

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 7 (1961)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** CHARAKTERISTISCHE KLASSEN UND ANWENDUNGEN  
**Autor:** Atiyah, M. F. / Hirzebruch, F.  
**Kapitel:** § 5. EINBETTUNGSFRAGEN.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-37131>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 20.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

topiegruppe  $\pi_{n+4k-1}(\mathbf{S}^n)$  (*Proc. Intern. Congress of Math.*, Edinburgh, 1958, pp. 454-458).

## § 5. EINBETTUNGSFRAGEN.

5.1. Es sei  $M^{4k}$  eine kompakte orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension  $4k$ . Das  $A$ -Geschlecht  $A(M^{4k})$  ist definiert als der Wert von  $2^{4k} \hat{A}_k(p_1, \dots, p_k) = A_k(p_1, \dots, p_k)$  auf dem orientierten Grundzyklus von  $M^{4k}$ . Dabei sind  $p_1, p_2, \dots$  die Pontrjaginschen Klassen von  $M^{4k}$ , ( $p_i \in H^{4i}(M^{4k}; \mathbf{Z})$ ). In [6, Part II] wurde gezeigt, dass  $A(M^{4k})$  eine ganze Zahl ist. In [5] wurde folgender Satz bewiesen.

**SATZ.** — *Es sei  $M^{4k}$  eine kompakte orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit. Wenn  $M^{4k}$  in den Euklidischen Raum der Dimension  $8k - 2q$  differenzierbar einbettbar ist, dann ist  $A(M^{4k})$  durch  $2^{q+1}$  teilbar. Wenn ausserdem noch  $q \equiv 2 \pmod{4}$  ist, dann ist  $A(M^{4k})$  durch  $2^{q+2}$  teilbar.*

Der Beweis verläuft, indem man annimmt, dass  $X$  in der Sphäre der Dimension  $8k - 2q$  eingebettet ist. Mit Hilfe geeigneter Darstellungen der orthogonalen Gruppe konstruiert man aus dem Normalbündel von  $X$  ein Element von  $K^0(\mathbf{S}^{8k-2q})$ , auf das man den Bottschen Satz anwendet (3.5).

5.2. Wie in 5.1 sei  $M^{4k}$  kompakt orientiert differenzierbar. Wir nehmen einmal an, dass  $M^{4k}$  in den Euklidischen Raum der Dimension  $4k+4$  differenzierbar eingebettet werden kann. Dann können wir Satz 5.1 mit  $q = 2k - 2$  anwenden und erhalten, dass  $A(M^{4k})$  durch  $2^{2k-1}$  und für gerades  $k$  sogar durch  $2^{2k}$  teilbar ist.

5.3. Die Mannigfaltigkeit  $M^{4k}$  (siehe 5.2) sei in der Sphäre  $\mathbf{S}^{4k+4}$  eingebettet. Die Pontrjaginschen Klassen des Normalbündels sollen mit  $\overline{p}_i \in H^{4i}(M^{4k}; \mathbf{Z})$  bezeichnet werden. Da das Normalbündel die Faser  $\mathbf{R}^4$  hat, verschwindet  $\overline{p}_i$  für  $i > 2$ . Ferner ist  $\overline{p}_2$  das Quadrat der Eulerschen Klasse des Normalbündels, welche bei jeder Einbettung einer Mannigfaltigkeit in eine Sphäre verschwindet. Also ist  $\overline{p}_i = 0$  für  $i \geq 2$ . Nun ist

$\{A_k\}$  die multiplikative Folge von Polynomen mit der charakteristischen Potenzreihe

$$(2\sqrt{z})/\sinh(2\sqrt{z}) .$$

Es sei  $\{B_k\}$  die multiplikative Folge von Polynomen mit der charakteristischen Potenzreihe

$$\sinh(2\sqrt{z})/(2\sqrt{z}) .$$

Dann ist

$$A_k(p_1, \dots, p_k) = B_k(\overline{p_1}, \dots, \overline{p_k}) ,$$

$$\text{falls } p \cdot \bar{p} = 1 , \quad (p = \sum_{i=0}^{\infty} p_i , \quad \bar{p} = \sum_{i=0}^{\infty} \overline{p_i}) .$$

In unserer besonderen Situation ist  $\overline{p_i} = 0$  für  $i \geq 2$ . Deshalb ist

$$\sum_{j=0}^{\infty} A_j(p_1, \dots, p_j) = \sum_{j=0}^{\infty} B_j(\overline{p_1}, 0, \dots, 0) = \frac{\sinh 2\sqrt{\overline{p_1}}}{2\sqrt{\overline{p_1}}}$$

und damit

$$A_k(p_1, \dots, p_k) = \frac{2^{2k} (\overline{p_1})^k}{(2k+1)!} .$$

Also ist nach 5.2 die Klasse

$$(1) \quad \frac{2 \cdot (\overline{p_1})^k}{(2k+1)!} \in H^{4k}(M^{4k}; \mathbf{Q}) \text{ ganzzahlig} .$$

Für gerades  $k$  ist sogar

$$(2) \quad \frac{(\overline{p_1})^k}{(2k+1)!} \in H^{4k}(M^{4k}; \mathbf{Q}) \text{ ganzzahlig} .$$

