \dots = \frac{a_{nk}}{a_{nl}} (k, l = 1, 2, \dots, n)$  ist,

äquivalent.

**4. Die elementare Lösung von Extremalaufgaben.** In der höheren Analysis haben Ungleichungen viele wichtige Anwendungen, in den Rahmen der Elementarmathematik besteht jedoch ihr Hauptanwendungsbereich in der elementaren Lösung von Extremalaufgaben. — Außer den bereits erwähnten beschäftigen sich u. a. auch die folgenden Arbeiten mit der elementaren Lösung von Extremalaufgaben [1-4, 6-10, 13-16, 18-20, 22-25]. Hier betrachten wir nur einige Aufgaben, die oft auf komplizierterem Wege gelöst werden.

Zuerst leiten wir aus (19) die Lösung einer wichtigen allgemeinen Extremalaufgabe her: *Ist*

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = S = \text{konst.},$$

so wird der größtmögliche Wert des Ausdrucks

$$x_1^{p_1} x_2^{p_2} \dots x_n^{p_n} = P, \quad (x_k > 0, \quad p_k > 0; \quad k = 1, 2, \dots, n)$$

an derjenigen Stelle ( $x_1, x_2, \dots, x_n$ ) angenommen, für welche

$$\frac{a_1 x_1}{p_1} = \frac{a_2 x_2}{p_2} = \dots = \frac{a_n x_n}{p_n}$$

gilt. In der Tat erhalten wir kraft (19)

$$\begin{aligned} P &= \left( \frac{p_1}{a_1} \right)^{p_1} \left( \frac{p_2}{a_2} \right)^{p_2} \dots \left( \frac{p_n}{a_n} \right)^{p_n} \cdot \\ &\quad \cdot \left( \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_n}{\sqrt{\left( \frac{a_1 x_1}{p_1} \right)^{p_1} \left( \frac{a_2 x_2}{p_2} \right)^{p_2} \dots \left( \frac{a_n x_n}{p_n} \right)^{p_n}}} \right)^{p_1 + p_2 + \dots + p_n} < \\ &< \left( \frac{p_1}{a_1} \right)^{p_1} \left( \frac{p_2}{a_2} \right)^{p_2} \dots \left( \frac{p_n}{a_n} \right)^{p_n} \left( \frac{p_1 \frac{a_1 x_1}{p_1} + p_2 \frac{a_2 x_2}{p_2} + \dots + p_n \frac{a_n x_n}{p_n}}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \right)^{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = \\ &= \left( \frac{p_1}{a_1} \right)^{p_1} \left( \frac{p_2}{a_2} \right)^{p_2} \dots \left( \frac{p_n}{a_n} \right)^{p_n} \left( \frac{S}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \right)^{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = k \end{aligned}$$

falls nur nicht  $\frac{a_1 x_1}{p_1} = \frac{a_2 x_2}{p_2} = \dots = \frac{a_n x_n}{p_n}$  ist.

Also ist  $P$  immer *kleiner* als die Konstante  $k$ , mit Ausnahme des Falles  $\frac{a_1 x_1}{p_1} = \frac{a_2 x_2}{p_2} = \dots = \frac{a_n x_n}{p_n}$ , wo sie *gleich* dieser

Konstanten ist. D. h. der Wert von  $P$  wird in diesem letzteren Falle am größten sein. — *Ist P konstant, so nimmt aus dem-*

*selben Grunde S seinen kleinsten Wert für  $\frac{a_1 x_1}{p_1} = \frac{a_2 x_2}{p_2} =$*

$= \dots = \frac{a_n x_n}{p_n}$  an. Ähnliche Behauptungen gelten auch im Falle, wo an der Stelle des Produktes  $P$  eine Summe von mit Koeffizienten versehenen Reziprokwerte  $\frac{1}{x_k}$  oder Quadrate  $x_k^2$  steht.

Mit Hilfe des vorangehenden können wir z. B. die Frage beantworten, welche der quadratischen Pyramiden mit gleicher Seitenkante  $a$  den größten Rauminhalt besitzt. Ist nämlich  $x$

die Grundkante, so ist (Abb. 8)  $a^2 = m^2 + \frac{x^2}{2}$  konstant; statt des Volumens kann man das dreifache desselben betrachten, und

$$3V = x^2 m = x^2 (m^2)^{\frac{1}{2}}$$

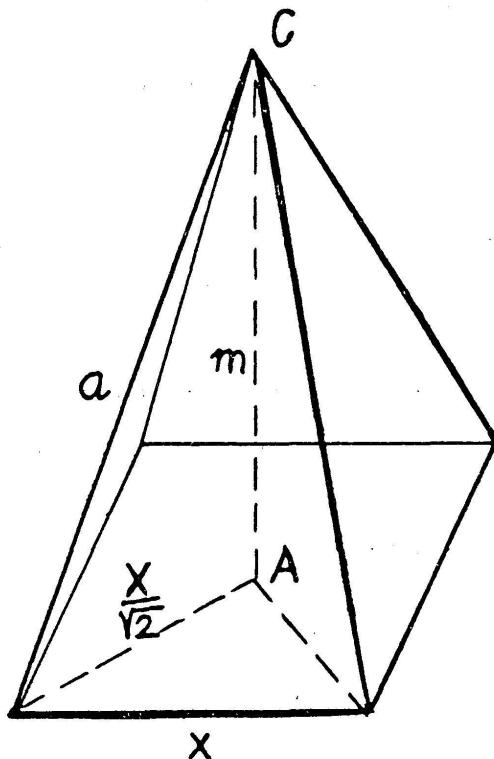


Abb. 8.

