Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 7 (1961)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: CHARAKTERISTISCHE KLASSEN UND ANWENDUNGEN

Autor: Atiyah, M. F. / Hirzebruch, F.

Bibliographie

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-37131

Index gleich $\pm t_k$ *ist* ($t_k = (2k+1)$*-Ableitung von* $\operatorname{tg}(x)$ *für* $x = 0$).

Zum Beweis benötigen wir zunächst ein Lemma, das bereits bei Kervaire (Courbure intégrale généralisée et homotopie, *Math. Ann.*, *131*, 219-252 (1956), siehe S. 247) vorkommt.

LEMMA. — *Das cartesische Produkt* $\mathbf{S}^{n_1} \times \ldots \times \mathbf{S}^{n_r}$ *von Sphären kann in den Euklidischen Raum der Dimension* $n_1+\ldots+n_r+1$ *differenzierbar eingebettet werden.*

Das Lemma ist richtig für $r = 1$. Wir beweisen es durch Induktion über r. Offensichtlich kann $\mathbf{S}^{n_r}$ mit trivialem Normalbündel in den euklidischen Raum der Dimension $n_1+\ldots+n_r+1$ eingebettet werden. Die Faser des Normalbündels ist ein $\mathbf{R}^d$ mit $d = n_1+\ldots+n_{r-1}+1$. Nach Induktionsannahme ist $\mathbf{S}^{n_1}\times\ldots\times\mathbf{S}^{n_{r-1}}$ differenzierbar in $\mathbf{R}^d$ einbettbar. Daraus folgt die Behauptung des Lemmas.

In [12, § 9.4] wird erwähnt, dass es in $\mathbf{S}^2\times\ldots\times\mathbf{S}^2$ ($2k+1$ Faktoren) eine Untermannigfaltigkeit V^{4k} der Codimension 2 gibt, die mit jedem Faktor $\mathbf{S}^2$ die Schnittzahl 1 hat.

Nach dem Lemma ist V^{4k} in den Euklidischen Raum der Dimension $4k+3$ differenzierbar einbettbar. Nach [12, § 9.4] ist der Index von V^{4k} in der Tat gleich der $(2k+1)$-ten Ableitung von $\operatorname{tgh} x$ für $x = 0$, q.e.d.

Der vorstehende Satz zeigt, dass Satz 5.5 für gerades k scharf ist. Für $k = 3, 5, \ldots$ ist uns keine M^{4k} bekannt, die in $\mathbf{R}^{4k+4}$ einbettbar ist und deren Index gleich $t_k/2$ ist.

LITERATUR

[1] ADAMS, J. F., On the non-existence of elements of Hopf invariant one. *Ann. of Math.*, *72* (1960), 20-104.

[2] ALEXANDROFF, P. und H. HOPF, *Topologie.* Springer-Verlag, Berlin, 1935.

[3] ATIYAH, M. F. und F. HIRZEBRUCH, Riemann-Roch theorems for differentiable manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc.*, *65* (1959), 276-281.

[4] —— und F. HIRZEBRUCH, Vector bundles and homogeneous spaces. Differential Geometry. *Proc. of Symp. in Pure Math.*, vol. 3; *Amer. Math. Soc.*, 1961.

[5] —— und F. HIRZEBRUCH, Quelques théorèmes de non-plongement pour les variétés différentiables. *Bull. Soc. Math. France*, *87* (1959), 383-396.

[6] Borel, A. und F. Hirzebruch, Characteristic classes and homogeneous spaces I, II, III. *Amer. J. of Math.*, *80* (1958), 458-538; *81* (1959), 315-382; *82* (1960), 491-504.
[7] —— und J.-P. Serre, Le théorème de Riemann-Roch (d'après Grothendieck). *Bull. Soc. Math. France*, *86* (1958), 97-136.
[8] Bott, R., The space of loops on a Lie group. *Mich. math. J.*, *5* (1958), 35-61.
[9] —— Quelques remarques sur les théorèmes de périodicité. *Bull. Soc. Math. France*, *87* (1959), 293-310.
[10] Chern, S. S., Characteristic classes of Hermitian manifolds. *Ann. of Math.*, *47* (1946), 58-121.
[11] Eilenberg, S. und N. Steenrod, Foundations of algebraic topology. *Princeton Math. Series*, vol. *15*. Princeton Univ. Press, 1952.
[12] Hirzebruch, F., *Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie.* Ergebnisse der Mathematik. Neue Folge, Heft *9*. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1956.
[13] Milnor, J., Some consequences of a theorem of Bott. *Ann. of Math.*, *68* (1958), 444-449.
[14] Pontrjagin, L., Characteristic cycles on differentiable manifolds. *Mat. Sbornik N. S.*, *21* (*63*), 233-284 (1947).
[15] Puppe, D., Homotopiemengen und ihre induzierten Abbildungen I. *Math. Z.*, *69* (1958), 299-344.
[16] Stiefel, E., Richtungsfelder und Fernparallelismus in Mannigfaltigkeiten. *Comm. Math. Helv.*, *8* (1936), 3-51.
[17] —— Über Richtungsfelder in den projektiven Räumen und einen Satz aus der reellen Algebra. *Comm. Math. Helv.*, *13* (1940-41), 201-218.
[18] Whitney, H., Sphere spaces. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, *21* (1935), 462-468.
[19] Loewy, A., Algebraische Gruppentheorie. *Pascal's Repertorium der höheren Mathematik*, I 1, 2. Auflage. Leipzig und Berlin, 1910.

Mathematisches Institut, Bonn.
Pembroke College, Cambridge.
Mathematical Institute, Oxford.