

## § 2. Eine neue Cohomologietheorie [4],

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **7 (1961)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$X$  als Basis definiert. Die in 1.3 erwähnte Eigenschaft der  $\omega_i$ , die man heute Stiefel-Whitneysche Klassen nennt, gilt unverändert.

Später hat dann Chern [10] die Chernschen Klassen  $c_i \in H^{2i}(X; \mathbf{Z})$  für ein *komplexes* Vektorraum-Bündel über dem Raum  $X$  und Pontrjagin (siehe z.B. [14]) die Pontrjaginschen Klassen  $p_i \in H^{4i}(X; \mathbf{Z})$  für ein *reelles* Vektorraum-Bündel über  $X$  eingeführt. Heute definiert man die Pontrjaginsche Klasse  $p_i$  eines reellen Vektorraum-Bündels  $\xi$  als das  $(-1)^i$ -fache der Chernschen Klasse  $c_{2i}$  der komplexen Erweiterung von  $\xi$  (siehe z.B. [12]). Man beachte, dass die  $c_i$  und  $p_i$  ganzzahlige Cohomologieklassen sind, während die  $\omega_i$  Klassen mit Koeffizienten in der Gruppe der Ordnung 2 sind.

1.6. In dem Vortrag von Steenrod auf diesem Symposium ist von Cohomologie-Operationen die Rede. Die Cohomologie-Operation  $Sq^i$  zum Beispiel ordnet jedem Element von  $H^*(X; \mathbf{Z}_2)$  ein Element von  $H^*(X; \mathbf{Z}_2)$  zu. Die charakteristische Klasse  $\omega_i$  ordnet jedem reellen Vektorraum-Bündel über  $X$  ein Element von  $H^*(X; \mathbf{Z}_2)$  zu. So wie eine Cohomologie-Operation eine natürliche Abbildung von der Cohomologietheorie in die Cohomologietheorie ist, so ist eine charakteristische Klasse eine natürliche Abbildung von der Theorie der Vektorraum-Bündel in die Cohomologietheorie. Diese Analogie hat eine tiefere Bedeutung. Wir wollen versuchen, das in diesem Vortrag für den Fall der *komplexen* Vektorraum-Bündel näher auseinanderzusetzen: Mit Hilfe aller komplexen Vektorraum-Bündel, die den gegebenen Raum  $X$  als Basis haben, können „Cohomologie-Gruppen“  $K^n(X)$  definiert werden [4] ( $n$  beliebige ganze Zahl), die den Axiomen von Eilenberg-Steenrod [11] genügen bis auf das „Dimensionsaxiom“, welches besagt, dass die Cohomologiegruppen des einpunktigen Raumes in den von 0 verschiedenen Dimensionen verschwinden. Die charakteristischen Klassen liefern natürliche Abbildungen von dieser neuen Cohomologietheorie in die übliche Cohomologietheorie.

## § 2. EINE NEUE COHOMOLOGIETHEORIE [4].

2.1. Es sei  $X$  ein endlicher Zellenkomplex (endlicher *CW*-Komplex). (Diese Annahme ist viel zu speziell; sie dient der

Bequemlichkeit der Darstellung.) Wir wollen abelsche Gruppen  $K^n(X)$  definieren ( $n \in \mathbf{Z}$ ), siehe 1.6. Zunächst geben wir die Definition von  $K^0(X)$ , das wir auch einfach  $K(X)$  nennen.

$G(X)$  sei die Menge der (Isomorphieklassen von) komplexen Vektorraum-Bündeln über  $X$ , (wobei wir zulassen, dass ein Vektorraum-Bündel über den verschiedenen Zusammenhangskomponenten von  $X$  verschiedene Faser-Dimensionen hat).  $F(X)$  sei die freie abelsche Gruppe, die von  $G(X)$  erzeugt wird. Für Elemente  $\xi', \xi'' \in G(X)$  ist die Whitney'sche Summe  $\xi' \oplus \xi''$ , die entsteht, indem man in jedem Punkte von  $X$  die direkte Summe der Fasern von  $\xi'$  und  $\xi''$  bildet, ein wohldefiniertes Element von  $G(X)$ . Die abelsche Gruppe  $K(X)$  wird definiert als  $F(X)$  modulo der Untergruppe, die von allen Elementen der Form  $\xi' \oplus \xi'' - \xi' - \xi''$ , wo  $\xi', \xi'' \in G(X)$ , erzeugt wird. Die Addition in  $K(X)$  ist also durch die Whitney'sche Summe induziert.