ist dann am größten, falls  $\frac{x^2}{2} = 2m^2$  ist, dann ist aber

$$3m^2 = a^2, \quad m = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad \left( \frac{a}{m} = \sqrt{3} \right),$$

$$x = \frac{2a}{\sqrt{3}}.$$

Das Volumen der regelmässigen vierseitigen Pyramide ist also in diesem Falle am größten, und es beträgt  $V = \frac{4a^3}{27}\sqrt{3}$ . — Ein

anderes Beispiel: Welches der geraden Kreiszylinder von gegebener Oberfläche hat maximales Volumen? Die Oberfläche ist

$$F = 2\pi r^2 + 2\pi rm = \text{Konst.},$$

und der Rauminhalt wird offenbar am größten, falls sein vielfaches um  $\frac{1}{\pi}$  am größten wird; nun ist

$$\frac{V}{\pi} = r^2 m = (r^2)^{\frac{1}{2}} (rm)$$

für  $\frac{2\pi r^2}{\frac{1}{2}} = 2\pi rm$  am größten, also ist  $m = 2r$  (gleichseitiger Zylinder) und zwar ist in diesem Falle

$$r = \sqrt{\frac{F}{6\pi}}, \quad m = 2\sqrt{\frac{F}{6\pi}}, \quad V = \frac{F}{3}\sqrt{\frac{F}{6\pi}}.$$

Also hat von allen Zylindern gleicher Oberfläche der gleichseitige Zylinder den größten Rauminhalt.

Diese Methode eignet sich auch zur elementaren Bestimmung der Extremalwerte von Funktionen mehrerer Veränderlichen. (In den beiden soeben angeführten Aufgaben war mit Rücksicht auf  $m^2 + \frac{x^2}{2} = a^2$  bzw. auf  $2\pi r^2 + 2\pi rm = F$  nur je eine Veränderliche frei wählbar.) Wie soll man z. B. aus einer rechteckigen Metallplatte einen Trog mit gleichschenkligem Trapezquerschnitt verfertigen, damit das Flächenmaß des Querschnittes maximal ausfallen soll?

Ist die Breite des Rechtecks  $d$ , die Länge des Trapezschenkels  $x$ , diejenige der kürzeren Parallelseite  $y$ , dann ist

$$y + 2x = a = \text{Konst.},$$

und für das Flächenmaß des Querschnitts erhalten wir, falls  $z$  die Länge der waagerechten Projektion des Schenkels bedeutet (Abb. 9),

$$T = \frac{(y + 2z) + y}{2} m = (y + z)\sqrt{x^2 - z^2} = (y + z)(x + z)^{\frac{1}{2}}(x - z)^{\frac{1}{2}}.$$

Für die Faktoren auf der rechten Seite gilt

$$2(y + z) + (x + z) + 3(x - z) = 4x + 2y = a = \text{Konst.},$$

also ist  $T$  für

$$\frac{2(y+z)}{1} = \frac{x+z}{\frac{1}{2}} = \frac{3(x-z)}{\frac{1}{2}}, \quad x = y, \quad z = \frac{x}{2},$$

$$\left( \cos \alpha = \frac{z}{x} = \frac{1}{2}, \quad \alpha = 60^\circ \right)$$

am größten. Das auf diese Weise erhaltene Trapez ist nichts anderes als die „untere Hälfte“ eines regelmässigen Sechsecks. —

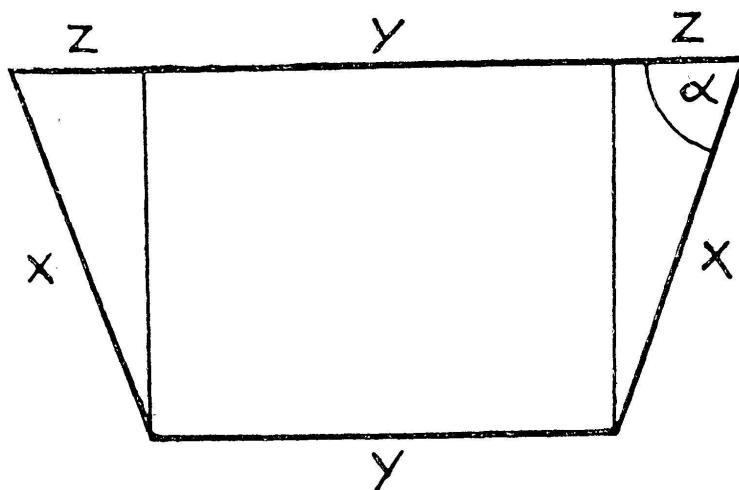


Abb. 9.

Da man beweisen kann, daß von den Sechsecken gleichen Umfanges das regelmässige Sechseck das größte Flächenmaß besitzt, erhalten wir (durch symmetrische Ergänzung zu einem Sechseck) auch dann dieselbe Lösung der Aufgabe, falls wir nur voraussetzen, daß der Querschnitt ein Viereck (d. h. nicht notwendigerweise ein Trapez) ist.