5.4. Der Index  $\tau(M^{4k})$  einer kompakten orientierten differenzierbaren Mannigfaltigkeit ist die Anzahl der positiven minus die Anzahl der negativen Eigenwerte der quadratischen Form  $B(x, x)$  (für  $x \in H^{2k}(M^{4k}; \mathbf{R})$ ), wo  $B(x, x)$  der Wert von  $x \cdot x$  auf dem orientierten Grundzyklus von  $M^{4k}$  ist. Es gilt [12]

$$(3) \quad \tau(M^{4k}) = L_k(p_1, \dots, p_k) [M^{4k}] ,$$

wo  $\{L_k(p_1, \dots, p_k)\}$  die zur charakteristischen Potenzreihe  $\frac{\sqrt{z}}{\operatorname{tgh} \sqrt{z}}$  gehörige multiplikative Folge von Polynomen ist. Macht man wieder die Annahme, dass  $M^{4k}$  in der Sphäre der Dimension  $4k+4$  eingebettet ist, dann folgt ähnlich wie in 5.3, dass

$$\sum_{j=0}^{\infty} L_j(p_1, \dots, p_j) = \frac{\operatorname{tgh} \sqrt{p_1}}{\sqrt{p_1}}$$

und damit

$$(4) \quad L_k(p_1, \dots, p_k) = \pm t_k \cdot \frac{\overline{p_1}^k}{(2k+1)!},$$

wo  $t_k$  die  $(2k+1)$ -te Ableitung von  $\operatorname{tg}(x)$  für  $x=0$  ist. Bekanntlich ist  $t_k$  eine gerade ganze Zahl ( $k \geq 1$ ). Aus (1)-(4) folgt

5.5. SATZ. — Die kompakte orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit  $M^{4k}$  möge sich differenzierbar in den Euklidischen Raum der Dimension  $4k+4$  einbetten lassen ( $k \geq 1$ ). Dann ist der Index  $\tau(M^{4k})$  durch  $\frac{t_k}{2}$  teilbar, wo  $t_k$  die  $(2k+1)$ -Ableitung von  $\operatorname{tg}(x)$  für  $x=0$  ist. Ist ausserdem  $k$  gerade, dann ist  $\tau(M^{4k})$  sogar durch  $t_k$  teilbar.

Für die ganzen Zahlen  $t_k$  hat man folgende Formel

$$t_{k-1} = \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)B_k}{2k},$$

wo  $B_k$  die  $k$ -te Bernoullische Zahl ist. Es gilt

$$t_1 = 2, \quad t_2 = 16, \quad t_3 = 2^4 \cdot 17, \quad t_4 = 2^8 \cdot 31.$$

Für  $k=1$  ist der vorstehende Satz trivial (Jede  $M^4$  kann in den  $\mathbf{R}^8$  eingebettet werden.) Für  $k=2$  besagt er, dass eine  $M^8$ , die in den Euklidischen Raum der Dimension 12 einbettbar ist, einen durch 16 teilbaren Index hat.

5.6. SATZ. — Es gibt eine kompakte orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit  $V^{4k}$ , die sich differenzierbar in den Euklidischen Raum der Dimension  $4k+3$  einbetten lässt, und deren

Index gleich  $\pm t_k$  ist ( $t_k = (2k+1)$ -Ableitung von  $\operatorname{tg}(x)$  für  $x = 0$ ).

Zum Beweis benötigen wir zunächst ein Lemma, das bereits bei Kervaire (Courbure intégrale généralisée et homotopie, *Math. Ann.*, 131, 219-252 (1956), siehe S. 247) vorkommt.

LEMMA. — Das cartesische Produkt  $S^{n_1} \times \dots \times S^{n_r}$  von Sphären kann in den Euklidischen Raum der Dimension  $n_1 + \dots + n_r + 1$  differenzierbar eingebettet werden.

Das Lemma ist richtig für  $r = 1$ . Wir beweisen es durch Induktion über  $r$ . Offensichtlich kann  $S^{n_r}$  mit trivialem Normalbündel in den euklidischen Raum der Dimension  $n_1 + \dots + n_r + 1$  eingebettet werden. Die Faser des Normalbündels ist ein  $\mathbf{R}^d$  mit  $d = n_1 + \dots + n_{r-1} + 1$ . Nach Induktionsannahme ist  $S^{n_1} \times \dots \times S^{n_{r-1}}$  differenzierbar in  $\mathbf{R}^d$  einbettbar. Daraus folgt die Behauptung des Lemmas.

In [12, § 9.4] wird erwähnt, dass es in  $S^2 \times \dots \times S^2$  ( $2k+1$  Faktoren) eine Untermannigfaltigkeit  $V^{4k}$  der Codimension 2 gibt, die mit jedem Faktor  $S^2$  die Schnitzzahl 1 hat.

Nach dem Lemma ist  $V^{4k}$  in den Euklidischen Raum der Dimension  $4k+3$  differenzierbar einbettbar. Nach [12, § 9.4] ist der Index von  $V^{4k}$  in der Tat gleich der  $(2k+1)$ -ten Ableitung von  $\operatorname{tgh} x$  für  $x = 0$ , q.e.d.

Der vorstehende Satz zeigt, dass Satz 5.5 für gerades  $k$  scharf ist. Für  $k = 3, 5, \dots$  ist uns keine  $M^{4k}$  bekannt, die in  $\mathbf{R}^{4k+4}$  einbettbar ist und deren Index gleich  $t_k/2$  ist.

#### LITERATUR

- [1] ADAMS, J. F., On the non-existence of elements of Hopf invariant one. *Ann. of Math.*, 72 (1960), 20-104.
- [2] ALEXANDROFF, P. und H. HOPF, *Topologie*. Springer-Verlag, Berlin, 1935.
- [3] ATIYAH, M. F. und F. HIRZEBRUCH, Riemann-Roch theorems for differentiable manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 65 (1959), 276-281.
- [4] — und F. HIRZEBRUCH, Vector bundles and homogeneous spaces. Differential Geometry. *Proc. of Symp. in Pure Math.*, vol. 3; *Amer. Math. Soc.*, 1961.
- [5] — und F. HIRZEBRUCH, Quelques théorèmes de non-plongement pour les variétés différentiables. *Bull. Soc. Math. France*, 87 (1959), 383-396.