2.2. Wir arbeiten in der Kategorie der Paare  $(X, Y)$ , wo  $X$  endlicher  $CW$ -Komplex und  $Y$  Teilkomplex von  $X$  ist. Ein Raum  $X$  kann auch als Paar  $(X, \emptyset)$ , wo  $\emptyset$  die leere Menge ist, betrachtet werden. Ein Raum  $X$  mit ausgezeichnetem Basispunkt  $x_0$  kann als Paar  $(X, x_0)$  angesehen werden. Zu einem Raum  $X$  gibt es den Raum  $X^+$ , der die disjunkte Vereinigung von  $X$  mit einem zusätzlichen Punkt ist, welcher in  $X^+$  Basispunkt ist. Die  $n$ -fache Einhängung  $S^n(X)$  eines Raumes  $X$  mit Basispunkt (vgl. z.B. [15]) ist wieder ein Raum mit Basispunkt. Ist in einem Raum ein Basispunkt ausgezeichnet, dann werde dieser immer mit  $pt$  bezeichnet. Ferner soll  $pt$  auch den einpunktigen Raum andeuten. Für ein Paar  $(X, Y)$  ist  $X/Y$  der Raum, der entsteht, wenn man  $Y$  auf einen Punkt zusammenzieht, der dann in  $X/Y$  die Rolle des Basispunktes übernimmt. Für die übliche Cohomologietheorie (bezüglich festgewählter Koeffizienten) hat man kanonische Isomorphismen

$$(1) \quad H^i(X, pt) \cong \text{Kern} [H^i(X) \rightarrow H^i(pt)]$$

$$(2) \quad H^i(X^+, pt) \cong H^i(X)$$

$$(3) \quad H^i(X, Y) \cong H^i(X/Y, pt)$$

$$(4) \quad H^i(X, pt) \cong H^{i+n}(S^n(X), pt) .$$

Kennt man also den kontravarianten Funktor  $H^j$  für Räume  $X$ , dann kennt man  $H^i$  ( $i < j$ ) für Paare  $(X, Y)$ .

2.3. Der Funktor  $K$  ist kontravariant. Für eine stetige Abbildung  $f: Y \rightarrow X$  haben wir einen Homomorphismus  $f^!: K(X) \rightarrow K(Y)$ , der durch das Liften von Vektorraum-Bündeln gemäss  $f$  induziert wird. Die Gruppe  $K(pt)$  ist unendlich-zyklisch ( $G(pt)$  ist die Halbgruppe der ganzen nicht-negativen Zahlen). Der Funktor  $K^0$  ist per definitionem gleich  $K$ . Verlangen wir (1)-(4) per definitionem für unsere  $K^n$ , dann ist also  $K^n(X, Y)$  für  $n \leq 0$  definiert (vgl. [4] für Einzelheiten). Die  $K^n$  sind für  $n < 0$  nicht 0 wie in der üblichen Cohomologietheorie. Das liegt an folgendem (vgl. (4)): In der üblichen Theorie ist  $H^0(X, pt)$  für zusammenhängendes  $X$  gleich 0, während  $K^0(X, pt)$  im allgemeinen von 0 verschieden ist.

2.4. Zu dem Funktor  $K^0$  gibt es einen universellen Raum  $\Gamma$ . Man betrachte die Grassmannsche Mannigfaltigkeit  $\mathbf{U}(2n)/(\mathbf{U}(n) \times \mathbf{U}(n))$  der  $n$ -dimensionalen Teilräume durch den Ursprung des  $\mathbf{C}^{2n}$ . Man kann „zum Limes übergehen“ und erhält einen Raum

$$B_{\mathbf{U}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{U}(2n)/(\mathbf{U}(n) \times \mathbf{U}(n)) .$$