Eine weniger unmittelbare Anwendung unserer allgemeinen Methode ist die Bestimmung der Extremalwerte allgemeiner Polynome dritter Ordnung, wie dies z. B. zur Lösung der folgenden Aufgabe erforderlich ist: Aus einem Rechteck mit Seiten  $a$ ,  $b$  soll durch Ausschneiden kleiner Quadrate an den Ecken das Netz einer offenen Schachtel von größtmöglichem Umfang hergestellt werden. Indem wir die Seitenlänge der ausgeschnittenen Quadrate durch  $x$  bezeichnen, erhalten wir (s. Abb. 10) für

das Volumen der Schachtel den folgenden Ausdruck:

$$V = x(a - 2x)(b - 2x).$$

Hier ist  $4x + (a - 2x) + (b - 2x)$  konstant, aber aus  $4x = a - 2x = b - 2x$  würde  $a = b$  folgen, so daß eine unmittelbare Anwendung unserer Methode nur im Falle  $b = a$  möglich wäre. Darum multiplizieren wir  $(b - 2x)$  mit einem später zu bestimmenden konstanten Faktor  $k$ .  $Vk$  hat zugleich mit  $V$  maximales Volumen, und es ist

$$Vk = x(a - 2x)(kb - 2kx).$$

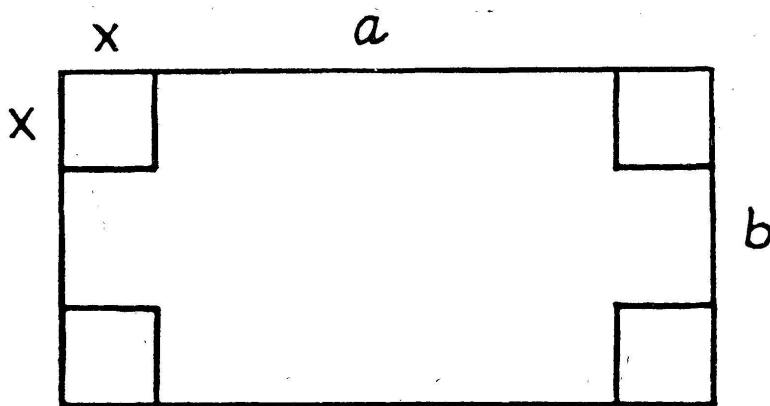


Abb. 10.

Andererseits ist

$$(kb - 2kx) + (a - 2x) + (2k + 2)x = kb + a = \text{Konst.},$$

also ist  $V$  dort am größten, wo

$$k(b - 2x) = a - 2x = (2k + 2)x$$

ist. Daraus läßt sich der bisher noch unbekannte Faktor  $k$  und auch das gesuchte  $x$  bestimmen:

$$k = \frac{a - 2x}{b - 2x}, \quad a - 2x = \left(2 \frac{a - 2x}{b - 2x} + 2\right)x,$$

$$(a - 2x)(b - 2x) - 2(a - 2x)x - 2(b - 2x)x = 0,$$

$$12x^2 - 4(a + b)x + ab = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{2(a + b) \pm \sqrt{4(a + b)^2 - 12ab}}{12} = \frac{a + b \pm \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{6}.$$

Da (z. B. für  $b \leq a$ )

$$x = \frac{a+b+\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6} \geq \frac{a+b+b}{6} \geq \frac{b}{2}$$

keine Lösung unserer Aufgabe sein kann (Abb. 10) muß man aus dem Rechteck Quadrate der Seitenlänge

$$x = \frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$$

herausschneiden, damit eine offene Schachtel von maximalen Volumen entsteht; das Volumen derselben ist dann

$$V = \frac{1}{54} (a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}) (2a-b+\sqrt{a^2-ab+b^2}) \\ (2b-a+\sqrt{a^2-ab+b^2}).$$

Es hat sich, wie man leicht berechnet,  $k = \frac{a-b+\sqrt{a^2-ab+b^2}}{b}$

als geeigneter Multiplikationsfaktor herausgestellt, aber es wäre wohl kein natürliches Verfahren, sogleich mit diesem Faktor zu beginnen.

Wie wir sehen, kann also bereits die Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel (und auf ähnliche Weise auch jede Ungleichung zwischen den übrigen Mittelwerten) zu einer verhältnismässig einfachen, elementaren Lösung zahlreicher Extremalaufgaben führen. Man soll aber diese Methode keineswegs forcieren, da auch viele andere Ungleichungen zu ähnlichen Zwecken mit Vorteil verwendet werden können. Dies gilt insbesondere für die gleichwertige (weil, wie wir gesehen haben, ebenfalls die Konvexität der Funktion  $a^x$  zum Ausdruck bringende) Bernoullische Ungleichung (s. z. B. [18, 23]), und überhaupt kann jede elementare Ungleichung, in welcher in bestimmten Fällen das Gleichheitszeichen steht, zur elementaren Lösung von Extremalaufgaben verwendet werden. — Hier möchte ich nur noch auf die Ungleichung bezüglich der Diskriminante des Polynoms zweiten Grades und auf die Anwendungsmöglichkeiten derselben hinweisen.

Bekanntlich hat das Polynom zweiten Grades  $ax^2 + bx + c$  keine reelle Wurzel, eine reelle (Doppel-)wurzel, oder aber zwei reelle Wurzel, je nachdem  $b^2 - 4ac < 0$ ,  $b^2 - 4ac = 0$  oder  $b^2 - 4ac > 0$  ist. — Auch daraus läßt sich — und zwar sofort in voller Allgemeinheit — die Cauchy'sche Ungleichung (21) herleiten. In der Tat ist dieser Beweis der am häufigsten benutzte. Wir betrachten das Polynom zweiten Grades:

$$(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)x^2 - 2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)x + \\ + (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) = (a_1 - xb_1)^2 + (a_2 - xb_2)^2 + \dots + (a_n - xb_n)^2.$$

Als Summe von Quadraten ist dieses immer positiv, den Fall

$$a_1 - xb_1 = a_2 - xb_2 = \dots = a_n - xb_n = 0$$

ausgenommen. Dann muß aber, diesen letzteren Fall ausgenommen, die Diskriminante immer negativ sein (das Polynom ist überall positiv, hat also keine reelle Wurzel):

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 - \\ - (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) < 0$$

$$\text{falls nur nicht } \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} \text{ gilt.}$$

Dies ist nun aber nichts anderes als die Cauchy'sche Ungleichung (21).

Auch die Cauchy'sche Ungleichung kann mit Nutzen zur elementaren Lösung von Extremalaufgaben verwendet werden, aber auch in der höheren Analysis und in der nichteuclidischen elliptischen Geometrie fällt ihr eine grundlegende Rolle zu. Von Interesse ist die Tatsache, daß unseres Wissens das in der hyperbolischen (Bolyai-Lobatschewski'schen) Geometrie verwendbare „hyperbolische“ Gegenstück zur Cauchy'schen Ungleichung bisher anscheinend unbekannt geblieben ist:

$$(24) \quad (a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2)(b_1^2 - b_2^2 - \dots - b_n^2) < \\ < (a_1 b_1 - a_2 b_2 - \dots - a_n b_n)^2$$

$$(b_1^2 - b_2^2 - \dots - b_n^2 > 0) \text{ falls nur nicht } \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} \text{ ist.}$$

Auch der Beweis dieser Ungleichung verläuft dem vorigen ganz analog: Das graphische Bild (Abb. 11) des Polynoms zweiten Grades

$$(b_1^2 - b_2^2 - \dots - b_n^2)x^2 - 2(a_1 b_1 - a_2 b_2 - \dots - a_n b_n)x + \\ + (a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2) = (b_1 x - a_1)^2 - (b_2 x - a_2)^2 - \dots - (b_n x - a_n)^2$$

ist wegen  $b_1^2 - b_2^2 - \dots - b_n^2 > 0$  eine nach oben offene Parabel, also nimmt dieses Polynom gewiß positive Werte an (erstreckt

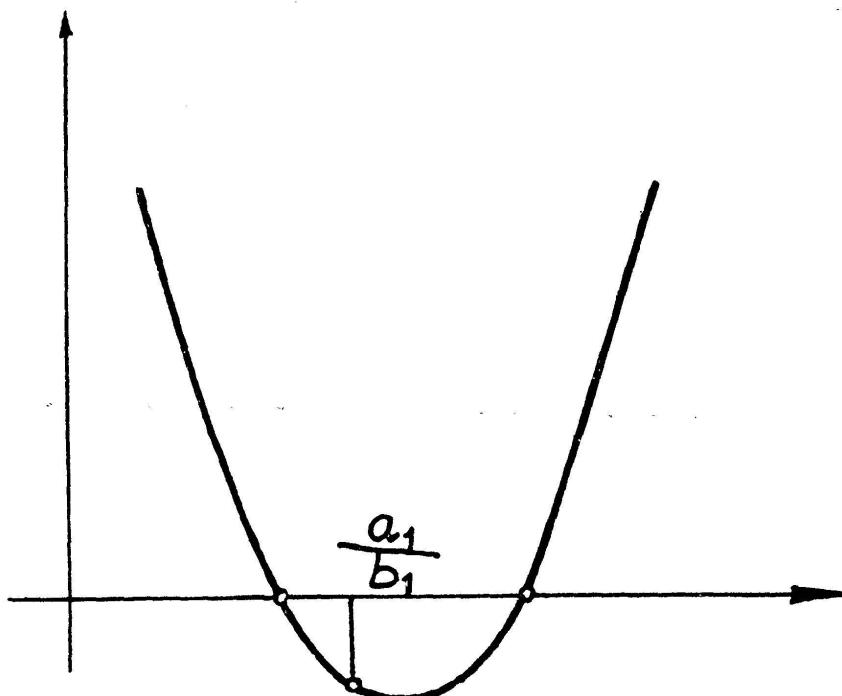


Abb. 11.

sich doch die Parabel nach beiden Seiten hin ins Unendliche).

Zugleich ist aber an der Stelle  $x = \frac{a_1}{b_1}$  (wegen  $b_1^2 - b_2^2 - \dots - b_n^2 > 0$  ist  $b_1 \neq 0$ ) sein Wert

$$-(b_2 \frac{a_1}{b_1} - a_2)^2 - \dots - (b_n \frac{a_1}{b_1} - a_n)^2 > 0$$

falls nur nicht  $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$  ist.