Der Raum  $\Gamma$  ist das cartesische Produkt von  $\mathbf{Z}$  (ganze Zahlen in diskreter Topologie) mit  $B_{\mathbf{U}}$ . Man wählt für  $\Gamma$  einen Basispunkt in  $\{0\} \times B_{\mathbf{U}}$ . Aus der Theorie der klassifizierenden Räume folgt, dass  $K^0(X, pt)$  in eineindeutiger Korrespondenz steht zu  $\pi(X, \Gamma)$ , der Menge der Homotopieklassen (bezüglich der gewählten Basispunkte) von stetigen Abbildungen  $X \rightarrow \Gamma$ . Per definitionem ist für  $n > 0$

$$K^{-n}(X, pt) = K^0(S^n(X), pt) .$$

Also steht  $K^{-n}(X, pt)$  in eineindeutiger Korrespondenz zu  $\pi(S^n(X), \Gamma)$  oder, was auf das gleiche hinauskommt, zu  $\pi(X, \Omega^n \Gamma)$ , der Menge der Homotopieklassen (bezüglich der Basispunkte) von  $X$  in den  $n$ -fachen Schleifenraum von  $\Gamma$ .

Bisher war es uns nicht gelungen, die Funktoren  $K^n$  für  $n > 0$  zu definieren. Nun kommt uns die Bottsche Theorie [8, 9] zur

Hilfe. Bott hat eine Homotopie-Äquivalenz zwischen  $\Gamma$  und  $\Omega^2 \Gamma$  angegeben. Also gibt es die entsprechende Bijektion

$$(5) \quad K^{-n}(X, Y) \cong K^{-(n+2)}(X, Y), \quad n > 0.$$

Man kann zeigen, dass (5) die Gruppenstruktur respektiert. Also sind die Funktoren  $K^{-n}$  und  $K^{-(n+2)}$  einander „gleich“. Verlangt man (5) für alle ganzen Zahlen  $n$ , dann sind alle Funktoren  $K^n$  definiert. Die Funktoren  $K^n$  erfüllen alle Axiome (vgl. [4, 15] und auch den Vortrag von Eckmann auf diesem Symposium) bis auf das Dimensionsaxiom. Es ist ( $n \geq 0$ )

$$\begin{aligned} K^{-n}(pt) &= K^{-n}(pt^+, pt) = \\ K^0(S^n(pt^+), pt) &= K^0(S^n, pt) = \pi_n(\Gamma). \end{aligned}$$

Nach Bott (vgl. (5)) ist  $\pi_n(\Gamma) = \mathbf{Z}$  für gerades  $n$  und gleich 0 für ungerades  $n$ . Also gilt (für alle  $n$ )

$$(6) \quad K^n(pt) \cong \mathbf{Z} \text{ für } n \text{ gerade, } K^n(pt) = 0 \text{ für } n \text{ ungerade.}$$

2.5. Da  $K^n = K^{n+2}$ , genügt es, die Funktoren  $K^0$  und  $K^1$  zu betrachten. Wir setzen

$$(7) \quad K^* = K^0 + K^1.$$

Für einen Raum  $X$  ist  $K^0(X)$  ein kommutativer Ring. Die Multiplikation wird durch das Tensorprodukt von komplexen Vektorraum-Bündeln induziert.  $K^*(X)$  ist über  $\mathbf{Z}_2$  graduiert. (Man betrachte die Indices 0 und 1 in (7) als die Elemente von  $\mathbf{Z}_2$ .) Man kann die Ringstruktur von  $K^0(X)$  so erweitern [4], dass  $K^*(X)$  zu einem  $\mathbf{Z}_2$ -graduierten antikommutativen Ring wird. Für  $a \in K^i(X)$  und  $b \in K^j(X)$  ist  $ab \in K^{i+j}(X)$ , und es gilt

$$ab = (-1)^{ij} ba, \quad (i, j \in \mathbf{Z}_2).$$

### § 3. DER CHERNSCHE CHARAKTER.

3.1. Es seien  $x_1, \dots, x_k$  Unbestimmte und  $a_1, \dots, a_k$  die elementarsymmetrischen Polynome in den  $x_1, \dots, x_k$ . Es sei ferner  $s_j$  das Polynom in den  $a_1, a_2, \dots$ , welches die Potenzsumme  $x_1^j + \dots + x_k^j$  ( $k \geq j$ ) durch die  $a_1, a_2, \dots$  ausdrückt. Man hat so