Mit Ausnahme dieses letzteren Falles (in welchem, wie man sofort einsieht, an der Stelle von  $<$  in (24) das Gleichheits-

zeichen stehen würde), nimmt also das Polynom sowohl positive wie auch negative Werte an. Somit gibt es zwei reelle Wurzel, und die Diskriminante muß dementsprechend positiv sein:

$$(a_1 b_1 - a_2 b_2 - \dots - a_n b_n)^2 - (b_1^2 - b_2^2 - \dots - b_n^2)(a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2) > 0,$$

womit wir (24) bewiesen haben.

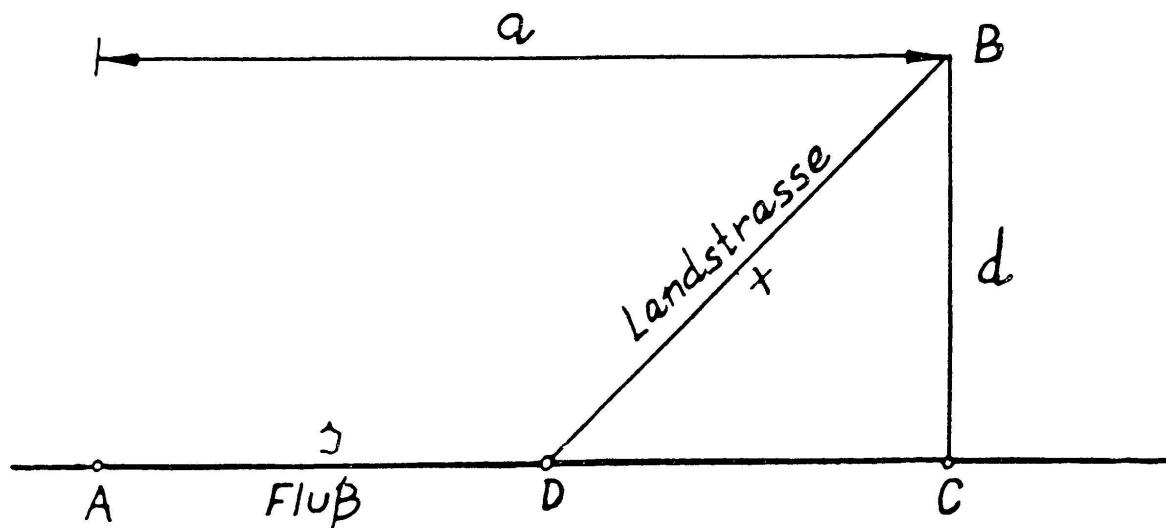


Abb. 12.

Wie man die Diskriminanten-Ungleichung zur Lösung von Extremalaufgaben verwenden kann, zeigen wir an der Hand des folgenden Beispiels:

Gegeben sei ein (als geradlinig dahinfliessend gedachter) Fluß, und in einer Entfernung von  $d$  Kilometer davon die Fabrik  $B$  (Abb. 12). Den zu verarbeitenden Rohstoff erhält diese Fabrik aus dem stromaufwärts gelegenen Hafen  $A$ , welcher von der Projektion  $C$  des Punktes  $B$  auf die Gerade des Flusses um  $a$  Kilometer entfernt liegt. In welcher Richtung soll die Landstraße von  $B$  nach dem Fluße verlaufen, damit die Kosten der Rohstoffzufuhr minimal ausfallen, falls die Kosten pro Tonnen-kilometer des Straßentransportes das Doppelte der Kosten des Wassertransportes betragen. Bezeichnen wir die Stelle der Umladung mit  $D$ , die Länge des Wasserweges mit  $s$  und diejenige des Landstraße mit  $x$ , so wird, wie aus Abb. 12 ersichtlich.

$$a - s = \sqrt{x^2 - d^2}, \quad s = a - \sqrt{x^2 - d^2}$$

und aus der Bedingung für die Transportkosten folgt, daß wir den kleinsten Wert der Funktion

$$y = s + 2x = a - \sqrt{x^2 - d^2} + 2x$$

suchen müssen. Hieraus ergibt sich

$$(25) \quad 3x^2 - 4(y-a)x + (y-a)^2 + d^2 = 0.$$

Hat diese Gleichung überhaupt eine Lösung, so ist die Diskriminante nichtnegativ:

$$4(y-a)^2 - 3(y-a)^2 - 3d^2 \geq 0, \quad (y-a)^2 \geq 3d^2,$$

$$y \geq a + d\sqrt{3}$$

(hier haben wir wiederum die formalen Regeln der Umformung von Ungleichungen verwendet). Wie hieraus ersichtlich, ist der kleinstmögliche Wert von  $y$  gleich  $a + d\sqrt{3}$ , und in diesem Falle erhalten wir aus (25)

$$3x^2 - 4d\sqrt{3}x + 4d^2 = 0 \quad \text{und} \quad x = \frac{2d}{\sqrt{3}}.$$

Bezüglich des Winkels  $CDB$  zur Richtung der Landstraße gilt

$$\sin CDB = \frac{d}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{d. h. } CDB = 60^\circ,$$

so daß man die Landstraße immer unter einem Winkel von  $60^\circ$  führen muß, unabhängig von  $a$ , d. h. unabhängig davon, aus welchem Stromaufwärts liegenden Hafen  $A$  der Transport geschieht. Eine Ausnahme bildet nur der Fall, in welchem die unter dem Winkel von  $60^\circ$  geführte Straße das Flußufer schon hinter dem Hafen  $A$  erreicht. Offensichtlich ist es in diesem Falle angebracht, den Transport nur per Landstraße vorzunehmen.

Obwohl uns die Ungleichungen ein recht wirksames Mittel zur Hand geben, müssen wir der Vollständigkeit halber bemerken, daß es noch andere Methoden gibt, die zur elementaren Lösung von Extremalaufgaben verwendet werden können. In

der Tat führen geometrische Erwägungen oft schneller zum Ziel. (S. z. B. [8, 20].) Als Illustration dürfen die folgenden zwei — ziemlich bekannten — Beispiele dienen:

Zuerst fragen wir danach, wie man aus dem Punkt  $A$  in den Punkt  $B$  unter Berührung der Geraden  $e$  (Abb. 13) auf dem

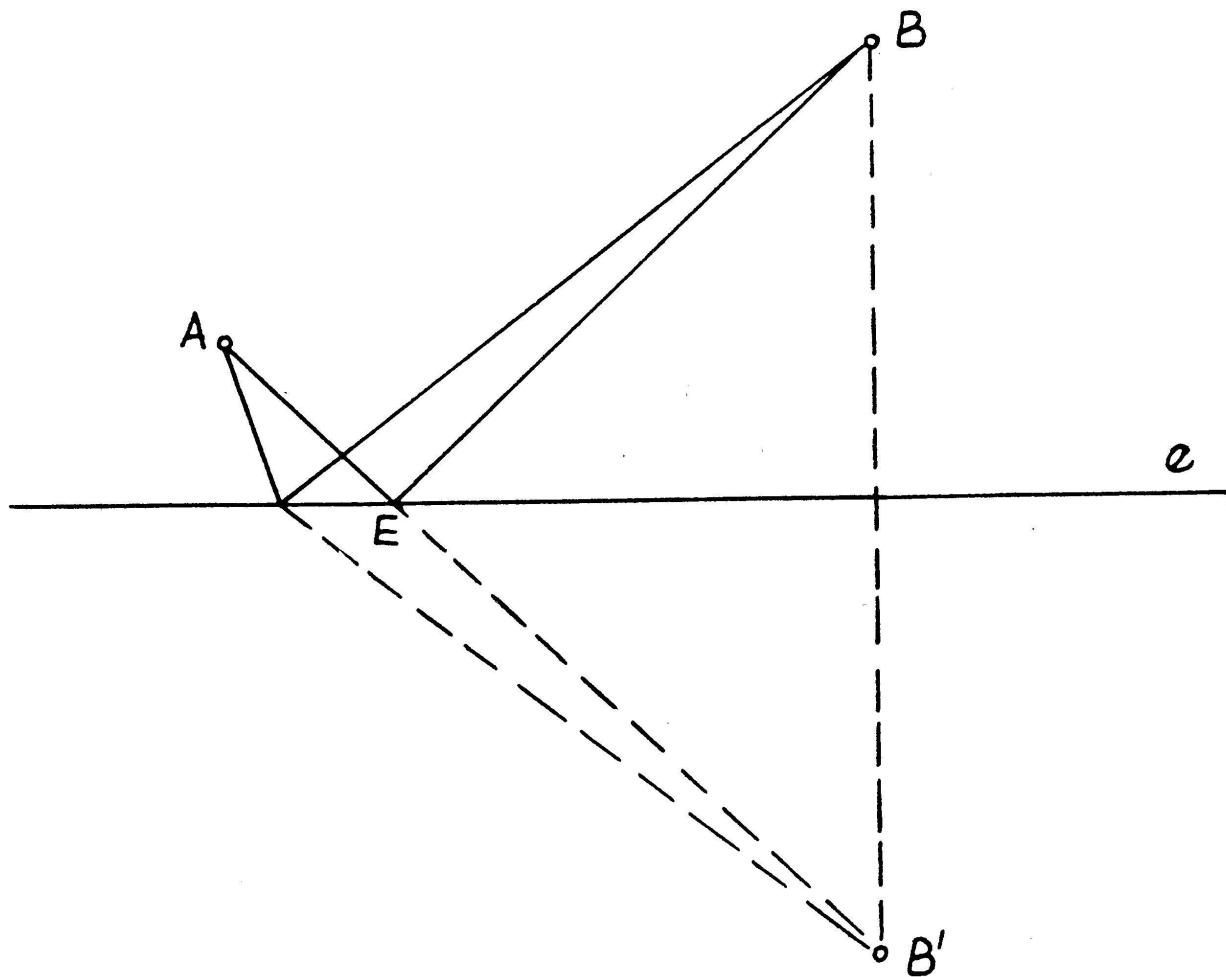


Abb. 13.

kürzesten Wege gelangen kann? (Z. B. will der Reitersmann sein Roß unterwegs im Flusse tränken.) Indem wir den Punkt  $B$  und den zweiten ( $e$  mit  $B$  verbindenden) Teil eines beliebigen Weges auf der Geraden  $e$  spiegeln, sehen wir, daß die Aufgabe mit derjenigen der Aufsuchung des kürzesten Weges zwischen  $A$  und  $B'$  gleichwertig ist. Dieser kürzeste Weg ist nun offenbar die Gerade  $AB'$ , und indem wir den Abschnitt  $EB'$  derselben spiegeln, erhalten wir die Lösung  $AEB$  der Aufgabe. Dieser Weg entfernt sich von  $e$  in der Richtung nach  $B$  unter demselben Winkel, unter welchem er sich von  $A$  ausgehend  $e$  genähert hat.

Bekanntlich gehorcht die Reflexion des Lichtes demselben Gesetz. — Die andere Aufgabe fragt danach, welches von den Dreiecken mit gegebenen Seiten  $a$ ,  $b$  das größte Flächenmaß besitzt. Aus der Abbildung 14 wird ersichtlich, daß bei festbleibender Seite  $a$  die Endpunkte der Seiten der Länge  $b$  auf einem Kreis von Radius  $b$  liegen. Alle diese Dreiecke haben die gemeinsame Basis  $a$ , die Dreieckshöhe und folglich auch das Flächenmaß wird aber am größten, falls die Seite  $b$  zu  $a$  orthogonal ist, so daß unter den Dreiecken mit zwei gegebenen Seiten das rechtwinklige Dreieck mit diesen beiden Katheten das grösste Flächenmaß besitzt.

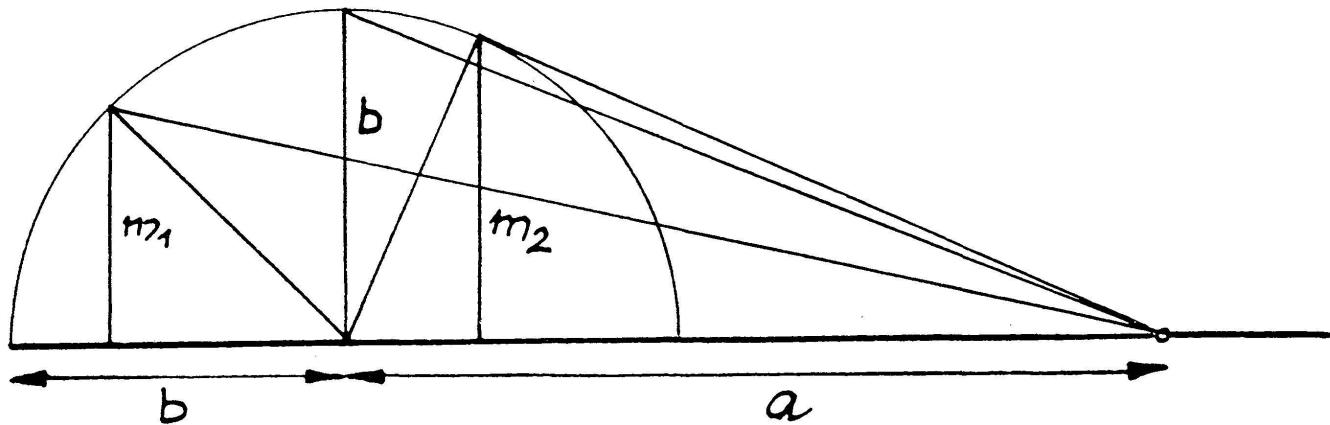


Abb. 14.

Endlich sei noch darauf hingewiesen, daß nicht jede Extremalaufgabe eine „wirkliche“ Lösung zu besitzen braucht. Dies kann man mit Hilfe von Ungleichungen, oder auch auf geometrischem Wege einsehen. Suchen wir z. B. unter den Pyramiden mit quadratischer Basis und mit gleicher Seitenkante  $a$  diejenige mit der größten Oberfläche, so sehen wir (Abb. 8), indem wir die Spitze  $C$  der Projektion  $A$  derselben nähern, daß die Oberfläche immer größer wird, und ihr Maximum dann erreicht, falls  $C$  mit  $A$  zusammenfällt. In der Tat wächst bis dahin das Grundquadrat fortwährend, und die Seiten sind gleichschenklige Dreiecke mit dem Schenkel  $a$ , und solche Dreiecke erreichen — wie wir soeben gesehen haben — dann ihr maximales Flächenmaß, falls sie rechtwinklig sind, was aber genau dann der Fall ist, wenn  $C$  mit  $A$  zusammenfällt (Abbildung 15). Die somit

erhaltene „Pyramide“ ist aber entartet, „uneigentlich“: ein ebenes Quadrat (doppelt gerechnet; die Oberfläche ist die Doppelte derjenigen des Quadrates, d. h.  $2(a\sqrt{2})^2 = 4a^2$ ). Unter den „eigentlichen“ (nicht entarteten) regelmäßigen Pyramiden mit quadratischer Basis und gegebener Seitenkante  $a$  gibt es keine von maximaler Oberfläche, der Flächeninhalt wird um so größer, je näher  $C$  zu  $A$  kommt.

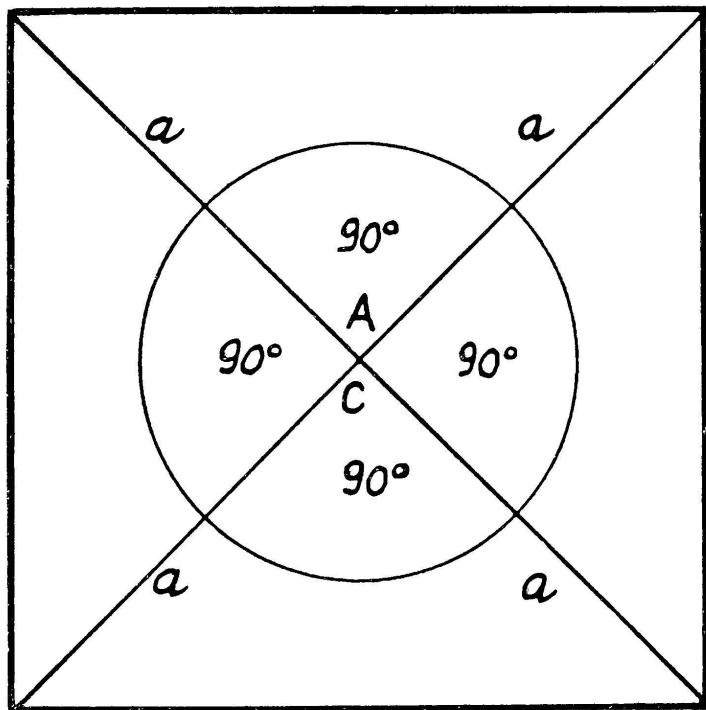


Abb. 15.

Angesichts der Vielfalt der elementar lösbarcn Extremalaufgaben und der zur Verfügung stehenden Methoden entsteht die — ihrer Natur nach zur mathematischen Logik gehörende — Frage, ob es überhaupt eine solche elementare, d. h. die Begriffsbildungen der Differential- und Integralrechnung nicht enthaltende Extremalaufgabe gibt, die sich nicht elementar (d. h. ohne Hilfe der Differentialrechnung) lösen liesse?

**5. Literaturverzeichnis.** Die Anzahl der Arbeiten die sich mit der elementaren Lösung von Ungleichungen und von Extremalaufgaben beschäftigen, ist sehr beträchtlich. Es war unser Bestreben eine möglichst reichhaltige, dabei aber freilich

bei weitem nicht vollständige, Bibliographie zu bieten, unter Berücksichtigung womöglich der neuesten Auflagen der einzelnen Werke:

1. K. H. SCHELLBACH, Mathematische Lehrstunden. *Aufgaben aus der Lehre vom Grössten und Kleinsten.* Berlin, 1860.
2. M. C. E. MARTUS *Maxima und Minima.* Berlin 1861.
3. W. SCHRADER, *Neue allgemeine Methode zur elementaren Bestimmung des Maximums und Minimums.* Halle 1862.
4. L. RÁTZ, *Matematikai Gyakorlókönyv*, I-II. Budapest, 1904, 1905.
5. J. L. W. V. JENSEN, *Acta math.*, 70 (1906), 179-191.
6. R. STURM, *Maxima und Minima in der elementaren Geometrie.* Leipzig, 1910.
7. H. WEBER-J. WELLSTEIN, *Enzyklopädie der Elementarmathematik, III,* 1. Leipzig, 1910.
8. H. RADEMACHER-O. TOEPLITZ, *Von Zahlen und Figuren.* Berlin, 1933.
9. H. DÖRRIE, *Triumph der Mathematik.* Breslau, 1940.
10. KOSCHMIEDER, L., *Zeitschrift für math. naturw. Unterricht*, 73 (1942), 237-243.
11. O. HAUPT-G. AUMANN-Chr. PAUC, *Differential- und Integralrechnung*, I. Berlin, 1948.
12. J. ACZÉL, *Gazeta de mat.*, 10 (1949), n° 39, 5-7, n° 40, 5-9, n° 41-42, 4-11, 11 (1950), n° 43, 10; *Revista de mat. elem.*, 1 (1952), 13-17, 40-51.
13. L. KOSCHMIEDER, *Gac. mat.*, 1 (1949), 2-8.
14. С. И. Новоселов, Алгебра и элементарные функции, Москва 1950.
15. Я. И. Перельман, Занимательная Алгебра. Москва-Ленинград 1950.
16. Я. И. Перельман, Занимательная Геометрия. Москва-Ленинград 1950.
17. J. ACZÉL-J. SURÁNYI, *Középiskolai mat. lapok*, 3 (1951), 12-19, 62-71, 75-76, 115-127, 196-220; 4 (1952), 13-15, 51-57, 65-77.
18. П. П. Коровкин, Неравенства. Москва-Ленинград 1951.
19. И. П. Натонсон, Простейшие задачи на максимум и минимум. Москва-Ленинград 1951.
20. J. H. BUTCHART-L. MOSER, *Scripta math.*, 18 (1952), 221-236.
21. G. H. HARDY-J. E. LITTLEWOOD-G. POLYA, *Inequalities*, Cambridge. 1952.
22. R. COURANT-H. ROBBINS, *What is mathematics?* New York, 1953.
23. J. ACZÉL, *Acta Univ. Debrecen*, 3 (1956), n° 2, 23-40.
24. L. KOSCHMIEDER, *Bulletin of the College of Arts and Sciences Baghdad*, 2 (1957), 67-83; 3 (1958), 49-59.
25. E. HÓDI, *Szélsőértékfeladatok elemi megoldása.* Budapest, 1959.

Mathematisches Institut  
der Universität L. Kossuth  
in Debrecen, Ungarn.